На правах рукописи

ПИКУЛИН Сергей Владимирович

Осреднение и локализация решений некоторых краевых задач для полулинейных эллиптических уравнений в перфорированных областях

01.01.03 — *математическая физика*

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на механико–математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: кандидат физико–математических наук МАТЕВОСЯН Овик Амаякович.

Официальные оппоненты:

ПОКРОВСКИЙ Андрей Владимирович, доктор физико–математических наук (Институт математики Национальной академии наук Украины, старший научный сотрудник отдела комплексного анализа и теории потенциала),

ДЕНИСОВ Василий Николаевич, доктор физико–математических наук, доцент (факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, доцент кафедры общей математики).

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук.

Защита диссертации состоится « 24 » января 2013 г. в 15 : 00 на заседании Диссертационного совета Д 002.017.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительном центре им. А. А. Дородницына Российской академии наук по адресу: 119333, Москва, ул. Вавилова д. 40, конференц–зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН по адресу: Москва, ул. Вавилова д. 40.

Автореферат разослан «   » декабря 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д. ф.–м. н. ЗУБОВ Владимир Иванович

В. Зубов

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена изучению свойств решений квазилинейных уравнений второго порядка с равномерно эллиптической главной частью в перфорированных областях.

Примером такого уравнения является следующий аналог стационарного уравнения Фуджиты ($x \in \mathbb{R}^n$):

$$\Delta\, u - |x|^s\, |u|^\sigma \operatorname{sign}\, u = 0, \qquad 0 < \sigma \neq 1, \quad s \geq 0. \tag{1}$$

Для уравнений данного вида рассматриваются краевые задачи Дирихле и Зарембы в ограниченных липшицевых областях Ω, содержащих конечное число одинаковых полостей шаровой или цилиндрической формы. Решения указанных задач в классе $W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ понимаются в обобщенном смысле. Известно[1,2], что для функций из $W_2^1(\Omega)$ в липшицевой области Ω определены их следы на $\partial\Omega$, принадлежащие пространству $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$. Исходя из этого, краевые условия типа Дирихле, отвечающие функциям класса $W_2^{1/2}(\partial\Omega) \cap L_\infty(\partial\Omega)$, задаются в виде следов функций класса $W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, определенных во всей области.

Поведение решений краевых задач такого вида имеет ряд особенностей, не возникающих в линейном случае; в частности:

1) при $\sigma \in (0, 1)$ и выполнении однородного условия Дирихле или Неймана на «внешней» границе области носитель ограниченного решения локализован в окрестности полостей, размер которой зависит от входных данных (эффект локализации носителя);

2) при достаточно больших $\sigma > 1$ и достаточно быстром стремлении размеров полостей к нулю одновременно с ростом их количества при фиксированном условии Дирихле на внешней границе наблюдается сходимость решений к решению предельной задачи в неперфорированной области; при этом предельная задача не зависит от краевых условий на границах полостей.

[1] *R. Adams* Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.

[2] *И. Стейн* Сингулярные интегралы и свойства функций. М.: Мир, 1973.

Актуальность темы. Полулинейные уравнения в частных производных эллиптического типа с измеримыми коэффициентами активно изучались многими авторами. В. А. Кондратьев и Е. М. Ландис установили Ряд качественных свойств решений таких уравнений[3,4]. В работах О. А. Олейник и В. А. Кондратьева изучено поведение решений полулинейных уравнений в (полу)бесконечном цилиндре с условием Неймана на боковой поверхности цилиндра. Вопросы существования решений и их асимптотического поведения в цилиндрических областях изучались в работах Ю. В. Егорова, В. А. Кондратьева, О. А. Олейник и ряда других авторов.

Исследованию разрешимости уравнений со степенной нелинейностью и изучению свойств их решений в случае оператора Лапласа в главной части посвящена обширная литература (J. B. Keller, R. Osserman, L. Véron, H. Brezis, С. И. Похожаев и др.); уравнения более общего вида рассматривались в работах H. A. Levine, L. E. Paine, О. А. Олейник и других авторов. В связи с эффектом локализации носителя отметим результаты А. А. Конькова о компактности носителя решений некоторых нелинейных неравенств в неограниченных областях[5].

Теории осреднения линейных уравнений посвящено большое количество статей и монографий[6,7,8,9,10,11]. Осреднением квазилинейных эллиптических уравнений в перфорированных областях и областях с каналами

---

[3] *В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис* Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Матем. заметки. 1988. Т. 44, № 4. С. 457–468.

