На правах рукописи

Мокряков Алексей Викторович

2-МЕРНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ПОЛНОСТЬЮ ОПИСЫВАЕМЫЕ СТЕПЕНЯМИ СВОИХ ВЕРШИН

Специальность: 01.01.09

Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико–математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика» факультета №5 «Прикладная математика, механика и информатика» «МАТИ» – Российского государственного технологического университета имени К.Э.Циолковского.

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук, профессор Цурков В. И.

Официальные оппоненты:
Доктор физико-математических наук, профессор Лазарев А. А.
Кандидат физико-математических наук, профессор Фуругян М. Г.

Ведущая организация:
Учреждение Российской академии наук Институт системного анализа

Защита состоится __ __________ 201_ г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 002.017.02 при Учреждении Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН по адресу: Москва, улица Вавилова, дом 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Российской академии наук

Автореферат разослан __ ноября 2010 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 002.017.02, д. ф.-м. н., профессор В. В. Рязанов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Актуальность темы. К рассматриваемым многоиндексным моделям и задачам большой размерности применяются методы теории графов и некоторые понятия из комбинаторной топологии. Отметим, что в некоторых публикациях рассматриваемые объекты называются гиперграфами. Но мы придерживаемся здесь понятия комплекса, так как гиперграф – это более общее понятие.

В настоящее время методы теории графов широко востребованы в различных областях человеческой деятельности. К ним относятся не только математика и традиционные приложения в электротехнике и химии, но и экономика, социология, генетика, информатика и т. д. Для графа с заданными количественными соотношениями для вершин и рёбер часто используется понятие сеть. Сетевые структуры широко проникли в наше общество. Компьютерные и социальные сети, водопровод и электросеть, транспортные сети и сети связи. Из перечисленного видно, что многие понятия теории графов имеют непосредственное отношение ко многим задачам науки и техники. Новые же задачи теории графов постоянно возникают при решении практических и теоретических задач.

Результаты работы относятся также и к комбинаторной топологии. Комбинаторная топология изучает геометрические фигуры, разбивая их некоторым правильным образом на простейшие фигуры – симплексы. Те геометрические фигуры, которые можно надлежащим образом разбить на симплексы, называются полиэдрами, а сама схема разбиения на симплексы называется комплексом. Поэтому характеризация комплексов наборами целых неотрицательных чисел есть важная задача, решение которой может иметь приложения в комбинаторной топологии.

К важнейшим задачам прикладной математики относятся многоиндексные задачи большой размерности. Многие дискретные двухиндексные задачи решаются применением методов теории графов. Актуальным является распространение этих методов, а также методов теории многомерных комплексов, на многоиндексные задачи. Отметим, что к рассматриваемым задачам относятся многоиндексные транспортные модели. Существенной также является задача выделения класса комплексов (многоиндексных бинарных матриц), в котором каждый комплекс взаимно одозначно описывается набором целых неотрицательных чисел.

Цели работы.

1) Построение редукционного критерия реализуемости наборов целых неотрицательных чисел в виде степеней вершин 2-комплекса, обобщающий алгоритмы Хакими и Миронова о реализуемости наборов чисел в графы.

2) Построение редукционного критерия реализуемости наборов целых неотрицательных чисел в единственный k-комплекс.

3) Вывод аналитических формул, справедливость которых есть необходимое и достаточное условие реализуемости набора целых неотрицательных чисел в единственный 2-комплекс.

4) Создание алгебраической структуры – дистрибутивной решётки на множествах n-вершинных k-комплексов, являющихся единственными реализациями наборов целых неотрицательных чисел, упорядоченных по невозрастанию.

5) Получение редукционного критерия реализуемости набора целых неотрицательных чисел для двумерных (трёхиндексных) моделей, когда вершины комплексов принадлежат двум или трём различным множествам. Последний случай относится к задачам транспортного типа.

Научная новизна. Впервые получены необходимые и достаточные условия, при которых для заданного набора целых неотрицательных чисел существует 2-комплекс такой, что степени его вершин (степень вершины – это количество 2-мерных симплексов, инцидентных 0-мерному симплексу) равны числам из этого набора. Для набора целых неотрицательных чисел построены критерии о реализуемости в единственный k-комплекс. Один из этих критериев описан на языке многоиндексных бинарных матриц, другой описан на языке частично упорядоченных множеств. На классе таких k-комплексов (полностью описываемых степенями своих вершин) создана алгебраическая структура дистрибутивной решётки.

Практическая ценность результатов. Построены алгоритмы и программы, реализующие теоретический материал, и результаты работы имеют приложения в многоиндексных задачах большой размерности, а также в комбинаторной топологии (теории комплексов).

Апробация результатов работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на трёх международных молодёжных научных конференциях: XXXI, XXXII и XXXIII «Гагаринские чтения».

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 печатных работах.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 24 наименования. Общий объём работы – 105 страниц.

СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Под реализуемостью в граф подразумевается следующее: набор целых неотрицательных чисел $\mathbf{A} = (a_i, ..., a_n)$ реализуем в граф, если существует граф $G = G(\mathbf{A})$ с множеством вершин $U(n) = (u_1, ..., u_n)$ такой, что степень вершины u_i равна a_i ($\deg u_i = a_i$) полагаем, что $k \geq 2$ и $a_i \geq a_{i+1}$ при $1 \leq i \leq k-1$.

