АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА, 1997, N° 8, с. 125–137

УДК 517.977.5

РАВНОВЕСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: МЕТОДЫ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА

А.С. АНТИПИН, д-р физ.-мат. наук

(Вычислительный Центр РАН, Москва)

Пересмотрена 26.07.2004 г.

Формулируется задача равновесного программирования. Обсуждается ее связь с игровыми постановками. Предлагается метод прогнозного типа для вычисления равновесного решения. Доказывается сходимость этого метода. Обсуждается экономическая интерпретация как исходной равновесной задачи, так и метода ее решения.

1. Введение

В настоящее время сформировалось четкое понимание существования диспропорции между хорошо развитой теорией методов решения задач оптимизации и фактическим отсутствием такой теории для решения задач игрового типа. К последним в первую очередь относятся седловые задачи, игры n лиц с равновесием по Нэшу, обратные задачи оптимизации, модели экономического равновесия.

Актуальность развития теории методов решения равновесных задач очевидна, поскольку именно эти задачи описывают на модельном уровне различные нюансы идеи компромисса частично (или полностью) противоречивых факторов и интересов, причем методы решения равновесных задач интерпретируются как механизмы согласования конфликтующих факторов. В настоящей работе рассматривается задача равновесного программирования, решением которой является неподвижная точка, и предлагается достаточно общий подход для ее вычисления. В основе подхода лежит неравенство, которое замещает отсутствующее у равновесных задач свойство монотонности, и градиентный спуск с управлением в виде прогноза, который компенсирует отсутствующее свойство потенциальности.

2. Постановка проблемы

Задачу равновесного программирования можно сформулировать в следующей форме. Найти неподвижную точку $v^* \in \Omega^*$, которая удовлетворяет экстремальному включению с функциональными ограничениями

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\Phi(v^*, w) \mid g(w) \leq 0,\ \ w \in \Omega\}. \tag{2.1}$$

Здесь функция $\Phi(v, w)$ определена на произведении пространств $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество. Предполагается, что $\Phi(v, w)$ выпуклая по переменной $w \in \Omega$ при любом $v \in \Omega$. Векторная функция $g(w)$ имеет размерность m, причем каждая ее компонента выпуклая для всех $w \in \mathbb{R}^n$. Переменная $v \in \Omega$ в (2.1) играет роль параметра, а $w \in \Omega$ — переменная оптимизации. Предполагается также, что экстремальное (маргинальное) отображение $w(v) \equiv \operatorname{argmin}\{\Phi(v, w) \mid g(w) \leq \leq 0,\ \ w \in \Omega\}$ определено для всех $v \in \Omega$, а множество решений $\Omega^* \subset \Omega$ исходной задачи непусто. Последнее предположение согласно теореме Какутани всегда выполняется, если Ω — выпуклый компакт, $\Phi(v, w)$ полунепрерывна снизу по v и выпукла по w [1].

Многие известные задачи анализа могут быть приведены к форме (2.1). Например, седловые задачи или, в более общей постановке, игра n лиц с равновесием по Нэшу. Действительно, пусть система неравенств

$$L(x^*, y) \le L(x^*, p^*) \le L(z, p^*) \qquad \forall z \in Q \subseteq \mathbb{R}^n,\ \forall y \in P \subseteq \mathbb{R}^m \tag{2.2}$$

определяет седловую точку, где $L(z, y)$ — выпукло-вогнутая функция, $Q = \{z \mid g_1(z) \le 0,\ z \in Q_1\}$, $P = \{y \mid g_2(y) \le 0,\ y \in P_1\}$, $g_1(z)$, $g_2(y)$ — выпуклые вектор-функции. Введем обозначения $w = (z, y)$, $v = (x, p)$, $v^* = (x^*, p^*)$, $g(w) = (g_1(z), g_2(y))$ и нормализованную функцию $\Phi(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$. Используя введенную систему обозначений, задачу (2.2) всегда можно записать в эквивалентном виде (2.1) [2, 3].

Более общая ситуация игры n лиц с равновесием по Нэшу также может быть сведена к конструкции (2.1). Действительно, пусть $f_i(x_i, x_{-i})$ — платежная функция i-го игрока, $i \in I$. Эта функция зависит как от собственных стратегий $x_i \in X_i$, где $X_i = (x_i)_{i \in I}$, так и от стратегий всех других игроков $x_{-i} = (x_j)_{j \in I \setminus i}$. Равновесием игры n лиц является решение системы экстремальных включений

$$x_i^* \in \mathrm{Argmin}\{f_i(x_i, x_{-i}^*) \mid g_i(x_i) \le 0,\ \ x_i \in X_i\}. \tag{2.3}$$

Введем нормализованную функцию вида

$$\Phi(v, w) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, x_{-i}),$$

где $v = (x_{-i})$, $w = (x_i)$, $g(w) = (g_i(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$, и $\Omega = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$; при этом $(v, w) = (x_i, x_{-i}) \in \Omega \times \Omega$. С помощью этой функции задачу (2.3) можно записать в форме (2.1).

Многие обратные задачи оптимизации [4] также можно представить в виде (2.1). Действительно, рассмотрим обратную задачу выпуклого программирования

$$\begin{gathered} x^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \lambda^*, f(x) \rangle \mid g(x) \le 0,\ \ x \in Q\}, \\ G(x^*) \le d. \end{gathered} \tag{2.4}$$

В этой задаче требуется выбрать неотрицательные коэффициенты линейной свертки $\lambda = \lambda^*$ так, чтобы соответствующее этим весам некоторое оптимальное решение x^* принадлежало наперед заданному выпуклому множеству. В частности, это множество может содержать только одну точку. Предполагается, что все функции в (2.4) выпуклые.