[4] *В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сборник. 1988. Т. 135(177), № 3. С. 346–360.

[5] *А. А. Коньков* О решениях квазилинейных эллиптических неравенств, обращающихся в нуль в окрестности бесконечности // Матем. заметки. 2000. Т. 67, № 1. С. 153–156.

[6] *Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.

[7] *В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.

[8] *В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.

[9] *О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Издательство МГУ, 1990.

[10] *Э. Санчес–Паленсия* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.

[11] *A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.

занимался И. В. Скрыпник[12]. Задачи осреднения для эллиптических и параболических операторов в различных постановках изучались также в работах Г. А. Чечкина[13], Т. А. Шапошниковой[14] и других авторов[15]. Как правило, при осреднении накладываются определенные ограничения на входные данные задачи, такие как периодичность, близость полостей к некоторому многообразию и т. п. Отметим, что в данной работе не используются условия периодичности изменения коэффициентов или расположения полостей. Некоторые результаты диссертации имеют аналоги в теории полулинейных параболических уравнений[16].

В ряде работ Е. П. Долженко, Л. Карлесона, А. В. Покровского[17] доказаны критерии устранимости замкнутого множества для некоторых эллиптических уравнений в терминах хаусдорфовой меры множества. Теоремы об осреднении настоящей работы являются некоторыми аналогами таких критериев. При этом условиям типа равенства нулю хаусдорфовой меры в теории устранения особенностей соответствуют условия на скорость убывания размеров полостей.

Теоремы о существовании «мёртвой зоны», то есть такого подмножества (положительной меры), на котором решение уравнения обращается в нуль, известны для квазилинейных эллиптических[18] и параболических уравнений. Отметим в связи с этим эффект пространственной локализации возмущения[19].

[12] *И. В. Скрыпник* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.

[13] *Г. А. Чечкин* Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сборник. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.

[14] *Т. А. Шапошникова* Об усреднении некторых краевых задач в областях, содержащих тонкие каналы // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2004. Т. 24. С. 324–340.

[15] *A. Damlamian, Li Ta–Tsien* Boundary homogenization for elliptic problems. // J. Math. Pures Appl. 1987. Vol. 66, no. 9. P. 351–361.

[16] *О. А. Матевосян, И. В. Филимонова* Об усреднении полулинейных параболических операторов в перфорированном цилиндре // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 396–408.

[17] *А. В. Покровский* Устранимые особенности решений нелинейных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62. № 3 (375). С. 215–216.

[18] *P. Pucci, J. Serrin* The strong maximum principle revisited // J. Differential Equations. 2004. Vol. 196. No. 1, P. 1–66.

[19] *А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

Целью диссертационной работы является:

1) изучение свойств решений квазилинейных уравнений второго порядка с равномерно эллиптической главной частью и нелинейным членом, зависящим от неизвестной функции степенным образом, в областях со сферической и цилиндрической перфорацией методами теории устранения особенностей и качественной теории квазилинейных уравнений;

2) исследование задачи осреднения для полулинейных эллиптических уравнений в областях, содержащих полости шаровой или цилиндрической формы;

3) изучение эффекта локализации носителя решения краевых задач Зарембы и Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1) для $n \geq 3$ и достаточно больших значений показателя нелинейности $\sigma > 1$ найдены условия, при которых решения задачи Дирихле в последовательности перфорированных областей сходятся (в подходящем смысле) к решению предельной задачи в неперфорированной области; получена оценка скорости сходимости, полиномиальная по малому параметру; доказано, что при значениях показателя нелинейности, превышающих определенную критическую величину, и при достаточно быстром убывании размеров полостей одновременно с увеличением их количества достигается сходимость к предельному решению почти всюду в области;

2) при $n \geq 3$, $\sigma > 1$ установлены условия сходимости к нулю интегрального выражения, включающего разность предельного решения и решений в перфорированных областях, а также градиент этой разности;

3) в случае $n \geq 2$ и $\sigma \in (0, 1)$ установлен эффект локализации носителя: ограниченное решение задачи Зарембы обращается в нуль на достаточном удалении от той части границы области, где краевое условие неоднородно; получена оценка на размер зоны локализации;