Пусть $F(0)$ – количество нулевых элементов набора $\mathbf{A} = (a_i, ..., a_n)$ и $a_1 \leq k - 1 - F(0)$. Построим набор $\mathbf{A}'$ следующим образом: удалим из набора $\mathbf{A}$ элемент a_1, у первых a_1 оставшихся чисел отнимем по единице и получившийся набор чисел упорядочим по невозрастанию. Набор чисел $\mathbf{A}'$ называется редукционным, а процесс перехода от набора $\mathbf{A}$ к набору $\mathbf{A}'$ называется редукционным шагом. Далее, набор чисел $\mathbf{A}$ называется приводимым, если $a_1 \leq n - 1 - F(0)$.

Теорема (Хакими). *Набор целых неотрицательных чисел* $\mathbf{A} = (a_i, ..., a_n)$ *реализуем в граф тогда и только тогда, когда он приводим и каждый набор, получившийся из набора* $\mathbf{A}$ *при последовательных редукционных шагах, также приводим.*

А. А. Мироновым редукционный алгоритм был изменён таким образом, что вместо первой координаты стало возможным использовать любую координату вектора $\mathbf{A}$. Это позволило производить построение всех возможных графов для данного набора чисел.

Особый интерес представляют наборы целых неотрицательных чисел, упорядоченных по невозрастанию, реализуемых в единственный 2-комплекс, и реализации этих наборов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

<u>Во введении</u> обоснованы актуальность и практическая значимость темы, определены цели работы, представлена структура диссертации, отмечена научная новизна полученных результатов.

<u>В первой главе</u> вводятся основные понятия: k-комплексы, реализуемость вектора в k-комплекс, матрица смежности k-комплекса. Анализируются простейшие свойства рассматриваемых объектов. Также приводится подробный план дальнейшей работы.

k-мерный комплекс (k-комплекс) $G^k = G^k\left(U(n), S = S\left(G^k\right)\right)$ состоит из множества вершин $U(n) = \{u_1, ..., u_n\}$, где $n \geq k+1$, и множества k-мерных симплексов $S = S\left(G^k\right)$, каждый из которых будем отождествлять с подмножеством вершин $\left\{u_{i_j} : 1 \leq j \leq k+1\right\} \subseteq U(n)$, задающих этот симплекс. Очевидно, что $|S| \leq C_n^{k+1}$. Введём обозначение степени вершины u_l комплекса $G^k = G^k\left(U(n), S\left(G^k\right)\right)$: $\deg u_l = \left|\left\{u_l, u_{i_1}, ..., u_{i_k}\right\} \in S\left(G^k\right)\right|$ – количество k-мерных симплексов k-комплекса G^k инцидентных вершине u_l.

<u>В второй главе</u> исследуются двумерные комплексы (2-комплексы) в которых каждый 1-мерный симплекс есть грань 2-мерного симплекса. Распространяется понятие реализуемости набора целых неотрицательных чисел в граф на случай 2-комплекса. Для 2-комплекса степень вершины (0-мерного симплекса) – это количество симплексов размерности два, инцидентых этой вершине. Набор целых неотрицательных чисел называется реализуемым в 2-комплекс, если существует комплекс, степени вершин которого – это исходный набор чисел, при этом сам комплекс называется реализацией этого набора чисел.

Двумерный комплекс (2-комплекс) состоит из множества вершин $U(n) = \{u_1, ..., u_n\}$, где $n \geq 3$, и множества $S = S(G)$ неупорядоченных троек различных вершин из $U(n)$ (2-мерных симплексов).

Обозначим $S_n = \{(u_i, u_j, u_k) : 1 \leq i < j < k \leq n\}$ – множество всех троек из $U(n)$. Степенью вершины u_i комплекса $G = G(U(n), S)$ называется $\deg u_i =$ $= |\{(u_i, u_j, u_k) \in S(G) : \forall j, k\}|$ – количество троек 2-комплекса G инцидентных вершине u_i.

Обозначим $Z_+^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in Z, a_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Вектор $\mathbf{A} \in Z_+^n$ называется *реализуемым* в 2-комплекс степенями вершин, если $\exists G = G(\mathbf{A}) = G(U(n), S)$ такой, что $\deg u_i = a_i$, $1 \leq i \leq n$ и $G(\mathbf{A})$ называется *реализацией* вектора $\mathbf{A}$.

Заметим: если $\mathbf{A}$ – нулевой вектор, то его единственной реализацией является 0-мерный комплекс $G(\mathbf{A})$.

Обозначим через $\Gamma(\mathbf{A}) = \{G(\mathbf{A}) = G(U(n), S)\}$ – множество всех реализаций вектора $\mathbf{A}$ в 2-комплекс. Очевидно: если $\mathbf{A} \in Z_+^n$ и $\Gamma(\mathbf{A}) \neq \varnothing$, то а) $|S| \le C_n^3$; б) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 3q$, где $q \in Z$, и $|S| = q$; в) $\max_{1\le i\le n} a_i \le C_{n-1}^2$; г) $3\max_{1\le i\le n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Вектор $\mathbf{B} \in Z_+^n$ назывется *вписанным* в вектор $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} \le \mathbf{A}$), если $b_i \le a_i \ \ \forall i$. Для вектора $\mathbf{A}$ из Z_+^n введём обозначение множества вписанных в $\mathbf{A}$ векторов, реализованных в граф: $M(\mathbf{A}) = \{\mathbf{B} \in Z_+^n : \ \mathbf{B} \le \mathbf{A}$, существует граф – реализация вектора $\mathbf{B}\}$. Для $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_n)$ положим $\mathbf{A}(n) = (a_1, \dots, a_{n-1})$.

