

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

МАТЕМАТИКА

НОВАЯ СЕРИЯ

1949

ОТТИСК ИЗ т. LXVI № 4

В. М. КУРОЧКИН

**КОЛЬЦА С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ
ДЛЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ИДЕАЛОВ**

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 1 IV 1949)

Известно, какую роль играют тела в теории простых колец, особенно в теории простых колец с минимальным правым идеалом. Аналогия, которая существует между телами и радикальными кольцами (см. (1)), позволяет надеяться на подобную же роль последних в теории некоторых классов присоединенно-простых колец. Так, доказываемая ниже теорема 2 аналогична теореме Wedderburn'a — Noether о простых кольцах с условием минимальности.

Присоединенным правым идеалом кольца \mathfrak{A} называется такое множество I его элементов, что

- 1) из $a, b, c \in I$ следует $a + b - c \in I$;
- 2) из $a \in I, x \in \mathfrak{A}$ следует $a \circ x = a + x - ax \in I$.

Лемма 1. Пусть кольцо \mathfrak{A} гомоморфно отображается на кольцо $\bar{\mathfrak{A}}$ и пусть \bar{I} — присоединенный идеал кольца $\bar{\mathfrak{A}}$. Полный прообраз I множества \bar{I} будет присоединенным идеалом кольца \mathfrak{A} .

Доказательство. Обозначим рассматриваемый гомоморфизм через φ . Если $a, b, c \in I$, то $\varphi(a + b - c) = \varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(c)$ лежит в \bar{I} , так как $\varphi(a), \varphi(b)$ и $\varphi(c)$ лежат в \bar{I} ; следовательно, $a + b - c \in I$. Если $a \in I, x \in \mathfrak{A}$, то $\varphi(a \circ x) = \varphi(a) \circ \varphi(x) \in \bar{I}$, так как $\varphi(a) \in \bar{I}$; следовательно, $a \circ x \in I$.

Следствие. Если кольцо \mathfrak{A} удовлетворяет условию минимальности для присоединенных правых идеалов, то и любой гомоморфный образ его также удовлетворяет этому условию.

Следует отметить, что кольцо может не удовлетворять условию минимальности для присоединенных правых идеалов, хотя некоторый его идеал и фактор-кольцо по этому идеалу условию минимальности для присоединенных правых идеалов удовлетворяют.

Лемма 2. Если \mathfrak{F} — некоторое кольцо эндоморфизмов абелевой группы \mathfrak{G} , то совокупность I элементов из \mathfrak{F} , оставляющих инвариантными все элементы некоторого подмножества \mathfrak{N} из \mathfrak{G} , будет присоединенным правым идеалом кольца \mathfrak{F} .

Действительно, если $a, b, c \in I, x \in \mathfrak{F}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, то

$$\alpha(a + b - c) = \alpha a + \alpha b - \alpha c = \alpha + \alpha - \alpha = \alpha,$$

$$\alpha(a \circ x) = \alpha(a + x - ax) = \alpha a + \alpha x - (\alpha a)x = \alpha + \alpha x - \alpha x = \alpha.$$

Лемма 3. Если \mathfrak{F} — плотное кольцо линейных преобразований модуля \mathfrak{M} бесконечного ранга над телом \mathfrak{K} (см., например, (2)), то

\mathfrak{F} не удовлетворяет условию минимальности для присоединенных правых идеалов.

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ — бесконечная линейно независимая над \mathfrak{F} система элементов модуля \mathfrak{M} . Обозначим через I_n присоединенный правый идеал, состоящий из элементов кольца \mathfrak{F} , оставляющих инвариантными элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Очевидно, что $I_1 \supset I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$. Но, кроме того, везде имеет место строгое включение: так как кольцо \mathfrak{F} плотно, то в \mathfrak{F} существует такой элемент a , что $\alpha_i a = \alpha_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$; $\alpha_{n+1} a = 0$; тогда $a \in I_n$, но a не принадлежит I_{n+1} .

Теорема 1. Полупростое кольцо \mathfrak{A} с условием минимальности для присоединенных правых идеалов удовлетворяет и условию минимальности для обычных правых идеалов.

Доказательство. В полупростом кольце \mathfrak{A} (см. ⁽³⁾) существует такая система двусторонних идеалов \mathfrak{B}_τ , что $\bigcap \mathfrak{B}_\tau = (0)$ и все фактор-кольца $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{F}_\tau$ примитивны. По следствию из леммы 1, вместе с \mathfrak{A} все кольца \mathfrak{F}_τ удовлетворяют условию минимальности для присоединенных правых идеалов. По лемме 3, все эти примитивные кольца \mathfrak{F}_τ , так как они являются плотными кольцами линейных преобразований, действуют в конечных модулях и, следовательно, являются простыми кольцами с условием минимальности для правых идеалов.