4) для случая задачи в перфорированной области с однородным условием Дирихле на внешней границе при $n \geq 3$ и $\sigma \in (0, 1)$ получена уточненная оценка на размер зоны локализации.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ [1–7], список которых приведен в конце автореферата. Статьи [1–3] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Апробация. Результаты работы докладывались на заседаниях семинара «Качественная теория уравнений в частных производных» кафедры дифференциальных уравнений механико–математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. В. А. Кондратьева и проф. Е. В. Радкевича, а также под руководством проф. В. В. Жикова, проф. Е. В. Радкевича, проф. А. С. Шамаева; на семинаре «Методы решения задач математической физики» Федерального государственного бюджетного учреждения науки Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Российской академии наук под руководством проф. А. А. Абрамова, проф. В. И. Власова, проф. Б. В. Пальцева; на семинаре отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН под руководством проф. А. К. Гущина и проф. В. П. Михайлова; на Международной конференции «Fourth Arbeitstagung of the Second Series» (Bonn, 1999); на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» им. И. Г. Петровского (Москва, 2011 г.); на Международной молодёжной конференции — школе «Современные проблемы прикладной математики и информатики» (Дубна, 2012 г.); на Третьей международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Самара, 2012 г.).

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации имеют теоретический характер и могут представлять интерес для специалистов в области квазилинейных уравнений математической физики и теории осреднения.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Общий объем работы составляет 99 страниц, из которых 85 страниц занимает текст диссертации. Список литературы включает 99 наименований и занимает 11 страниц.

Обзор содержания диссертации

В диссертации рассматриваются краевые задачи для квазилинейного уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x) \, |u|^{\sigma-1} \, u = 0 \tag{2}$$

в строго липшицевой ограниченной области Ω и её подобластях, где $0 < \sigma \neq 1$ — *показатель нелинейности*, $a(x) > 0$ — измеримая функция. При этом старшая часть уравнения является равномерно эллиптическим оператором с коэффициентами $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$.

Во **введении** к диссертации отмечена актуальность тематики, указаны цели работы и кратко изложено ее содержание. Кроме того, приведен список основных обозначений, даны определения ряда функциональных пространств, используемых в диссертации, а также сформулированы некоторые известные факты теории обобщенных решений класса $W_2^1(\Omega)$ эллиптических краевых задач, такие как принцип максимума и принцип сравнения.

Первая глава посвящена задаче Дирихле для уравнения (2) в областях, содержащих шаровые полости, в случае, когда коэффициент $a(x)$ отделен от нуля: $a(x) \geq a_0 = \mathrm{const} > 0$. Результаты данной главы вытекают из качественных свойств решений, установленных В. А. Кондратьевым и Е. М. Ландисом[20], а также опираются на двусторонние оценки положительного фундаментального решения равномерно эллиптического оператора второго порядка[21].

В параграфе 1 главы I изучаются свойства решений задачи Дирихле в области, имеющей форму единичного куба в n – мерном евклидовом пространстве ($n \geq 2$) с единственной шаровой полостью, лежащей внутри куба. Предполагается, что на гранях куба задано однородное условие

[20] *В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сборник. 1988. Т. 135(177), № 3. С. 346–360.

[21] *W. Littmann, G. Stampacchia, H. F. Weinberger* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1963. V 17, no. 1–2. P. 43–77.

Дирихле, а на границе полости — неоднородное краевое условие. Основными результатами параграфа являются:

1) найденные достаточные условия наличия у решения «мёртвой зоны» при $\sigma \in (0,1)$ и установленные оценки размера носителя решения;

2) доказанная сходимость решений к нулю при стремлении размера шаровой полости к нулю в случае, когда $n \geq 3$ и $\sigma > n/(n-2)$, а также установленная оценка скорости сходимости.

Эффект «мёртвой зоны», возникающий при $\sigma \in (0,1)$, заключается в том, что если решение на границе полости не превышает по модулю константы $M > 0$, то оно обращается в нуль в тех точках, которые удалены от полости более, чем на величину $(M/c_1)^{\frac{1-\sigma}{2}}$. Здесь c_1 — некоторая константа, зависящая только от коэффициентов уравнения и от показателя σ. Если $n \geq 3$, то оценка на размер зоны локализации решения может быть улучшена: при достаточно больших значениях M этот размер не превосходит величины, пропорциональной M^γ, где

$$\gamma = \frac{1-\sigma}{n-(n-2)\,\sigma} < \frac{1-\sigma}{2}.$$

В случае $n \geq 3$, $\sigma > n/(n-2)$ рассматривается семейство задач, параметризованное числом $\varepsilon \to 0$, в кубе с шаровой полостью переменного радиуса R_ε, имеющей центр в фиксированной точке. Показано, что если размер полости убывает достаточно быстро:

$$R_\varepsilon = \mathrm{o}(\varepsilon^\gamma) \text{ при } \varepsilon \to 0, \qquad \text{где } \gamma = \frac{\sigma-1}{(n-2)\,\sigma-n}, \tag{3}$$