В дальнейшем координаты рассматриваемых векторов будут упорядочены по невозрастанию: $\overline{Z}_+^n = \{\mathbf{A} \in Z_+^n, a_{i+1} \le a_i, 1 \le i \le n-1\}$.

Вектор $\mathbf{A}$ из $\overline{Z}_+^n$, $n \ge 4$, называется *приводимым*, если $a_n \le \max\limits_{\mathbf{D}\in M(\mathbf{A}(n))} \sum_{i=1}^{n-1} d_i \Big/ 2$; для случая $n = 3$ приводимыми называются вектора $(1,1,1)$ и $(0,0,0)$.

Лемма 2.1. *Если вектор* $\mathbf{A}$ *из* Z_+^n *реализуем в 2-комплекс, то* $\mathbf{A}$ *– приводим.*

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– приводимый вектор из* Z_+^n *где* $n \ge 4$. *Тогда существует* $\mathbf{A}' = (a_1', \dots, a_{n-1}') \in Z_+^{n-1}$, *для которого вектор* $\mathbf{B} = (b_1, \dots, b_{n-1}) = \mathbf{A}(1) - \mathbf{A}' = (a_i^{(1)} - a_i' : 1 \le i \le n-1) \in Z_+^{n-1}$ *реализуем в 2-комплекс, количество 2-мерных симплексов которого равно* a_i $\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i^{(1)} - a_i'\right)\right)\Big/ 2 = a_i\right)$.

Вектор $\mathbf{A}'$, построенный в лемме 1.2, называется *редукционным*, а переход от вектора $\mathbf{A} \in \overline{Z}_+^n$ к $\mathbf{A}'$, где $n \ge 4$, называется *редукционным шагом*. Если редукционный вектор $\mathbf{A}'$ приводим, то для него можно построить редукционный вектор $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}''$. Пусть на k-ом редукционном шаге построен вектор $\mathbf{A}^{(k)}$. Если он приводим, то можно построить редукционный вектор $(\mathbf{A}^{(k)})' = \mathbf{A}^{(k+1)}$.

Теорема 2.1. *Вектор* $\mathbf{A} \in \overline{Z}_+^n$, *где* $n \ge 4$, *реализуем в 2-комплекс, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *приводим и существует приводимый редукционный вектор* $\mathbf{A}'$, *а также существует последовательность приводимых редукционных векторов* $\mathbf{A}^{(k)}$ *на каждом* k*-редукционном шаге, где* $1 \le k \le n-3$.

Редукционный алгоритм является не только критерием реализуемости, но и в случае реализуемости строит все сиплексы 2-комплекса, то есть сам 2-комплекс. Но для того, чтобы построить все возможные реализация заданного вектора, необходимого видоизменить редукционный алгоритм.

Для $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_n)$ положим $\mathbf{A}(k) = \left(a_1^{(k)}, \dots, a_{n-1}^{(k)}\right)$, где $a_i^{(k)} = a_i$ при $i < k$ и

$a_i^{(k)} = a_{i+1}$ при $k \le i \le n-1$. Вектор $\mathbf{A}$ из $\overline{Z}_+^n$, $n \ge 4$, называется $k-$*приводимым*, если $a_k \le \max\limits_{\mathbf{D} \in M(\mathbf{A}(k))} \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i \Big/ 2.$

Лемма 2.3. *Если вектор* $\mathbf{A}$ *из* Z_+^n *реализуем в 2-комплекс, то* $\mathbf{A}$ – $k-$*приводим, при* $1 \le k \le n$.

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathbf{A}$ – $k-$*приводимый вектор из* Z_+^n *где* $n \ge 4$. *Тогда существует* $\mathbf{A}' = (a_1', ..., a_{n-1}') \in Z_+^{n-1}$, *для которого вектор* $\mathbf{B} = \mathbf{A}(k) - \mathbf{A}' = (a_i^{(k)} - a_i' : 1 \le i \le n-1) \in Z_+^{n-1}$ *реализуем в граф, количество рёбер которого равно* a_i $\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(a_i^{(k)} - a_i'\right) \right) \Big/ 2 = a_i \right)$.

Во третьей главе главное внимание уделяется наборам целых неотрицательных чисел, упорядоченных по невозрастанию, которые реализуемы в единственный 2-комплекс степенями вершин. Такие наборы чисел называется экстремальными, а сам 2-комплекс – реализация, называется экстремальным.

В данной главе построены необходимые и достаточные условия, при которых 2-комплекс – экстремален. Одно из этих условий сформулировано на языке кубических (трёхиндексных) матриц смежности 2-комплекса а другое основано на введении частичного порядка на множестве, состоящем из троек индексов.