Систему (2.4) можно представить в виде игры двух лиц с равновесием по Нэшу

$$\begin{aligned} x^* &\in \mathrm{Argmin}\{\langle \lambda^*, f(x) \rangle \mid g(x) \le 0,\ \ x \in Q\}, \\ p^* &\in \mathrm{Argmin}\{\langle p, G(x^*) - d \rangle \mid p \ge 0\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Задача (2.5) в свою очередь с помощью нормализованной функции может быть сведена к (2.1). Таким образом, исходную обратную задачу оптимизации (2.4) можно представить в форме задачи вычисления неподвижной точки экстремального отображения (2.1).

3. Кососимметричные функции

В основе дальнейшего изложения лежат два главных неравенства, первое из которых является эквивалентным для (2.1) определением неподвижной точки и имеет вид

$$\Phi(v^*) \le \Phi(v^*, w) \qquad \forall w \in D, \tag{3.1}$$

где $D = \{w \mid g(w) \le 0,\;\; w \in \Omega\}$ — допустимое множество. Поскольку $\Phi^* = \inf\{\Phi(w,w) \mid w \in D\} \le \Phi(v^*, v^*)$, то из (3.1) немедленно следует неравенство Ки Фаня [5]

$$\inf\{\Phi(w,w) \mid w \in D\} \le \Phi(v^*, w). \tag{3.2}$$

Это неравенство эквивалентно теореме Какутани [1] и связано с фактом существования неподвижной точки задачи (2.1).

Второе неравенство отражает некоторое кососимметричное (седловое) свойство неподвижной точки [6, 7] и имеет форму

$$\Phi(w, v^*) \le \Phi(w,w) \qquad \forall w \in D. \tag{3.3}$$

Если переписать (3.3) в несколько более общем виде

$$\Phi(w, v^*) \le \sup\{\Phi(w,w) \mid w \in D\} \tag{3.4}$$

и сопоставить его с неравенством Ки Фаня (3.2)

$$\inf\{\Phi(w,w) \mid w \in D\} \le \Phi(v^*, w), \tag{3.5}$$

то можно видеть, что в случае, если $\sup\{\dots\} = \inf\{\dots\} = \Phi(v^*, v^*)$ оба неравенства можно рассматривать как обобщение понятия седловой точки.

Геометрический смысл неравенства (3.3) достаточно очевиден. Действительно, возьмем на диагонали квадрата $\Omega \times \Omega$ две близкие точки с координатами v^*, v^* и w, w, где $v^* \in \Omega^*$, $w \in \Omega$. Эти точки однозначно определяют две другие с координатами w, v^* и v^*, w. В совокупности четыре точки образуют небольшой квадрат, принадлежащий $\Omega \times \Omega$. Рассмотрим множество Лебега, порожденное точкой w, w:

$$R_{w,w} = \{u_1, u_2 \mid \Phi(u_1, u_2) \le \Phi(w,w),\;\; u_1 \in D,\;\; u_2 \in D\}.$$

По определению точка с координатами w, w принадлежит этому множеству. Условие (3.3) означает, что точка с координатами w, v^* также принадлежит множеству. Таким образом, (3.3) фактически означает, что множество Лебега (в силу выпуклости $\Phi(v, w)$ по w) содержит весь отрезок $\alpha v^* + (1-\alpha)w$, $\;0 \le \alpha \le 1$.

Если функция $\Phi(v, w)$ дифференцируема по совокупности своих переменных, то представление о (3.3) можно уточнить. Используя условие выпуклости

$$\langle \nabla f(x), y - x\rangle \le f(y) - f(x) \le \langle \nabla f(y), y - x\rangle, \tag{3.6}$$

которое верно для всех x и y из некоторого множества, преобразуем (3.3)

$$\begin{aligned} 0 \;&\le\; \Phi(w,w) - \Phi(w, v^*) \le \langle \nabla\Phi_w(w,w), w - v^*\rangle = \\ &=\; \langle \nabla\Phi_v(w,w), 0\rangle + \langle \nabla\Phi_w(w,w), w - v^*\rangle = \langle \nabla\Phi(w,w), h\rangle, \end{aligned}$$

где $h = (0, w - v^*)$, $\nabla\Phi(w,w) = (\nabla\Phi_v(v,w), \nabla\Phi_w(v,w))$. Таким образом, если (3.3) выполнено для всех w из некоторой окрестности точки равновесия v^*, то градиент $\nabla\Phi(v,w)$ будет иметь острый (точнее, не тупой) угол с вектором h для всех w из указанной окрестности. Для задач оптимизации это условие принимает вид: $\langle \nabla\Phi(w), w - v^* \rangle \geq 0 \ \forall w \in D$ [8].

Неравенство (3.3) носит неконструктивный характер, так как содержит неизвестный вектор $v^* \in \Omega^*$, поэтому введем класс функций, для которых условия (3.3) выполняются всегда [7].

Определение 1. *Функцию $\Phi(v,w)$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ назовем кососимметричной на $\Theta \times \Theta$, если она удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(w,w) - \Phi(w,v) - \Phi(v,w) + \Phi(v,v) \geq 0 \tag{3.7}$$

для всех $w \in \Theta$ и всех $v \in \Theta$.

Если выполняется неравенство вида

$$\Phi(w,w) - \Phi(w,v^*) - \Phi(v^*,w) + \Phi(v^*,v^*) \geq 0 \tag{3.8}$$

для всех w из некоторой окрестности решения $v^* \in \Omega^*$, то функцию $\Phi(v,w)$ будем называть кососимметричной относительно равновесия.

В дальнейшем множество Θ будет совпадать либо с Ω либо с D.