то супремум модуля решения по внешности шара радиуса $d_\varepsilon := d_0\,\varepsilon^{1/(n-2)}$, концентрического с полостью, стремится к нулю при любом $d_0 > 0$. Отметим, что величина M_ε, ограничивающая решение на границе полости для заданного ε, может расти при $\varepsilon \to 0$ неограниченно быстро.

Параграф 2 главы I посвящен задаче осреднения решений уравнения (2) в областях Ω_ε, получаемых из области Ω общего вида выбрасыванием конечного числа m шаровых полостей одинакового малого радиуса R_ε.

Предполагается, что выполнены неравенства

$$n \geq 3, \qquad \sigma > \frac{n}{n-2}.$$

Параметр $\varepsilon \to 0$ связан с m соотношением $\varepsilon = m^{-1}$. Одновременно с неограниченным ростом количества полостей согласованным образом уменьшаются их размеры. В частности, общий объем полостей стремится к нулю. На внешней границе $\partial\Omega$ задано условие Дирихле $u_\varepsilon = \varphi \leq 0$, одинаковое для всех значений ε, а на границе полостей задано некоторое условие Дирихле $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \geq 0$, зависящие от ε. Доказано, что в этом случае обобщенные решения u_ε в перфорированных областях Ω_ε сходятся при выполнении условия (3) к решению $u(x)$ в области Ω с краевым условием $u = \varphi$ на $\partial\Omega$ в следующем смысле: супремум величины $u_\varepsilon - u \geq 0$ по внешности объединения шаров фиксированного радиуса d_0, концентрических с полостями, стремится к нулю при любом $d_0 > 0$. Отметим, что это влечёт равномерную сходимость на каждом компакте $E \subset \Omega$, содержащемся во всех областях Ω_ε вместе с некоторой своей окрестностью. В том случае, когда $\varphi = 0$, а для радиусов R_ε выполняется условие

$$R_\varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon^\gamma) \text{ при } \varepsilon \to 0, \qquad \text{где } \gamma > \frac{\sigma - 1}{(n-2)\,\sigma - n},$$

более сильное, чем (3), установлена интегральная сходимость u_ε к нулю вместе с градиентами:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^{2R_\varepsilon}} \frac{u_\varepsilon^{\sigma+1} + |\nabla u_\varepsilon|^2}{1 + u_\varepsilon}\, dx \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $\Omega_\varepsilon^{2R_\varepsilon}$ — множество, полученное из Ω исключением шаров радиуса $(2R_\varepsilon)$, концентрических с полостями.

Во **второй главе** изучаются задачи Дирихле и Зарембы для уравнения (2) в областях, содержащих полости одинаковой цилиндрической формы (под цилиндром радиуса R понимается R-окрестность некоторого аффинного подпространства $\mathbb{R}^n$, не обязательно одномерного, — *оси* цилиндра). Коэффициент $a(x)$ может иметь изолированный нуль порядка $s \geq 0$ в некоторой точке из $\overline{\Omega}$, принимаемой за начало координат: $a(x) \geq a_0 \, |x|^s$, где $a_0 = \mathrm{const} > 0$.

В параграфе 1 главы II установлены общие свойства решений рассматриваемых краевых задач: разрешимость задач Дирихле и Зарембы в подходящем классе функций, вариационный принцип, условия непрерывности решения по Гёльдеру вплоть до границы области, возможность аппроксимации обобщенного решения уравнения с измеримыми коэффициентами решениями уравнений того же вида с бесконечно гладкими коэффициентами.