Каждый 2-комплекс $G = G(U(n), S(G))$ будем отождествлять с кубической матрицей смежности: $G = (x_{ijk})$, где $1 \le i, j, k \le n : x_{ijk} = 1 \Leftrightarrow (u_i, u_j, u_k) \in S(G)$. Т. к. в двойной сумме участвуют две эквивалентные тройки (u_i, u_j, u_k) и (u_i, u_k, u_j), то

$$\deg u_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} x_{ijk}, \ 1 \le i \le n.$$

Отметим, если зафиксировать один из индексов этой кубической матрицы, то получим квадратную матрицу, при удалении из которой нулевых строк и столбцов, образуется матрица смежности экстремального графа. Экстремальным называется набор целых неотрицательных чисел, упорядоченных по невозрастанию, реализуемый в единственный граф, а сам граф – реализация называется экстремальным.

Понятие экстремальности вектора и 2-комплекса можно выразить с помощью кубической матрицы смежности.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{A} \in \overline{Z}_+^n$ *и* $\Gamma(\mathbf{A}) \ne \varnothing$. *Вектор* $\mathbf{A}$ *и комплекс* $G(\mathbf{A}) = G(U(n), S(G)) = (x_{ijk})$ *являются экстремальными тогда и только тогда, когда* *а) из* $x_{ijk}=1$ *следует* $x_{pql}=1$ *для* $\forall p,q,l$*, где* $(u_p,u_q,u_l)\in S(G)$ *и* $p\le i$, $q\le j$, $l\le k$*;*

б) из $x_{ijk}=0$ *следует* $x_{pql}=0$ *для* $\forall p,q,l$*, где* $p\ge i, q\ge j, l\ge k$.

Другой критерий экстремальности 2-комплекса – алгебраический. Он основан на введении частичного порядка на множестве троек индексов, исследумого 2-комплекса.

Для элементов множества троек $S_n=\{(u_i,u_j,u_k):1\le i<j<k\le n\}$ установим отношение частичного порядка следующим образом: положим $(u_i,u_j,u_k)\le$ $\le(u_p,u_q,u_l)$, при $i\le p$, $j\le q$, $k\le l$, причём $(u_i,u_j,u_k)<(u_p,u_q,u_l)$, если $(u_i,u_j,u_k)\ne(u_p,u_q,u_l)$.

Теорема 3.2. *2-комплекс* $G=G(U(n),S(G))$ *есть экстремальный тогда и только тогда, когда приведённое выше отношение частичного порядка для элементов из* S_n *индуцирует частичный порядок на* $S(G)$.

Отметим, что эти критерии экстремальности будут распространены в четвёртой главе на k – мерный комплекс.

Пусть $\mathbf{A}\in\overline{Z}_+^n$, где $n\ge 4$, и $G=G(U(n),S(G))$ – экстремальный 2-комплекс. Тогда множество троек $\{(u_1,u_j,u_k):2\le j<k\le n\}\subseteq S(G)$ определено однозначно (причём количество таких троек равно a_1). Это значит, что для кубической матрицы смежности комплекса $G(\mathbf{A})$ однозначно определены все элементы x_{1jk}, $1\le j,k\le n$, которые задают матрицу смежности экстремального графа. Следовательно, для вектора $\mathbf{A}$ существует единственный редукционный вектор.

Приводимый вектор $\mathbf{A}$ из $\overline{Z}_+^n$, где $n\ge 4$, называется *строго приводимым*, если существует единственный редукционный вектор $\mathbf{A}'$.

Теорема 3.3. *Вектор* $\mathbf{A}$ *из* $\overline{Z}_+^n$*, где* $n\ge 4$*, является экстремальным тогда и только тогда, когда вектор* $\mathbf{A}$ *– строго приводим, редукционный вектор* $\mathbf{A}'$ *– строго приводим, а также строго приводим каждый редукционный вектор* $\mathbf{A}^{(k)}$*, построенный на каждом* k*-редукционном шаге, где* $1\le k\le n-3$.

Рассмотрим строго приводимый вектор $\mathbf{A}\in\overline{Z}_+^n$. Из строгой приводимости следует, что разность векторов $\mathbf{B}=\mathbf{A}(1)-\mathbf{A}'$ задаёт единственный 2-комплекс (который, конечно, экстремален), причём $\sum_{i=1}^{n-1}b_i=\max_{\mathbf{D}\in M(\mathbf{A}(1))}\sum_{i=1}^{n-1}d_i\Big/2=a_1$.

Построим аналитические формулы, зависящие от координат вектора $\mathbf{A}$, определяющие строгую приводимость указанного вектора. Для этого приведём одно из описаний (экстремального) вектора, реализуемого в (единственный) граф степенями вершин.

Пусть $f_1 > f_2 > ... > f_s$ – все различные координаты вектора $\mathbf{D} = (d_1, ..., d_n)$ из $\overline{Z}_+^n$, где $n \geq 2$, и F_k – количество координат вектора $\mathbf{D}$, равных f_k, $1 \leq k \leq s$. Не ограничивая общности будем предполагать, что $d_n = f_s > 0$. Вектор $\mathbf{D}$ реализуем в единственный граф тогда и только тогда, когда $f_k = \sum_{i=1}^{s-k+1} F_i - \Delta, \quad 1 \leq k \leq s,$ где $\Delta = 1$ при $1 \leq k \leq]s/2[$ и $\Delta = 0$ при $]s/2[< k \leq s$ (если $a \in Z$ и $a \geq 0$, то $]a/2[= a/2$ при $a/2 \in Z$ и $]a/2[= (a+1)/2$ при $a/2 \notin Z$).

