В. М. Курочкин

РАСЩЕПЛЕНИЕ АЛГЕБР В ПОЛУПРЯМУЮ СУММУ РАДИКАЛА И ПОЛУПРОСТОЙ ПОДАЛГЕБРЫ

Алгебра $\mathfrak{A}$ над полем P называется *расщепляемой*, если в каждом смежном классе ее по радикалу $\mathfrak{R}$ так можно выбрать по представителю, что они образуют в свою очередь алгебру $\mathfrak{B}$, естественно изоморфную алгебре $\overline{\mathfrak{A}}=\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$, другими словами, если существует разложение в полупрямую сумму

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}+\mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{B}\simeq\overline{\mathfrak{A}}$.

В теории алгебр конечного ранга большое значение имеет теорема о расщепляемости алгебры. Доказанная впервые Веддербарном, эта теорема гласит, что всякая алгебра конечного ранга с сепарабельной фактор-алгеброй по радикалу расщепляема; при этом алгебра называется сепарабельной, если она остается полупростой при любом расширении основного поля.

Одновременно встает вопрос о единственности такого расщепления, если оно существует. Было доказано А. И. Мальцевым [1] для алгебр конечного ранга и обобщено А. И. Тихомировым [2] для алгебр с нильпотентным радикалом и фактор-алгеброй по нему конечного ранга, что если $\overline{\mathfrak{A}}=\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ сепарабельна, то любые два расщепления алгебры переводятся одно в другое внутренним автоморфизмом:

$$a\to a'=a-ax-ya+yax,$$

где $x+y=xy=yx$ и $x,\ y\in\mathfrak{R}$.

В настоящей работе изучаются вопросы расщепляемости и единственности расщепления для алгебр с более слабыми требованиями конечности, причем радикал и полупростота понимаются в смысле Джекобсона*.

1. Если нам дана алгебра $\mathfrak{A}$ и идеал в ней $\mathfrak{R}$, то можно об $\mathfrak{A}$ говорить, как о расширении алгебры $\mathfrak{R}$ при помощи алгебры $\overline{\mathfrak{A}}\simeq\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$; в частности, у нас будет итти речь о расширении радикальных колец при помощи полупростых. Имея дело с а л г е б р а м и над некоторым полем P, можно представить расширение алгебры $\mathfrak{R}$ при помощи $\overline{\mathfrak{A}}$ так: элементами расширения $\mathfrak{A}$ будут пары

$$(a,\ x),\ \text{где}\ a\in\overline{\mathfrak{A}};\quad x\in\mathfrak{R};$$

сложение и умножение на скаляр производятся покомпонентно, а произведение определяется следующим образом:

$$(a,\ x)\ (b,\ y)=(ab,\ u_{a,b}+xR_b+yL_a+xy),$$

где R_b и L_a — образы элементов b и a при линейных отображениях $a\to R_a$ и $a\to L_a$ кольца $\mathfrak{A}$ внутрь кольца эндоморфизмов аддитивной

* См. [3].

группы $\mathfrak{R}$, а $u_{a,b}$ — билинейная функция на кольце $\overline{\mathfrak{A}}$ со значениями из $\mathfrak{R}$. Чтобы полученная алгебра $\mathfrak{A}$ была *ассоциативным кольцом*, должны выполняться, как легко проверить, следующие тождества:

$$\left.\begin{array}{r} \text{I. } (xy)L_a = (xL_a)y, \\ \text{II. } x(yL_a) = (xR_a)y, \\ \text{III. } x(yR_a) = (xy)R_a, \\ \text{IV. } (xR_b)L_a = (xL_a)R_b, \\ \text{V. } L_bL_a = L_{ab} + L_{u_{a,b}}, \\ \text{VI. } R_aR_b = R_{ab} + R_{u_{a,b}}, \\ \text{VII. } u_{a,bc} + u_{b,c}L_a = u_{ab,c} + u_{a,b}R_c, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где R_x и L_x для $x \in R$ обозначают правое и левое умножения на x.