Задача Зарембы в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)\,|u|^{\sigma-1}\,u = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u = \varphi \quad \text{на } \Gamma, \\ \displaystyle\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\cos(\vec{n}, x_i) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma, \end{cases} \tag{4}$$

где $a_{ij} \equiv a_{ji} \in L_\infty(\Omega)$, $a(x)$ — положительная в Ω измеримая функция, $\emptyset \neq \Gamma \subset \partial\Omega$ — замкнутое подмножество, $\varphi \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Если $\Gamma = \partial\Omega$, то задача (4) является задачей Дирихле. Условия разрешимости задач Зарембы и Дирихле даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть выполнено по крайней мере одно из условий:*
1) $\Gamma = \partial\Omega$ *(задача Дирихле);*
2) область Ω *липшицева, при этом* $\left(a(x)^{-1/\sigma}\right) \in L_1(\Omega)$.
Тогда для произвольного $\varphi \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ *существует единственное решение* $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ *задачи* (4).

Решение задачи (4) строится методом приближений Галёркина. Доказательство сходимости приближений опирается на свойства коэрцитивности и слабой компактности нелинейного оператора, соответствующего краевой задаче[22].

[22] *Ю. А. Дубинский* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. ВИНИТИ. 1976. Т. 9. С. 5–130.

В параграфе 2 главы II получен ряд вспомогательных результатов, а также сформулированы некоторые известные свойства гладких функций, в том числе — интегральная теорема о среднем и теорема Морса. Используемые в первой главе теоремы В. А. Кондратьева, Е. М. Ландиса о поведении решений уравнения в областях, лежащих внутри шара, обобщены на случай, когда на части границы выполняются условия Неймана, а коэффициент $a(x)$ имеет изолированный нуль порядка s. Показано, что если решение задачи Дирихле в области $\Omega^R := \Omega \setminus B^R$, имеющей m цилиндрических полостей радиуса R с осями Y_k коразмерности $n' \geq 3$, удовлетворяет однородному краевому условию на $\partial\Omega$, то при $x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \cup Y_k) > R$ выполняется оценка

$$|u(x)| \leq \beta\, m\, M \left(\frac{\operatorname{dist}(x, \cup Y_k)}{R}\right)^{2-n'}, \qquad (5)$$

где β зависит только от n, n' и от константы эллиптичности λ, число M ограничивает сверху модуль решения $u(x)$ на $\partial\Omega^R$ (а следовательно, и во всей области Ω^R). В случае $\sigma > 1$, $a(x) = a_0\, |x|^s$ доказана аналогичная оценка с правой частью, не зависящей от M. В этих предположениях при $x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \cup Y_k) > 2R$ верно неравенство

$$|u(x)| \leq \beta_2\, m\, \left(R^{n'-2\,\sigma^* - s/(\sigma-1)}\right) \operatorname{dist}(x, \cup Y_k)^{2-n'},$$

где $\sigma^* := \sigma/(\sigma - 1)$, β_2 зависит от $n, n', \lambda, \sigma, s, a_0$.

В параграфе 3 главы II доказаны теоремы о локализации и сходимости решений, составляющие основные результаты диссертации.

Теорема 2. *Пусть $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ — обобщенное решение задачи (4) в строго липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, причем $\sigma \in (0, 1)$, $a(x) \geq a_0\, |x|^s$ в Ω, $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $0 \leq s < \sigma\, n$, $\varphi \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, и выполняется оценка $|\varphi| \leq M = \mathrm{const} > 0$ на Γ. Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma$ — такое замкнутое подмножество, что $\varphi = 0$ на Γ_0. Положим*

$$\Gamma_1 := \overline{\Gamma \setminus \Gamma_0}, \qquad \Gamma_2 := \overline{\partial\Omega \setminus \Gamma} \cap \Gamma_0.$$

Тогда существует число c_1, зависящее только от n, σ, s, a_0 и от константы эллиптичности λ, что $u = 0$ в Ω_1, где

$$\Omega_1 := \left\{ x \in \Omega \,:\, \operatorname{dist}(x\,,\,\Gamma_1 \cup \Gamma_2) > \left(\frac{M}{c_1}\right)^{\frac{1-\sigma}{2+s}} \right\}.$$