Вектор $\mathbf{A}$ из $\overline{Z}_+^n$ задаёт функцию $f(x) = a_i$, $i-1 \leq x < i$, $1 \leq i \leq n$. Рассмотрим уравнение $f(x) = x - 1$. Если оно имеет решение k^*, то очевидно, что $k^* \in Z$ и $k^* \geq 1$. В случае, когда $k^* = n-1$ или уравнение не имеет решения, имеет место $a_n \geq n-2$. В этом случае вектор $(n-2, ..., n-2)$ из $\overline{Z}_+^n$ вписан в вектор $\mathbf{A}(1)$ и определяет единственный (полный) граф с $n-1$ вершинами, который экстремален и соответствует f_k при $s = 1$.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathbf{A} \in \overline{Z}_+^n$ *и* $a_n \geq n-2$. *Вектор* $\mathbf{A}$ *строго приводим тогда и только тогда, когда* $a_1 = C_{n-1}^2$.

Рассмотрим нетривиальный случай $k^* \leq n-2$ (то есть $a_n \leq n-3$) и $\varphi_1 > > \varphi_2 > ... > \varphi_s$ – все различные координаты вектора $\mathbf{A}(1) = (a_2, ..., a_n)$, причём ψ_k – количество координат, равных φ_k, $1 \leq k \leq s$. Найдётся такое $t \in Z$, что $a_{k^*} = \varphi_t$. Будем строить вектор $\mathbf{D} = (d_2, ..., d_n)$, реализуемый в единственный граф. Для этого нам понадобятся значения φ_k и ψ_k при $t \leq k \leq s$. Пусть $k^* - 1 - \sum_{i=t+2}^{s} \varphi_i \geq \varphi_t$.

Положим $\varphi_{s+1} = 0$, $F_0 = 1$ и $F_k = \varphi_{s-k+1} - \varphi_{s-k+2}$, $1 \leq k \leq s-t+1$.

Обозначив $F_k = \psi_k$ при $t+1 \leq k \leq s$, положим

$$d_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s-k} F_j - 1, & \sum_{j=0}^{k} F_j + 1 \leq i < \sum_{j=0}^{k+1} F_j + 1, \quad 0 \leq k \leq s-t+1, \\ a_i, & \sum_{j=0}^{s-t+1} F_j + 1 < i \leq n. \end{cases}$$

Из этого следует, что вектор $\mathbf{D} = (d_2,...,d_n)$ есть экстремальный.

Лемма 3.2. *Если вектор* $\mathbf{D} = (d_2,...,d_n)$ *вписан в вектор* $\mathbf{A}(1) = (a_2,...,a_n)$ $(\mathbf{D} \le \mathbf{A}(1))$*, то имеет место* $\sum_{i=2}^{n} d_i = \max_{\mathbf{E} \in M(\mathbf{A}(1))} \sum_{i=2}^{n} e_i$*, где* $\mathbf{E} = (e_2,...,e_n)$.

Введём ещё один параметр $\mathrm{H} = C_{k^*-1}^2 + \sum_{i=0}^{s-t} \left((\varphi_{s-i} - \varphi_{s-i+1}) \cdot \left(\sum_{j=0}^{s-i} F_j - k^* \right) \right)$.

Лемма 3.3. *Для вектора* $\mathbf{D}$ *из (4) имеет место* $H = \sum_{i=2}^{n} d_i \Big/ 2$.

Определим строгую приводимость вектора вышеприведёнными формулами. Из лемм 3.1. – 3.3 следует

Теорема 3.4. *Пусть* $\mathbf{A} \in \overline{Z}_+^n$*, где* $n \ge 4$*, и* $a_n > 0$*. Вектор* $\mathbf{A}$ *есть строго приводимый тогда и только тогда, когда* $a_1 = C_{n-1}^2$ *при* $a_n \ge n-2$ *или справедливы соотношения* $\mathbf{D} \le \mathbf{A}$ *и* $a_1 = \mathrm{H}$ *при* $a_n \le n-3$.

Теорема 3.5. *Если* $\mathbf{A}$ *из* $\overline{Z}_+^n$*, где* $n \ge 4$*, является строго приводимым, то для единственного редукционного вектора* $\mathbf{A}' = (a_2',...,a_n')$ *имеет место*

$$a_i' = \begin{cases} a_i - n + 2, \ 2 \le i \le n, \ \text{где } a_n \ge n-2, \\ a_i - d_i, \ 2 \le i \le n, \ \text{где } a_n \le n-3. \end{cases}$$

<u>В четвёртой главе.</u> Рассматриваются k-мерные комплексы (k-комплексы) в которых каждый m-мерный симплекс есть грань $m+1$-мерного симплекса, где $1 \le m \le k-1$ (изолированные 0-мерные симплексы – вершины допускаются).

Вектор $\mathbf{A} \in Z_+^n$ называется *реализуемым* в k-комплекс степенями вершин, если $\exists G^k = G^k(\mathbf{A}) = G^k(U(n), S)$ такой, что $\deg u_i = a_i$, $1 \le i \le n$, и $G^k(\mathbf{A})$ называется *реализацией* вектора $\mathbf{A}$.