Введенный класс симметричных функций не пуст. Нетрудно убедиться [2, 9], что нормализованная функция $\Phi(v,w) = L(z,p) - L(x,y)$, $w = (z,y)$, $v = (x,p)$ седловой задачи (2.2) является симметричной.

Для симметричных функций условие (3.3) выполняется всегда. Действительно, если в (3.8) учесть (3.1), то получим (3.3).

Симметричные функции имеют свойства [7], которые можно рассматривать как аналоги условий монотонности градиента и неотрицательности второй производной для выпуклых функций.

Свойство 1. *Если функция $\Phi(v,w)$ кососимметрична и выпукла по второй переменной, то ее частный градиент $\nabla\Phi_w(v,v)$ монотонен на диагонали квадрата $\Theta \times \Theta$*

$$\langle \nabla\Phi_w(w,w) - \nabla\Phi_w(v,v), w - v \rangle \geq 0 \qquad \forall w \in \Theta,\ v \in \Theta. \tag{3.9}$$

Это неравенство можно получить, если два первых и два последних слагаемых в левой части (3.7) оценить с помощью (3.6).

Свойство 2. *Смешанная производная $\nabla^2\Phi_{wv}(v,v)$ кососимметричной функции $\Phi(v,w)$ на диагонали квадрата $\Theta \times \Theta$ неотрицательна*

$$\langle \nabla^2\Phi_{wv}(v,v)h, h \rangle \geq 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

Нетрудно проверить, что функции типа $\Phi_1(v,w) = \langle v, w \rangle$, $\Phi_2(v,w) = \dfrac{1}{2}|v+w|^2$, $\Phi_3(v,w) = v^2 + w^2$ удовлетворяют условиям (3.9) и (3.10).

4. Примеры

Приведенные ниже примеры равновесных задач иллюстрируют разнообразие задач, для которых условие (3.3) выполняется. Рассмотрим задачу отыскания неподвижной точки квадратичного экстремального включения

$$v^* \in \text{Argmin}\left\{\frac{1}{2}\langle Nw, w\rangle + \langle Mv^* + m, w\rangle \mid w \in \Omega\right\}, \tag{4.1}$$

где N и M — неотрицательные матрицы, т.е. $\langle Nv, v\rangle \geq 0$ и $\langle Mv, v\rangle \geq 0$ для всех $v \in \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, будем предполагать, что N — симметричная матрица. Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \Phi(w,w) - \Phi(w,v) - \Phi(v,w) + \Phi(v,v) = \\ = \; & \frac{1}{2} - \langle Nw, w\rangle + \langle Mw, w\rangle + \langle m, w\rangle - \frac{1}{2}\langle Nv, v\rangle - \langle Mw, v\rangle - \langle m, v\rangle - \\ - \; & \frac{1}{2}\langle Nw, w\rangle - \langle Mv, w\rangle - \langle m, w\rangle + \frac{1}{2}\langle Nv, v\rangle + \langle Mv, v\rangle + \langle m, v\rangle = \\ = \; & \langle M(w-v), w-v\rangle \geq 0 \; \forall w \in \Omega, \qquad \forall v \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что если матрица M неотрицательна, то для $\Phi(w,v)$ из (4.1) выполняется (3.7).

Конкретизируем матрицы N и M. Пусть N — (2×2)-единичная матрица, а M — (2×2)-кососимметричная матрица с единичными компонентами, $m = (a,a)$, $v = (x,p)$, $w = (z,y)$; тогда функция $\Phi(v,w)$ принимает вид

$$\Phi(v,w) = (z,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + (x,p)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} - (a,a)\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

или $\Phi(v,w) = z^2 + y^2 - xy + pz - az - ay$. Функция $\Phi(v,w)$ относительно переменной минимизации w имеет сепарабельную структуру. Поэтому задача минимизации функции $\Phi(v,w)$ на Ω распадается на две независимые подзадачи с целевыми функциями вида

$$\begin{aligned} f_1(z,p) &= z(z+p-a), \\ f_2(x,y) &= y(-x+y-a). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь вектор $v = (x,p)$ играет роль параметра.

Положим $v = v^*$ и сформулируем игру двух лиц с равновесием по Нэшу

$$\begin{aligned} z^* &= \text{argmin}\{f_1(z,y^*) = z(z+y^*-a) \mid z \in \mathbb{R}^1\}, \\ y^* &= \text{argmin}\{f_2(z^*,y) = y(-z^*+y-a) \mid y \in \mathbb{R}^1\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Функция (4.3) для игры (4.5) является нормализованной. Нетрудно видеть, что это игра с ненулевой суммой, но условие (3.7) для нее выполнено, так как $\langle Mh, h\rangle \geq 0$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть на этот раз матрица M симметричная, но не положительно определенная, т.е.

$$\Phi(v,w) = (z,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + (x,p)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} - (a,a)\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Отсюда $\Phi(v,w) = z^2 + y^2 + xy + pz - az - ay$. Проведя рассуждения, аналогичные (4.3), (4.4), мы можем убедиться, что функция (4.6) является нормализованной для игры вида

$$\begin{aligned} z^* &= \operatorname{argmin}\{f_1(z,y^*) = z(z+y^*-a) \mid z \in [0,a]\}, \\ y^* &= \operatorname{argmin}\{f_2(z^*,y) = y(z^*+y-a) \mid y \in [0,a]\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $a > 0$.