Выберем из числа всех \mathfrak{B}_τ такое (счетное, если возможно) множество идеалов $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$, что все пересечения $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{B}_n$ различны. В кольце $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n$ система идеалов $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{C}_n$, $i = 1, 2, \dots, n$, обладает нулевым пересечением, а фактор-кольца по этим идеалам примитивны; следовательно (см. ⁽³⁾), кольцо \mathfrak{A}_n полупросто. Докажем, что все кольца \mathfrak{A}_n , $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условию минимальности для обычных идеалов.

Кольцо $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{F}_1$ удовлетворяет этому условию, как указано выше. Пусть это уже доказано для \mathfrak{A}_{n-1} . Кольцо

$$\mathfrak{A}_n / \mathfrak{B}_n / \mathfrak{C}_n = \mathfrak{A}_n / \mathfrak{C}_n / \mathfrak{B}_n / \mathfrak{C}_n \cong \mathfrak{A} / \mathfrak{B}_n = \mathfrak{F}_n$$

удовлетворяет условию минимальности. С другой стороны,

$$\mathfrak{B}_n / \mathfrak{C}_n = \mathfrak{B}_n / \mathfrak{C}_{n-1} \cap \mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{C}_{n-1} / \mathfrak{C}_{n-1} \subseteq \mathfrak{A} / \mathfrak{C}_{n-1} = \mathfrak{A}_{n-1},$$

как идеал вполне приводимого кольца \mathfrak{A}_{n-1} , тоже ему удовлетворяет. Поэтому и само кольцо \mathfrak{A}_n удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов.

Если число выбранных \mathfrak{B}_i конечно, т. е. если некоторое $\mathfrak{C}_n = (0)$, то $\mathfrak{A} (= \mathfrak{A}_n)$ удовлетворяет условию минимальности. Пусть все \mathfrak{C}_n отличны от нуля. Кольца \mathfrak{A}_n , $n = 1, 2, \dots$, содержат единицу e_n . Обозначим через \mathfrak{E}_n ее прообраз в кольце \mathfrak{A} . Известно ⁽¹⁾, что \mathfrak{C}_n — присоединенный двусторонний идеал. Так как все \mathfrak{C}_n различны, то различны и \mathfrak{E}_n , причем они образуют бесконечную убывающую последовательность присоединенных идеалов: если ε_n — представитель смежного класса e_n при гомоморфизме $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n$, то $\mathfrak{E}_n = \varepsilon_n + \mathfrak{C}_n$ и $\mathfrak{E}_{n-1} = \varepsilon_n + \mathfrak{C}_{n-1}$, так как ε_n является представителем и смежного класса e_{n-1} при гомоморфизме $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_{n-1}$, т. е. $\mathfrak{E}_n \supset \mathfrak{E}_{n-1}$. Мы пришли к противоречию и, следовательно, теорема доказана.

Следствие. Если кольцо \mathfrak{A} удовлетворяет условию минимальности для присоединенных правых идеалов, то фактор-кольцо $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ кольца \mathfrak{A} по его радикалу \mathfrak{R} (в смысле Джекобсона ⁽³⁾) удовлетворяет условию минимальности для обычных идеалов.

Кольцо называется присоединенно-простым, если оно не имеет присоединенных двусторонних идеалов. Присоединенно-простые кольца совпадают с кольцами, радикальными в смысле Брауна и МакСойа⁽⁴⁾; действительно, как следует из теорем 1 и 6⁽⁴⁾, радикал в смысле Брауна и МакСойа обладает тем свойством, что фактор-кольцо по нему разлагается в подпрямую сумму простых колец с единицей, т. е. у него существуют гомоморфные отображения на кольца с единицей. Следовательно, если кольцо не совпадает с радикалом, то оно не присоединенно-просто.

Обратное следует из того, что всякое кольцо с единицей можно гомоморфно отобразить на простое кольцо с единицей.

Теорема 2. Кольцо \mathfrak{A} с условием минимальности для присоединенных правых идеалов присоединенно-просто тогда и только тогда, если оно радикально.

Радикальное кольцо присоединенно-просто, так как относительно операции $a \circ b$ оно образует группу. Если же кольцо \mathfrak{A} не радикально, то, ввиду указанного выше следствия, существуют гомоморфные отображения его на простые кольца с условием минимальности (на примитивные компоненты его фактор-кольца по радикалу), т. е. на кольца с единицей, а тогда \mathfrak{A} не присоединенно-просто.

Поступило
1 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Андрунакиевич, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 129 (1948).
² N. Jacobson, Trans. Am. Math. Soc., 57, 228 (1945). ³ N. Jacobson, Am. J. Math., 67, 300 (1945). ⁴ V. Brown and H. McCoy, Am. J. Math., 69, 46 (1947).