Заметим: если $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ – нулевой n-координатный вектор, то его единственной реализацией является 0-мерный комплекс, который, в виде исключения, отнесём к классу k-комплексов: $G^k(\mathbf{0}) = G^k(U(n), S = \varnothing)$. Пусть $\mathbf{A} \in Z_+^n$. Обозначим через $\Gamma^k(\mathbf{A}) = \{G^k(\mathbf{A}) = G^k(U(n), S)\}$ – множество всех k-комплексов – реализаций вектора $\mathbf{A}$. Легко видеть, что при $\Gamma^k(\mathbf{A}) \ne \varnothing$ имеет место: а) $\sum_{i=1}^{n} a_i = (k+1)q$, где $q \in Z$, и $|S| = q$; б) $\max_{1 \le i \le n} a_i \le C_{n-1}^{k-1}$; в) $(k+1) \max_{1 \le i \le n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Если $\mathbf{A} \in Z_+^n$ и $|\Gamma^k(\mathbf{A})| = 1$, то вектор $\mathbf{A}$ называется *совершенным*. При этом единственный комплекс $G^k(\mathbf{A}) = G^k(U(n),S)$ – реализация вектора $\mathbf{A}$ называется *совершенным* k-комплексом.

Для $G^k(U(n),S)$ и $V \subseteq U(n)$ k-комплекс $G^k(V,S')$ называется *подкомплексом* $G^k(U(n),S)$ порождённым множеством вершин V, если каждый симплекс из S с вершинами только из V - симплекс множества S'.

Свойство k-комплекса быть совершенным является наследственным для всех подкомплексов, порождённых своими вершинами.

Теорема 4.1. *Пусть* $G^k = G^k(U(n),S)$ *– совершенный* k*-комплекс. Тогда любой подкомплекс* G_1^k*, порождённый множеством вершин* $V \subseteq U(n)$*, также есть совершенный.*

Наследственность свойства являться совершенным k-комплексом позволяет доказывать важные свойства совершенных k-комплексов по индукции.

Если $\mathbf{A} \in \overline{Z}_+^n$ и $|\Gamma^k(\mathbf{A})| = 1$, то вектор $\mathbf{A}$ - *экстремальный*. Единственная реализация $G^k(\mathbf{A})$ вектора $\mathbf{A}$ - *экстремальный* k-комплекс.

Очевидно, что совершенные вектор $\mathbf{A}$ и комплекс $G^k(\mathbf{A})$ есть экстремальные, если $\mathbf{A} \in \overline{Z}_+^n$. Из теоремы 4.1 следует

Теорема 4.2. *Пусть* $G^k = G^k(U(n),S)$*, где* $n \geq k+2$*, – экстремальный комплекс. Тогда любой подкомплекс* k*-комплекса* G^k*, порождённый вершинами подкомплекса, также есть экстремальный* k*-комплекс.*

Каждый k-комплекс $G^k = G^k(U(n), S(G^k))$ будем отождествлять с $k+1$-индексной матрицей смежности, состоящей из 0 и 1: $G^k = (x_{i_1 \ldots i_{k+1}})$, где $1 \leq i_j \leq n$ $\forall j$, $1 \leq j \leq k+1$, причём $x_{i_1 \ldots i_{k+1}} = 1$ тогда и только тогда, когда симплекс $\{u_{i_j} : 1 \leq j \leq k+1\} \in S(G^k)$. Легко видеть, что $\deg u_l = \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} x_{l i_1 \ldots i_k}$, $1 \leq l \leq n$, так как каждый симплекс $\{u_l, u_i, \ldots, u_k\}$ просчитывается $k!$ раз.

Понятие экстремальности можно выразить с помощью $k+1$-индексной матрицы смежности.

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathbf{A} \in \overline{Z}_+^n$ *и* $\Gamma^k(\mathbf{A}) \neq \varnothing$*. Вектор* $\mathbf{A}$ *и* k*-комплекс* $G^k(\mathbf{A}) = (x_{i_1 \ldots i_{k+1}}) = G^k(U(n),S)$ *являются экстремальными тогда и только тогда, когда*

а) из равенства $x_{i_1 \ldots i_{k+1}} = 1$ *следует равенство* $x_{m_1 \ldots m_{k+1}} = 1$*, где* $m_j \leq i_j$ $\forall j$*,* $1 \leq j \leq k+1$ *и* $m_j \neq m_l$ *при* $j \neq l$*;*

б) из равенства $x_{i_1\ldots i_{k+1}}=0$ *следует равенство* $x_{m_1\ldots m_{k+1}}=0$*, где* $m_j\ge i_j$ $\forall j$, $1\le j\le k+1$.

k-комплекс полный, если каждые его $k+1$ вершина образуют симплекс.

Полный k-комплекс имеет следующие свойства. Пусть $\mathbf{A}\in\overline{Z}_+^n$. Тогда:

а) если $G^k(\mathbf{A})=G^k(U(n),S(G^k))$ есть полный, то $G^k(\mathbf{A})$ и $\mathbf{A}$ – экстремальны;

б) k-комплекс $G^k(\mathbf{A})$ есть полный, тогда и только тогда, когда $a_i=C_{n-1}^k$, $\forall i$;

в) k-комплекс $G^k=G^k(U(n),S(G^k))$ есть полный $\Leftrightarrow$ $|S(G^k)|=C_n^{k+1}$.