Эта задача представляет собой фундаментальный пример модели поведения двух монополистов, производящих один и тот же товар и конкурирующих на одном и том же рынке (Дуополия Курно [10]). Пусть z и y — количество товара, производимое первым и вторым участниками соответственно. Если второй участник производит y^* единиц продукции, то первый участник в этом случае выбросит на рынок $z^* = \frac{1}{2}(a-y^*)$ единиц товара, которые минимизируют его функциональные издержки: $f_1(z,y^*) = z(z+y^*-a)$. Аналогичной стратегии поведения $y^* = \frac{1}{2}(a-z^*)$ придерживается второй участник, если ему известно, что первый игрок выбросил на рынок z^* единиц продукции. Неподвижной точкой равновесия дуополии является пара $z^* = \frac{1}{3}a$, $y^* = \frac{1}{3}a$. При этом издержки игроков равны $-\frac{a^2}{9}$. Условие (3.3) для этой задачи выполнено. Проверим это.

Пусть $w = v^* = (x^*,p^*)$, $v = w = (z,y)$; тогда (3.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &(x^*,p^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix} + (z,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix} - (a,a)\begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix} \le \\ \le \quad &(z,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + (z,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} - (a,a)\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда: $(x^*)^2 + (p^*)^2 + zp^* + yx^* - ax^* - ap^* \le z^2 + y^2 + 2zy - az - ay$. Так как $x^* = \frac{1}{3}a$ и $p^* = \frac{1}{3}a$, то $-\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{3}a(z+y) \le (z+y)^2 - a(z+y)$. Окончательно: $0 \le \left((z+y) - \frac{2}{3}a\right)^2$. Таким образом, условие (3.3) для игры (4.7) выполнено.

5. Градиентный метод прогнозного типа

Перейдем к обсуждению методов решения задачи (2.1). Сначала сделаем небольшое замечание. Представим неравенства (3.1) и (3.3) в форме

$$\Phi(w,v^*) - \Phi(w,w) \le \Phi(v^*,v^*) - \Phi(v^*,v^*) \le \Phi(v^*,w) - \Phi(v^*,v^*) \qquad \forall w \in D. \tag{5.1}$$

Введем функцию $\Psi(v,w) = \Phi(v,w) - \Phi(v,v)$ и с помощью этой функции систему неравенств (5.1) запишем в виде

$$\Psi(w,v^*) \le \Psi(v^*,v^*) \le \Psi(v^*,w) \qquad \forall w \in D. \tag{5.2}$$

Из этой системы неравенств следует, что точка v^*, v^* является седловой для функции $\Psi(v,w)$. Сразу же возникает вопрос: можно ли функцию $\Psi(v,w)$ использовать для вычисления седловой точки v^*, v^*, и тем самым — неподвижной точки v^*? Ответ очевиден сразу: вообще говоря — нет. Это связано с тем, что функция $\Psi(v,w)$ не является вогнутой по v, хотя и выпукла по w. Если все же попытаться построить методы для вычисления седла для $\Psi(v,w)$ [11], то эти методы должны содержать процедуру сдвига как по v, так и по w. В силу этого обстоятельства свойства сходимости метода будут плохие, так как по переменной v функция не вогнута. В методах, развиваемых в этой работе, предложен подход, в котором движение к равновесию (в частности, к седлу) происходит в результате пересчета итераций только по одной переменной w и при этом процесс монотонно (по норме пространства) сходится к равновесию в вырожденном случае.

Следуя привычной логике выпуклого программирования, введем функцию Лагранжа задачи (2.1)

$$L(v^*,w,p)=\Phi(v^*,w)+\langle p,g(w)\rangle,\qquad w\in\Omega,\quad p\geq 0.$$

В случае регулярности функциональных ограничений (например, выполнения условия Слейтера) эту задачу можно преобразовать в задачу вычисления седловой точки функции Лагранжа $L(v^*,w,p)$, т.е.

$$\Phi(v^*,v^*)+\langle p,g(v^*)\rangle\leq\Phi(v^*,v^*)+\langle p^*,g(v^*)\rangle\leq\Phi(v^*,w)+\langle p^*,g(w)\rangle \tag{5.3}$$

для всех $w\in\Omega$, $p\geq 0$.

Если $\Phi(v,w)$ и $g(w)$ — дифференцируемые функции, то (5.3) можно записать в эквивалентном виде

$$\begin{array}{rcl} v^* &=& \pi_\Omega(v^*-\alpha\nabla L_w(v^*,v^*,p^*)),\\ p^* &=& \pi_+(p^*+\alpha g(v^*)), \end{array} \tag{5.4}$$

где $\pi_+(\cdot)$, $\pi_\Omega(\cdot)$ — операторы проектирования на положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$ и множество Ω; $\nabla L_w(v,w,p)=\nabla\Phi_w(v,w)+\nabla g^\top(w)p$. Здесь $\nabla\Phi_w(v,w)$ — вектор-градиент функции $\Phi(v,w)$ относительно переменной w, $\nabla g^\top(v)$ — транспонированная матрица, в которой каждый столбец есть вектор-градиент соответствующей скалярной функции вектора $g(v)$.

Рассмотрим вычислительный процесс, на каждой итерации которого в качестве вспомогательной задачи осуществляются две операции проектирования на простое множество Ω. Этот метод относится к градиентным методам прогнозного типа [7]. Пусть v^0, p^0 — начальное приближение; тогда следующие можно вычислить по рекуррентным формулам

$$\begin{array}{rcl} \bar{p}^n &=& \pi_+(p^n+\alpha g(v^n)),\\ \bar{u}^n &=& \pi_\Omega(v^n-\alpha\nabla L_w(v^n,v^n,\bar{p}^n)),\\ v^{n+1} &=& \pi_\Omega(v^n-\alpha\nabla L_w(\bar{u}^n,\bar{u}^n,\bar{p}^n)),\\ p^{n+1} &=& \pi_+(p^n+\alpha g(\bar{u}^n)), \end{array} \tag{5.5}$$

где

$$L(v,w,p)=\Phi(v,w)+\langle p,g(w)\rangle,\qquad \nabla L_w(v,w,p)=\nabla\Phi_w(v,w)+\nabla g^\top(w)p.$$

Если осуществлять проектирование на множество $D=\{w\mid g(w)\leq 0,\ \ w\in\Omega\}$, то процесс (5.5) принимает вид [7]

$$\begin{array}{rcl} \bar{u}^n &=& \pi_D(v^n-\alpha\nabla\Phi_w(v^n,v^n)),\\ v^{n+1} &=& \pi_D(v^n-\alpha\nabla\Phi_w(\bar{u}^n,\bar{u}^n)). \end{array} \tag{5.6}$$

Ниже будет показано, что этот процесс сходится при условиях менее жестких, чем (5.5), а именно: для сходимости процесса (5.6) требуется выполнение условия (3.3), а для сходимости (5.5) требуется выполнение более жесткого условия (3.7) или (3.8).