Для случая задачи Дирихле в цилиндрически перфорированной области с однородным условием на внешней границе размер зоны локализации решения допускает другую оценку, которая при достаточно малых значениях радиуса полостей и больших значениях M может оказаться более сильной, чем в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть $n \geq 3$ и выполнены условия теоремы 2. Пусть $\{Y_k\}$ — конечное множество ($k = 1, \ldots, m$) аффинных подпространств в $\mathbb{R}^n$ коразмерности $n' \geq 3$. Обозначим через B^R объединение замкнутых цилиндров радиуса R с осями Y_k. Предположим, что для некоторого $R > 0$ выполняются следующие соотношения:*

$$\Gamma_1 \subset (\partial\Omega \cap B^R) \subset \Gamma = \partial\Omega.$$

Тогда существует число $c_1' > 0$, зависящие от $n, n', \lambda, \sigma, a_0, s$, но не от R, m, M такое, что если выполнено условие

$$m\,M > c_1'\,R^{\frac{2+s}{1-\sigma}},$$

то $u = 0$ на множестве $\Omega_1' := \Omega \setminus B^d$, где

$$d = \frac{1}{\gamma_s\,(n'-2)} \left(R^{n'-2}\,\frac{m\,M}{c_1'}\right)^{\gamma_s}, \quad \gamma_s = \frac{1-\sigma}{n'+s-(n'-2)\,\sigma} < \frac{1-\sigma}{2+s}.$$

Перейдем к формулировке результатов об осреднении задачи Дирихле. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная строго липшицева область, $n \geq 3$, $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon$ — последовательность цилиндрически перфорированных областей, где B_ε — объединение конечного числа $m = m(\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1}$ цилиндров одинакового радиуса R_ε с осями $Y_{\varepsilon,k}$ коразмерности $n' \geq 3$. Величина ε рассматривается в качестве параметра, $R_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим обобщенные решения следующих задач:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)\,|u|^{\sigma-1}\,u = 0 & \text{в } \Omega, \\ u = \varphi & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где $\sigma > 1$, $u, \varphi \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $a(x) \geq a_0\,|x|^s$, $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $s \geq 0$,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) - a(x)\,|u_\varepsilon|^{\sigma-1}\,u_\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon & \text{на } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

где $u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_\varepsilon) \cap L_\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\varphi_\varepsilon = \varphi$ на $\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_\varepsilon$.

В теоремах 4 — 6, сформулированных ниже, предполагается выполнение следующего условия:

$$\sigma > \frac{n' + s}{n' - 2}. \tag{6}$$

В этом случае справедливо неравенство

$$\gamma_s := \frac{\sigma - 1}{(n' - 2)\,\sigma - (n' + s)} > 0.$$

Через Ω_ε^R обозначается подмножество Ω_ε, лежащее вне замкнутых цилиндров радиуса $R \geq R_\varepsilon$ с осями $Y_{\varepsilon,k}$.

Теорема 4. *Пусть выполняется условие* (6), *числа* $\gamma > \gamma_s$, $\nu > 0$, $q \geq 0$ *удовлетворяют следующему равенству:*

$$\nu + (n' - 2)\,q \;=\; \gamma/\gamma_s - 1.$$

Допустим, что $R_\varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon^\gamma)$, $d_\varepsilon \sim d_0\,\varepsilon^q$ *при* $\varepsilon \to 0$, $d_0 = \mathrm{const} > 0$. *Тогда выполняется соотношение*

$$\sup_{\Omega_\varepsilon^{d_\varepsilon}} |u_\varepsilon - u| = \mathrm{O}(\varepsilon^\nu) \qquad \textit{при } \varepsilon \to 0.$$

Теорема 5. *Пусть выполняется условие* (6), *кроме того* $R_\varepsilon = \mathrm{o}(\varepsilon^\gamma)$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\gamma \geq \gamma_s$, $d_\varepsilon \sim d_0\,\varepsilon^{q_s}$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $q_s := (\gamma/\gamma_s - 1)/(n' - 2)$, $d_0 = \mathrm{const} > 0$. *Тогда*

$$\sup_{\Omega_\varepsilon^{d_\varepsilon}} |u_\varepsilon - u| \to 0 \qquad \textit{при } \varepsilon \to 0.$$

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 5, и компактное подмножество $E \subset \Omega$ вместе с некоторой своей окрестностью лежит в Ω_ε при всех достаточно малых ε, то $u_\varepsilon \to u$ равномерно на E.*

Теорема 6. *Пусть выполнено (6), $R_\varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \to 0$, где*

$$\gamma > (3 - 4/n')\, \gamma_s.$$

Доопределим u_ε в $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ произвольным образом. Тогда $u_\varepsilon \to u$ при $\varepsilon \to 0$ почти всюду в Ω, и соотношение

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| = \mathrm{O}(\varepsilon^\nu) \qquad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

выполнено для почти всех $x \in \Omega$, $\forall\, \nu \in (0\,,\, \gamma/\gamma_s - 3 + 4/n')$.