Через S_n^k обозначим множество всех k-мерных симплексов полного k-комплекса с n вершинами. Очевидно, что $|S_n^k|=C_n^{k+1}$.

Пусть $G^k=G^k(U(n),S(G^k))$. *Дополнением* комплекса G^k (до полного k-комплекса) называется комплекс $\overline{G}^k=\overline{G}^k(U(n),S_n^k\setminus S(G^k))$.

Теорема 4.4. *Дополнение к совершенному* k*-комплексу есть совершенный* k*-комплекс.*

Теорема 4.5. *Для совершенных вектора* $\mathbf{A}\in\overline{Z}_+^n$ *и* k*-комплекса* $G^k(\mathbf{A})=(x_{i_1\ldots i_{k+1}})$ *имеет место: а) если* $a_p=a_q$*, то* $x_{p\,i_1\ldots i_k}=x_{q\,i_1\ldots i_k}$*; б) если* $a_p>a_q$*, то из* $x_{q\,i_1\ldots i_k}=1$ *следует* $x_{p\,i_1\ldots i_k}=1$*; в) если* $a_p>a_q$*, то из* $x_{p\,i_1\ldots i_k}=0$ *следует* $x_{q\,i_1\ldots i_k}=0$.

Пусть n, $k\in Z$, $k\ge 1$. Для множества индексов $I_n=\{i\in Z:1\le i\le n\}$ введём обозначение $k+1$-индексных упорядоченных подмножеств множества I_n: $I_n^k=\{(i_1,\ldots,i_{k+1}):1\le i_j\le n,\quad i_j<i_{j+1}\ \forall j\}$. Определим на I_n^k частичный порядок: положим $(i_j:1\le j\le k+1)\ge(m_j:1\le j\le k+1)$, если $i_j\ge m_j$ $\forall j$, и $(i_j:1\le j\le k+1)>$ $>(m_j:1\le j\le k+1)$ при $(i_j:1\le j\le k+1)\ge(m_j:1\le j\le k+1)$ и $(i_j:1\le j\le k+1)\ne$ $\ne(m_j:1\le j\le k+1)$.

Построим конструкцию, позволяющую алгебраическим способом описать экстремальный k-комплекс. Для $G^k=(x_{i_1\ldots i_{k+1}})=G^k(U(n),S)$

$$I_n^k(G^k)=\{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in I_n^k:x_{i_1\ldots i_{k+1}}=1\}=\{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in I_n^k:\{u_{i_j}:1\le j\le k+1\}\in S\}.$$

Пусть $G^k=G^k(U(n),S(G^k))=(x_{i_1\ldots i_{k+1}})$ – экстремальный k-комплекс. Подмножество индексов $\bar{I}_n^k(G^k)=\{(i_1,\ldots,i_{k+1})\}$ из I_n^k называется *базой* для комплекса G^k, если выполняются следующие условия:

а) для разных элементов $(i_1,...,i_{k+1})$ и $(m_1,...,m_{k+1})$ из $\bar{I}_n^k(G^k)$ отношение порядка в I_n^k не определено;

б) для $\forall(i_1,...,i_{k+1}) \in I_n^k(G^k)$, где $(i_1,...,i_{k+1}) \notin \bar{I}_n^k(G^k)$, $\exists\,(m_1,...,m_{k+1}) \in \bar{I}_n^k(G^k)$, что $(i_1,...,i_{k+1}) < (m_1,...,m_{k+1})$.

Подмножество индексов $(m_1,...,m_{k+1})$ из $I_n^k(G^k)$ (то есть $x_{m_1...m_{k+1}} = 1$) называется максимальным, если $x_{i_1...i_{k+1}} = 0$, $\forall\,(i_1,...,i_{k+1}) > (m_1,...,m_{k+1})$.

Теорема 4.6. *Пусть* $G^k = G^k(U(n), S(G^k))$ *– экстремальный* k*-комплекс. Тогда* $\bar{I}_n^k(G^k) = \{(i_1,...,i_{k+1}) \in I_n(G) : (i_1,...,i_{k+1})$ *– максимальное подмно-во индексов* $\}$.

Теорема 4.7. *Любой экстремальный* k*-комплекс* $G^k = G^k(U(n), S(G^k)) = G^k(\mathbf{A}) = (x_{i_1...i_{k+1}})$ *имеет единственную базу и эта база есть* $\bar{I}_n^k(G^k)$.

Теорема 4.8. *Пусть* $\tilde{I}_n^k = \{(i_1,...,i_{k+1}) \in I_n^k$ *: любые пары различных подмножеств индексов не связаны отношением порядка из* $I_n^k\}$. *Тогда* $\tilde{I}_n^k$ *– есть база некоторого экстремального* k*-комплекса.*

Из теоремы 4.7 и теоремы 4.8 следует

Теорема 4.9. k*-комплекс* G^k*, является экстремальным тогда и только тогда, когда* G^k *имеет базу.*

На множестве всех k-комплексов введём частичный порядок и две бинарные операции.