Представим процесс (5.5) в форме вариационных неравенств. Первое и четвертое уравнения из (5.5) в соответствии с определением оператора проектирования запишем в виде
$$\langle \bar{p}^n - p^n - \alpha g(v^n), p - \bar{p}^n \rangle \geq 0 \qquad \forall p \geq 0, \tag{5.7}$$
и
$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha g(\bar{u}^n), p - p^{n+1} \rangle \geq 0 \qquad \forall p \geq 0. \tag{5.8}$$

Второе и третье уравнения представим в форме
$$\langle \bar{u}^n - v^n + \alpha \nabla L_w(v^n, v^n, \bar{p}^n), w - \bar{u}^n \rangle \geq 0 \qquad \forall w \in \Omega \tag{5.9}$$
и
$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha \nabla L_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n, \bar{p}^n), w - v^{n+1} \rangle \geq 0 \qquad \forall w \in \Omega. \tag{5.10}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что функции $\nabla \Phi_w(w, w)$, $\nabla g^\top(w)$ и $g(w)$ удовлетворяют условиям Липшица в форме
$$|\nabla \Phi_w(w+h, w+h) - \nabla \Phi_w(w, w)| \leq |\nabla \Phi|\,|h|, \tag{5.11}$$
$$|\nabla g^\top(w+h) - \nabla g^\top(w)| \leq |\nabla g^\top|\,|h|, \tag{5.12}$$
$$|g(w+h) - g(w)| \leq |g|\,|h| \tag{5.13}$$
для всех w, $w+h \in \Omega$, где $|\nabla\Phi|$, $|\nabla g^\top|$ и $|g|$ — константы Липшица.

Получим оценку отклонения векторов v^{n+1} и $\bar{u}^n$ друг от друга. Используя свойства оператора проектирования, оценки (5.11), (5.12), а также условия ограниченности $|p^n| \leq C$ из второго и третьего уравнения (5.5), имеем
$$\begin{aligned} &|v^{n+1} - \bar{u}^n| \leq \alpha |\nabla \Phi_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n) + \nabla g^\top(\bar{u}^n)\bar{p}^n - \nabla \Phi_w(v^n, v^n) - \nabla g^\top(v^n)\bar{p}^n| \leq \\ \leq\ & \alpha |\nabla \Phi_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n) - \nabla \Phi_w(v^n, v^n)| + \alpha |\nabla g^\top(\bar{u}^n)\bar{p}^n - \nabla g^\top(v^n)\bar{p}^n| \leq \\ \leq\ & \alpha |\nabla \Phi|\,|\bar{u}^n - v^n| + \alpha |\nabla g^\top|\,|\bar{p}^n|\,|\bar{u}^n - v^n| \leq \alpha(|\nabla\Phi| + |\nabla g^\top| C)|\bar{u}^n - v^n|. \end{aligned}$$

Отсюда имеем
$$|\bar{u}^n - v^{n+1}| \leq \alpha(|\nabla\Phi| + |\nabla g^\top| C)|\bar{u}^n - v^n|. \tag{5.14}$$

Выпишем также оценку отклонения двух векторов $\bar{p}^n$ и p^{n+1} друг от друга. Из (5.5) и (5.13) имеем
$$|\bar{p}^n - p^{n+1}| \leq \alpha |g|\,|\bar{u}^n - v^n|. \tag{5.15}$$

Покажем, что процесс (5.5) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, предполагая, что неравенство (3.8) выполняется на Ω, т.е. множестве более широком чем D. Поскольку последовательность v^n принадлежит Ω, то это условие не кажется очень обременительным.

Теорема 1. *Если множество решений задачи* (2.1) *не пусто и удовлетворяет условию* (3.7) *или* (3.8), *каждое из которых справедливо на множестве* Ω, *целевая функция* $\Phi(v, w)$ *непрерывна по* v *и выпукла по* w *при любом* $v \in \Omega$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — *выпуклое замкнутое множество, кроме того, функции* $\Phi(v, w)$ *и* $g(w)$ *удовлетворяют условиям* (5.11) – (5.13) *и* $|p^n| \leq C$, *то последовательность* v^n, *порожденная методом* (5.5) *с параметром* $0 < \alpha < \dfrac{1}{\sqrt{2((|\nabla\Phi| + |\nabla g^\top| C)^2 + |g|^2)}}$, *сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е.* $v^n \to v^* \in \Omega^*$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (5.10); тогда