Алгебра $\mathfrak{A}$ будет расщепляемой, если существует такое отображение $a \to f(a)$ алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$ внутрь $\mathfrak{R}$, что

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b); \quad \alpha, \beta \in P; \quad a, b \in \overline{\mathfrak{A}},$$
$$f(ab) = u_{a,b} + f(b)L_a + f(a)R_b + f(a)f(b).$$

Элементы вида $(a, f(a))$ будут образовывать подалгебру $\mathfrak{B}$, изоморфную $\overline{\mathfrak{A}}$, причем элемент $(a, f(a))$ и будет представителем смежного класса a.

2. В дальнейшем на фактор-алгебру по радикалу будет накладываться требование сепарабельности, являющееся естественным обобщением понятия сепарабельности для алгебр конечного ранга.

Определение. Полупростая алгебра $\mathfrak{A}$ над полем P называется *сепарабельной*, если при любом расширении Σ основного поля P все фактор-алгебры алгебры $\mathfrak{A}_\Sigma$ будут полупростыми.

Если полупростая алгебра $\mathfrak{A}$ имеет конечный ранг, то она разлагается в прямую сумму простых алгебр, и, следовательно, новое определение сепарабельности совпадает со старым.

Необходимость такого определения сепарабельности показывает следующий

Пример нерасщепляемого кольца с нильпотентным радикалом и несепарабельной фактор-алгеброй по нему. Пусть $\mathfrak{M}$ — модуль счетного ранга над полем P с базисом

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Полупростой алгеброй будет алгебра $\overline{\mathfrak{A}}$, порожденная всеми конечными линейными преобразованиями модуля $\mathfrak{M}$ (т. е. преобразованиями, переводящими $\mathfrak{M}$ в любой подмодуль конечного ранга) и преобразованием u, определяемым следующим образом:

$$x_{2n-1} \cdot u = x_{2n},$$
$$x_{2n} \cdot u = 0; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

откуда $u^2 = 0$. Все конечные линейные преобразования образуют идеал $\mathfrak{B}$ кольца $\overline{\mathfrak{A}}$, причем $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{B} \cong \{\alpha u\}$, $\alpha \in P$. Радикалом будет нильпотентная алгебра ранга 1 над полем P:

$$\mathfrak{R} = \{\alpha v\}; \quad v^2 = 0; \quad \alpha \in P.$$

Строим расширение $\mathfrak{A}$ радикала $\mathfrak{R}$ при помощи $\overline{\mathfrak{A}}$:

$$R_a = L_a = 0 \text{ для всех } a \in \overline{\mathfrak{A}},$$
$$u_{a,b} = \alpha\beta v, \text{ если } a \equiv \alpha u(\mathfrak{B}); \quad b \equiv \beta u(\mathfrak{B}).$$

Ассоциативный закон выполнен, ибо равенства I—IV из (1) обратятся в $0=0$ ввиду $L_a=R_a=0$; равенства V—VI из (1) удовлетворятся, так как $\mathfrak{R}^2=0$ и, следовательно, $L_{u_a,b}=R_{u_a,b}=0$; наконец, равенство VII даст $0=0$, так как $\overline{\mathfrak{A}}^2=\mathfrak{B}$ и, следовательно, $u_{ab,c}=u_{a,bc}=0$.

Построенное кольцо $\mathfrak{A}$ нерасщепляемо, ибо для искомой функции f должно было бы быть

$$0=f(0)=f(u\cdot u)=u_{u,u}+f(u)L_u+f(u)R_u+f(u)f(u)=u_{u,u}=v\neq 0.$$

Легко видеть, что хотя у построенной нами алгебры $\mathfrak{A}$ фактор-алгебра $\overline{\mathfrak{A}}$, а также все ее расширения $\mathfrak{A}_\Sigma$ полупросты, однако $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{B}$ не полупроста, что в данном случае и является причиной нерасщепляемости алгебры $\mathfrak{A}$. Небольшим изменением примера можно достигнуть того, чтобы причиной нерасщепляемости было бы наличие радикала у некоторой фактор-алгебры расширения $\overline{\mathfrak{A}}_\Sigma$.

3. Рассмотрим вопрос о расщепляемости алгебр в том случае, когда радикал $\mathfrak{R}$ имеет конечный ранг. Предварительно докажем используемую в дальнейшем теорему, в которой конечность ранга не предполагается.