Следующая теорема описывает интегральную сходимость решений вместе с градиентами к решению предельной задачи.

Теорема 7. *Допустим, что выполняются условия*

$$\sigma' := \frac{n}{n+s}\,\sigma > \frac{n'}{n'-2},$$
$$R_\varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon^\gamma) \text{ при } \varepsilon \to 0, \qquad \text{где } \gamma > \frac{\sigma' - 1}{(n'-2)\,\sigma' - n'}.$$

Положим

$$\sigma'^* := \frac{\sigma'}{\sigma' - 1}, \quad \mu_1 := \min\left\{\gamma\,\sigma'^*, \frac{\gamma\, n' - 1}{2\,\sigma'^*}\right\} > \gamma.$$

Зафиксируем числа $\delta_0 > 0$ и $\mu > 0$ такие, что $\gamma \le \mu < \mu_1$, и пусть $\delta_\varepsilon \sim \delta_0\, \varepsilon^\mu$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда выполнено соотношение

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^{R_\varepsilon + \delta_\varepsilon}} \frac{1}{1 + |u_\varepsilon - u|} \left(|\nabla(u_\varepsilon - u)|^2 + a(x)\, |u_\varepsilon - u|^{\sigma+1}\right) dx = \mathrm{o}(\varepsilon^\nu) \text{ при } \varepsilon \to 0$$

для некоторого $\nu > 0$.

Положения диссертации, выносимые на защиту

1. Установлены достаточные условия возникновения эффекта «мёртвой зоны» для решений полулинейных эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами, обладающих равномерно эллиптической главной частью и имеющих в младшем члене степенную нелинейность с положительным показателем, меньшим единицы.

2. Получены оценки размера зоны локализации решения при возникновении «мёртвой зоны» для задачи Зарембы в строго липшицевой области и для задачи Дирихле в области с шаровыми или цилиндрическими полостями.

3. Найдены условия сходимости решений полулинейного эллиптического уравнения с показателем нелинейности, большим единицы, в областях из семейства цилиндрически перфорированных областей с общей «внешней» границей, на которой заданы фиксированные условия Дирихле, к решению предельной задачи в неперфорированной области при согласованном стремлении к нулю размеров полостей одновременно с неограниченным ростом их количества. Получены оценки скорости сходимости решений к предельной функции, а также условия интегральной сходимости решений вместе с градиентами.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю к. ф.–м. н. Овику Амаяковичу Матевосяну за постановку задач и внимание к работе.

Список публикаций по теме диссертации

1. *Матевосян О. А., Пикулин С. В.* Об усреднении слабонелинейных дивергентных эллиптических операторов в перфорированном кубе // Математические заметки. 2000. Т. 68, № 3. С. 390–398.

2. *Матевосян О. А., Пикулин С. В.* Об усреднении полулинейных эллиптических операторов в перфорированных областях // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 3. С. 101–114.

3. *Pikulin S. V.* Behavior of solutions of semilinear elliptic equations in domains with complicated boundary // Russian Journal of Math. Physics. 2012. Vol. 19, no. 3. P. 401–404.

4. *Матевосян О. А., Пикулин С. В.* Усреднение решений эллиптических операторов с нелинейным поглощением в перфорированнх областях. Препринт МГУ им. М. В. Ломоносова, 27 страниц. Москва: МАКС Пресс, 2000.

5. *Matevossian H. A., Pikouline S. V.* The homogenization of solutions of elliptic differential operators with weak nonlinearity in perforated domains. // Proceedings of the Mathematische Arbeitstagung on the «Fourth Arbeitstagung of the Second Series» (Bonn, June 18 — 24, 1999). Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1999. P. 425.

6. *Пикулин С. В.* Локализация носителя и усреднение решений полулинейных эллиптических уравнений в перфорированных областях // «Математическая физика и ее приложения». Третья международная конференция (Самара, 27 августа — 1 сентября 2012 г.). Материалы конференции. Самара: СамГТУ, 2012. С. 232–233.

7. *Пикулин С. В.* Осреднение решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений и эффект «мертвой зоны» // «Современные проблемы прикладной математики и информатики». Международная молодежная конференция — школа (Дубна, 22 — 27 августа 2012 г.). Тезисы докладов. Дубна: ОИЯИ, 2012. С. 161–163.