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha\nabla L_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n, \bar{p}^n), v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{5.16}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha\langle\nabla L_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n, \bar{p}^n), v^* - \bar{u}^n\rangle - \\ - \quad &\alpha\langle\nabla L_w(v^n, v^n, \bar{p}^n) - \nabla L_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n, \bar{p}^n), \bar{u}^n - v^{n+1}\rangle + \\ + \quad &\alpha\langle\nabla L_w(v^n, v^n, \bar{p}^n), \bar{u}^n - v^{n+1}\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Учитывая неравенства выпуклости (3.6), преобразуем отдельно некоторые слагаемые в (5.17). Сначала оценим второе слагаемое

$$\begin{aligned} &\langle\nabla L_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n, \bar{p}^n), v^* - \bar{u}^n\rangle = \langle\nabla\Phi_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n) + \nabla g^\top(\bar{u}^n)\bar{p}^n, v^* - \bar{u}^n\rangle \leq \\ \leq \quad &\Phi(\bar{u}^n, v^*) - \Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n) + \langle\bar{p}^n, g(v^*) - g(\bar{u}^n)\rangle, \end{aligned}$$

а затем третье

$$\begin{aligned} &\langle\nabla L_w(v^n, v^n, \bar{p}^n) - \nabla L_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n, \bar{p}^n), \bar{u}^n - v^{n+1}\rangle = \\ = \quad &\langle\nabla\Phi_w(v^n, v^n) + \nabla g^\top(v^n)\bar{p}^n - \nabla\Phi_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n) - \nabla g^\top(\bar{u}^n)\bar{p}^n, \bar{u}^n - v^{n+1}\rangle = \\ = \quad &\langle\nabla\Phi_w(v^n, v^n) - \nabla\Phi_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n), \bar{u}^n - v^{n+1}\rangle + \langle(\nabla g^\top(v^n) - \nabla g^\top(\bar{u}^n))\bar{p}^n, \bar{u}^n - v^{n+1}\rangle = \\ = \quad &|\nabla\Phi|\,|v^n - \bar{u}^n|\,|\bar{u}^n - v^{n+1}| + |\nabla g^\top\,|v^n - \bar{u}^n|C|\bar{u}^n - v^{n+1}| \leq \\ \leq \quad &\alpha(|\nabla\Phi| + |\nabla g^\top|C)^2|\bar{u}^n - v^n|^2. \end{aligned}$$

С учетом проведенных преобразований представим (5.17) в виде

$$\begin{aligned} &\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha(\Phi(\bar{u}^n, v^*) - \Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n)) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(v^*) - g(\bar{u}^n)\rangle + \\ + \quad &\alpha^2(|\nabla\Phi| + |\nabla g^\top|C)^2|\bar{u}^n - v^n|^2 + \alpha\langle\nabla L_w(v^n, v^n, \bar{p}^n), \bar{u}^n - v^{n+1}\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Положим в неравенстве (5.9) $w = v^{n+1}$; тогда

$$\langle\bar{u}^n - v^n + \alpha\nabla L_w(v^n, v^n, \bar{p}^n), v^{n+1} - \bar{u}^n\rangle \geq 0. \tag{5.19}$$

Отсюда

$$\langle\bar{u}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{u}^n\rangle + \alpha\langle\nabla L_w(v^n, v^n, \bar{p}^n), v^{n+1} - \bar{u}^n\rangle \geq 0. \tag{5.20}$$

Сложим неравенства (5.18) и (5.20):

$$\begin{aligned} &\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha(\Phi(\bar{u}^n, v^*) - \Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n)) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(v^*) - g(\bar{u}^n)\rangle + \\ + \quad &\alpha^2(|\nabla\Phi| + |\nabla g^\top|C)^2|\bar{u}^n - v^n|^2 + \langle\bar{u}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{u}^n\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Положим в неравенстве (5.3) $w = \bar{u}^n$ и выпишем его в виде

$$\Phi(v^*, v^*) + \langle p^*, g(v^*)\rangle \leq \Phi(v^*, \bar{u}^n) + \langle p^*, g(\bar{u}^n)\rangle. \tag{5.22}$$

Сложим (5.21) и (5.22) и, учитывая (3.8), имеем

$$\begin{aligned} &\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle\bar{u}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{u}^n\rangle + \\ + \quad &\alpha\langle\bar{p}^n - p^*, g(v^*) - g(\bar{u}^n)\rangle + \alpha^2(|\nabla\Phi| + |\nabla g^\top|C)^2|\bar{u}^n - v^n|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Прервем цепочку наших рассуждений с тем, чтобы вернуться сюда позже, а сейчас проведем аналогичную последовательность выкладок относительно неравенств (5.7) и (5.8). Положим $p = p^*$ в (5.8):

$$\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle - \alpha\langle g(\bar{u}^n), p^* - p^{n+1}\rangle \geq 0 \tag{5.24}$$

и $p = p^{n+1}$ в (5.7):

$$\begin{aligned} &\langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n \rangle + \alpha \langle g(\bar{u}^n) - g(v^n), p^{n+1} - \bar{p}^n \rangle - \\ - \quad &\alpha \langle g(\bar{u}^n), p^{n+1} - \bar{p}^n \rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Второе слагаемое в неравенстве оценим с помощью (5.13) и (5.15), а затем неравенства (5.24) и (5.25) сложим

$$\begin{aligned} &\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1} \rangle + \langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n \rangle + \\ + \quad &\alpha^2 |g|^2 \, |\bar{u}^n - v^n|^2 - \alpha \langle g(\bar{u}^n), p^* - \bar{p}^n \rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Далее сложим (5.23) и (5.26). Учитывая, что $\langle \bar{p}^n, g(v^*) \rangle \leq 0$, $\langle p^*, g(v^*) \rangle = 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1} \rangle + \langle \bar{u}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{u}^n \rangle + \langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1} \rangle + \\ + \quad &\langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n \rangle + \alpha^2 \{ (|\nabla \Phi| + |\nabla g^\top| C)^2 + |g|^2 \} |\bar{u}^n - v^n|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Используя тождество

$$|x_1 - x_3|^2 = |x_1 - x_2|^2 + 2\langle x_1 - x_2, x_2 - x_3 \rangle + |x_2 - x_3|^2, \tag{5.28}$$