Для $G_1^k = G_1^k(U(n), S')$ и $G_2^k = G_2^k(U(n), S'')$, где $S' \neq S''$ положим:

а) $G_1^k < G_2^k \iff S' \subset S''$;

б) операция объединение: $G_1^k \cup G_2^k = G_3^k$, где $G_3^k = G_3^k(U(n), S' \cup S'')$;

в) операция пересечение: $G_1^k \cap G_2^k = G_3^k$, где $G_3^k = G_3^k(U(n), S' \cap S'')$.

Легко видеть: если $G_1^k = (x'_{i_1...i_{k+1}})$ и $G_2^k = (x''_{i_1...i_{k+1}})$– n-вершинные комплексы, то

а) $G_1^k < G_2^k \iff x'_{i_1...i_{k+1}} \le x''_{i_1...i_{k+1}} \quad \forall\,(i_1,...,i_{k+1}) \in I_n^k$ и $\exists\,(m_1,...,m_{k+1}) \in I_n^k$, что $x'_{m_1...m_{k+1}} < x''_{m_1...m_{k+1}}$;

б) $G_1^k \cup G_2^k = G_3^k$, где $G_3^k = (\max(x'_{i_1...i_{k+1}}, x''_{i_1...i_{k+1}}))$;

в) $G_1^k \cap G_2^k = G_3^k$, где $G_3^k = (\min(x'_{i_1...i_{k+1}}, x''_{i_1...i_{k+1}}))$.

Очевидно, что на множестве всех n-вершинных k-комплексов выполняется закон дистрибутивности:

$\left(G_1^k \cup G_2^k\right) \cap G_3^k = \left(G_1^k \cap G_3^k\right) \cup \left(G_1^k \cap G_2^k\right)$ и $\left(G_1^k \cap G_2^k\right) \cup G_3^k = \left(G_1^k \cup G_3^k\right) \cap \left(G_1^k \cup G_2^k\right)$.

Через W_n^k обозначим множество всех экстремальных k-комплексов с множеством вершин $U(n)$. Введённые выше отношение частичного порядка и бинарные операции задают на W_n^k алгебраическую структуру дистрибутивной решётки.

Лемма 4.1. *Пусть* $G_1^k = G_1^k\left(U(n), S'\right), G_2^k = G_2^k\left(U(n), S''\right) \in W_n^k$. *Тогда* $G_1^k \cup G_2^k \in W_n^k$.

Лемма 4.2. *Пусть* $G_1^k = G_1^k\left(U(n), S'\right), G_2^k = G_2^k\left(U(n), S''\right) \in W_n^k$. *Тогда* $G_1^k \cap G_2^k \in W_n^k$.

Следствием лемм 1 и 2 есть

Теорема 4.10. *Множество экстремальных n-вершинных k-комплексов W_n^k с отношением частичного порядка и бинарными операциями объединения и пересечения есть дистрибутивная решётка.*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построен редукционный критерий реализуемости набора целых неотрицательных чисел в виде степеней вершин 2-комплекса.
2. Получен редукционный критерий, реализуемости в единственный 2-комплекс.
3. Получены необходимые и достаточные условия реализуемости набора целых неотрицательных чисел в единственный k-комплекс, основанные на языке многоиндексных бинарных матриц.
4. Выведен алгебраический критерий реализуемости в единственный n-вершинный k-комплекс, основанный на введении частичного порядка, на множестве из C_n^{k-1} элементов, каждый из которых – это $k-1$ различных индексов множества индексов $\{1,...,n\}$.
5. На множестве n-вершинных k-комплексов, являющихся единственными реализациями наборов целых неотрицательных чисел, упорядоченных по невозрастанию, построены две бинарные операции – «объединение» и «пересечение» и создана алгебраическая структура – дистрибутивная решётка.

Основное содержание работы изложено в следующих публикациях:

1. *Мокряков А. В.* О локально двумерных комплексах полностью описываемых степенями вершин // Научные труды международной конференции «XXXI Гагаринские чтения», Москва, 2005.
2. *Миронов А. А., Мокряков А. В.* Двумерные комплексы полностью описываемые степенями вершин // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем (под редакцией член.-корр. РАН Попкова Ю. С.), 2006 №10(1). 2006 г.
3. *Мокряков А. В.* О реализуемости неотрицательного целочисленного вектора в двумерный комплекс // Научные труды международной конференции «XXXII Гагаринские чтения», Москва, 2006.
4. *Миронов А. А., Мокряков А. В., Колбанов В. М.* О k-мерных комплексах полностью описываемые степенями вершин // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем (под редакцией член.-корр. РАН Попкова Ю. С.), 2006 №10(2). 2006 г.
5. *Мокряков А. В.* Алгебра 2-комплексов // Научные труды международной конференции «XXXIII Гагаринские чтения», Москва, 2007.
6. *Мокряков А. В.* О реализуемости целочисленных векторов в 2-комплекс // Научные труды международной конференции «XXXIII Гагаринские чтения», Москва, 2007.
7. Mironov A. A., Mokryakov A. V., Sokolov A. A. About Realization of Integer Non-Negative Numbers Tuple into 2-Dimensional Complexes // Applied and Computational Mathematics, V. 6, N. 1, pp. 58–68, 2007.