разложим скалярные произведения в левой части полученного неравенства на сумму квадратов:

$$\begin{aligned} &|v^{n+1} - v^*|^2 + |p^{n+1} - p^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 + d|\bar{u}^n - v^n|^2 + \\ + \quad &|p^{n+1} - \bar{p}^n|^2 + |\bar{p}^n - p^n|^2 \leq |v^n - v^*|^2 + |p^n - p^*|^2. \end{aligned} \tag{5.29}$$

По условиям теоремы величина $d = 1 - 2\alpha^2 \{ (|\nabla \Phi| + |\nabla g^\top| C)^2 + |g|^2 \} > 0$. Просуммируем неравенство (5.29) от $n = 0$ до $n = N$:

$$\begin{aligned} &|v^{N+1} - v^*|^2 + |p^{N+1} - p^*|^2 + \sum_{k=0}^{k=N} |v^{k+1} - \bar{u}^k|^2 + d \sum_{k=0}^{k=N} |\bar{u}^k - v^k|^2 + \\ + \quad &\sum_{k=0}^{k=N} |p^{k+1} - \bar{p}^k|^2 + \sum_{k=0}^{k=N} |\bar{p}^k - p^k|^2 \leq |v^0 - v^*|^2 + |p^0 - p^*|^2. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории:

$$|v^{N+1} - v^*|^2 + |p^{N+1} - p^*|^2 \leq |v^0 - v^*|^2 + |p^0 - p^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v^{k+1} - \bar{u}^k|^2 < \infty, \;\; \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{u}^k - v^k|^2 < \infty, \;\; \sum_{k=0}^{\infty} |p^{k+1} - \bar{p}^k|^2 < \infty, \;\; \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{p}^k - p^k|^2 < \infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 \to 0, \quad |\bar{u}^n - v^n|^2 \to 0, \quad |p^{n+1} - \bar{p}^n|^2 \to 0, \quad |\bar{p}^n - p^n|^2 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Так как последовательность v^n, p^n ограничена, то существует элемент v', p' такой, что $v^{n_i} \to v'$, $p^{n_i} \to p'$ при $n_i \to \infty$ и при этом

$$|v^{n_i+1} - \bar{u}^{n_i}|^2 \to 0, \quad |\bar{u}^{n_i} - v^{n_i}|^2 \to 0, \quad |p^{n_i+1} - \bar{p}^{n_i}|^2 \to 0, \quad |\bar{p}^{n_i} - p^{n_i}|^2 \to 0.$$

Перейдя к пределу в (5.5), для всех $n_i \to \infty$ получим:

$$v' = \pi_\Omega(v' - \alpha \nabla L_w(v', v', p')), \qquad p' = \pi_+(p' + \alpha g(v')).$$

Поскольку эти соотношения совпадают с (5.4), то $v' = v^* \in \Omega^*$, $p' = p^* \geq 0$, т.е. любая предельная точка последовательности v^n, p^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n - v^*| + |p^n - p^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n \to v^*$, $p^n \to p^*$ при $n \to \infty$. $\square$

6. Экономическая интерпретация

Рассмотрим сначала экономическую интерпретацию равновесной задачи, а затем прогнозный метод ее решения. Чтобы иметь возможность рассуждать в удобных терминах прибыли и издержек производства, будем считать, что целевая функция и функциональные ограничения в (2.1) вогнутые, т.е.

$$v^* \in \mathrm{Argmax}\{\Phi(v^*, w) \mid g(v^*, w) \geq b,\ \ w \in \Omega\}, \tag{6.1}$$

где $b \geq 0$. Эта задача представляет собой модель взаимодействия двух участников, одного из которых будем называть управляющий орган или просто управление, а другого — производство. Пусть $v \in \Omega$ — набор альтернатив первого участника, а $w \in \in \Omega$ — второго. Ход первого участника состоит в выборе альтернативы $v \in \Omega$, которую можно рассматривать как план, плановое задание или управляющее воздействие на производство. Реакция производства на ход первого игрока всегда однозначна и состоит в предъявлении множества решений задачи (6.1). Это множество представляет собой совокупность (которая может состоять из одной точки) оптимальных планов производства, причем целевая функция $\Phi(v, w)$ при фиксированном v максимизирует доход или прибыль от реализации продукции этого плана. Производству выгодна реализация одного из своих оптимальных планов и, соответственно, невыгодна реализация того плана, что предложило управление. Разрешение конфликта состоит в выборе первым участником такого управления, которое совпадает с оптимальным планом производства. Формально это неподвижная точка задачи (6.1).

В этой задаче целевая функция производства $\Phi(v, w)$ зависит от параметра $v \in \Omega$, которым управляет планирующий орган. Если $v = v^0 \in \Omega$ фиксировано, то, меняя планы производства $w \in \Omega$, мы получаем различную прибыль. В этой ситуации нормальная реакция производства — максимизировать свой доход. Если же, наоборот, уровень производства фиксирован $w = w^0 \in \Omega$, то планирующий орган, меняя управляющий параметр $v \in \Omega$, изменяет уровень прибыли производства. Возможность планирующего органа управлять прибылью производства мы будем интерпретировать как налог на производство или отчисления в пользу планирующего органа. В этой ситуации любые значения функции $\Phi(v, w)$ на диагонали квадрата $\Omega \times \Omega$ естественно рассматривать как цену (или стоимость) компромисса, поскольку все равновесные решения лежат на этой диагонали.

В этих представлениях неравенства (3.1) и (3.3) имеют следующий экономический смысл. В терминах задачи (6.1) неравенство (3.1)

$$\Phi(v^*, v^*) \geq \Phi(v^*, w) \qquad \forall w \in \Omega$$

означает, что в равновесном состоянии производству невыгодно отклонятся от своего оптимального плана. Соответственно, неравенство (3.3)

$$\Phi(w, v^*) \geq \Phi(w, w) \qquad \forall w \in \Omega$$

означает, что в равновесном состоянии налог на производство не должен быть слишком большим, а именно: оставшаяся после отчисления налога прибыль должна быть не ниже цены компромисса. Выполнение этого условия придает экономической системе устойчивый характер (асимптотическая устойчивость).

В этой схеме взаимодействия двух участников не учитываются интересы третьего, называемого рынком. Формально третьего участника введем в игру с помощью функции Лагранжа

$$L(v,w,p)=\Phi(v,w)+\langle p,g(w)-b\rangle \qquad \forall v,w\in\Omega\times\Omega,\ \forall p\geq 0. \tag{6.2}$$

Рынок воздействует на экономическую систему с помощью цен $p\geq 0$. Именно по этим ценам производство покупает на рынке m видов ресурсов $g(w)$ с учетом имеющегося наличного запаса, который описывается вектором b. Если $g_i(w)>b_i$ для некоторого $i=1,2,\dots,m$, то после реализации плана w остаются излишки ресурсов, если же $g_i(w)<b_i$, $i=1,2,\dots,m$, то первоначального количества ресурсов явно недостаточно, и чтобы реализовать план w, необходимо закупить недостающие виды ресурсов. Каждое слагаемое вида $p_i(g_i(w)-b_i)$ в функции Лагранжа в зависимости от знака будет означать дополнительную прибыль от продажи излишков ресурсов или, наоборот, затраты на покупку недостающих ресурсов. Функция Лагранжа представляет собой суммарную прибыль, которая включает в себя доход от продажи конечной продукции $\Phi(v,w)$ и либо дополнительную прибыль от продажи излишков ресурсов, либо расходы для их закупок. Если рынок задал некоторый уровень цен, то производство, реагируя на это так же, как и в случае заданного управляющего воздействия, стремится максимизировать свою суммарную прибыль, т.е. функцию Лагранжа [12].

Рынок извлекает свою прибыль от продажи ресурсов производству при условии, что последний при заданном управлении $v\in\Omega$ выбрал свой оптимальный план $w\in\Omega$. Чтобы получить максимальную прибыль, рынок, варьируя цены $p\geq 0$, минимизирует функцию Лагранжа по ценам: $\min\{L(v,w,p)\mid p\geq 0\}$. Если существует седловая точка w^*,p^* для некоторого $v\in\Omega$, то имеет место конкурентное равновесие

$$\min_{p\geq 0}L(v,w^*p)=\max_{w\in\Omega}L(v,w,p^*).$$

Это соотношение обеспечивает равенство интересов производства и рынка. Чтобы обеспечить полный баланс интересов участников экономической системы, необходимо совпадение планов управления и производства с учетом рыночной конъюнктуры.

Метод (5.5), описанный в этой работе, представляет собой механизм согласования частично противоречивых интересов участников экономической системы. Этот метод можно рассматривать как многоходовую игру с повторяющимися ходами градиентного типа. Поскольку производство и рынок делают ходы одного и того же вида, то они легко прогнозируются планирующим органом. Итак, пусть на n-ом шаге состояние экономической системы известно и описывается вектором объемов производства и цен v^n, p^n. На следующем шаге планирование делает прогноз цен и по формулам (5.5) (первая строка) вычисляет вектор $\bar{p}^n$, затем с учетом прогнозных цен вычисляет прогнозные объемы производства $\bar{u}^n$ и, рассматривая их как плановые задания, предъявляет производству. Затем производство реализует плановые задания и вычисляет реальный вектор объемов продукции по формулам

$$v^{n+1}=\pi_\Omega(v^n-\alpha\nabla L_w(\bar{u}^n,v^n,\bar{p}^n)).$$

Можно ожидать, что эффективность этого шага будет несколько выше, если производство в своих действиях будет исходить не из реального вектора объемов v^n, а из прогнозируемого $\bar{u}^n$. Именно этот вариант и реализован в формулах (5.5) (третья строка). В качестве завершающего этапа $(n+1)$-й итерации рынок, используя реальные v^{n+1} или прогнозируемые $\bar{u}^n$ объемы производства, вычисляет свой реальный вектор цен p^{n+1}. Стратегия поведения управления, основанная на прогнозах, эффективна, так как с ростом числа ходов процесс игры сходится к равновесному состоянию экономической системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.

2. *Nikaido H., Isoda K.* Note on noncooperative convex game // Pacific J. Math. 1955. V. 5. Suppl. 1. C. 807–815.

3. *Венец В.И.* Непрерывный алгоритм поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций // АиТ. 1984. No.1. С. 42–47.

4. *Антипин А.С.* Обратная задача оптимизации: постановка задачи и подходы к ее решению // Обратные задачи математического программирования. М.: ВЦ РАН, 1992. С. 4–58.

5. *Fan Ky.* A minimax inequality and applications // Inequalities III. Shisha Ed., Academic Press. 1972. P. 103–113.

6. *Антипин А.С.* О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1995. Т. 35. No.5. С. 688–704.

7. *Антипин А.С.* Вычисление неподвижных точек экстремальных отображений с помощью методов градиентного типа // Журнал вычисл. мат. и мат.физ. 1997. Т. 37. No. 1. С. 42–53.

8. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

9. *Антипин А.С.* Седловые градиентные процессы, управляемые с помощью обратных связей // АиТ. 1994. No. 3. С. 12–23.

10. *Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения М.: Мир, 1988.

11. *Антипин А.С.* Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. No. 11. С. 1846–1861.

12. *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.* Модифицированные функции Лагранжа. М.: Наука, 1989.