Теорема 1. *Если расширение любой радикальной алгебры $\mathfrak{R}$ со свойством $\mathfrak{R}^2=0$ при помощи данной полупростой алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$ расщепляемо, то расщепляемо и расширение $\mathfrak{A}$ любого нильпотентного радикала $\mathfrak{R}$ при помощи той же алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$.*

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по индексу нильпотентности радикала. Пусть утверждение теоремы доказано уже для случая $\mathfrak{R}^{n-1}=0$; докажем его для n. Рассмотрим $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}/\mathfrak{R}^2$. Радикал $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{B}$ обладает свойством $\mathfrak{S}^2=0$, а $\mathfrak{B}/\mathfrak{S}\cong\overline{\mathfrak{A}}$. Следовательно,

$$\mathfrak{B}=\overline{\mathfrak{B}}+\mathfrak{S},\ \text{где}\ \overline{\mathfrak{B}}\cong\overline{\mathfrak{A}}.$$

Возьмем в $\mathfrak{A}$ полный прообраз $\mathfrak{C}$ алгебры $\overline{\mathfrak{B}}$. Радикалом в $\mathfrak{C}$ будет $\mathfrak{R}^2$, и следовательно, $(\mathfrak{R}^2)^{n-1}=0$. Но тогда, по индуктивному предположению,

$$\mathfrak{C}=\overline{\mathfrak{C}}+\mathfrak{R}^2,\quad \text{где}\ \overline{\mathfrak{C}}\cong\overline{\mathfrak{B}}\cong\overline{\mathfrak{A}}.$$

Мы нашли в $\mathfrak{A}$ подалгебру $\overline{\mathfrak{C}}$, изоморфную $\overline{\mathfrak{A}}$. Доказав, что $\overline{\mathfrak{C}}$ и $\mathfrak{R}$ порождают все $\mathfrak{A}$, мы докажем теорему. Алгебра $\overline{\mathfrak{C}}+\mathfrak{R}=\overline{\mathfrak{C}}+\mathfrak{R}^2+\mathfrak{R}=\mathfrak{C}+\mathfrak{R}$ содержит $\mathfrak{R}^2$ и при отображении $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ отображается на все $\mathfrak{B}$; следовательно,

$$\mathfrak{A}=\overline{\mathfrak{C}}+\mathfrak{R}.$$

Теорема 2. *Расширение радикала $\mathfrak{R}$ конечного ранга над P при помощи сепарабельной алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$, у которой каждый идеал конечного индекса* имеет одностороннюю единицу, расщепляемо.*

Доказательство. По предыдущей теореме можно предположить, что $\mathfrak{R}^2=0$. В тождествах V и VI из (1) ввиду этого будет $L_{u_a,b}=R_{u_a,b}=0$, и, следовательно, они примут такой вид:

$$L_bL_a=L_{ab}\quad \text{и}\quad R_aR_b=R_{ab},$$

т. е. отображения $a\to L_a$ и $a\to R_a$ в данном случае будут обратным и прямым гомоморфизмами в кольцо эндоморфизмов аддитивной группы алгебры $\mathfrak{R}$, т. е. в кольцо матриц конечного порядка. Обозначим пересечение ядер этих гомоморфизмов через $\overline{\mathfrak{C}}$, а фактор-алгебру $\overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{C}}$

* Идеал $\mathfrak{B}$ имеет конечный индекс в алгебре $\mathfrak{A}$, если фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ имеет конечный ранг над P.

через $\overline{\mathfrak{B}}$. Оба ядра имеют конечный индекс в $\overline{\mathfrak{A}}$, а, следовательно, конечный индекс имеет и идеал $\overline{\mathfrak{C}}$, т. е. алгебра $\overline{\mathfrak{B}}$ конечного ранга над P. Пусть $\mathfrak{C}$ будет полным прообразом в $\mathfrak{A}$ идеала $\overline{\mathfrak{C}}$. Алгебра $\mathfrak{C}$ расщепляема. Действительно, из (1) — VII получим такое равенство

$$u_{a,\,bc} = u_{ab,\,c}$$

(так как $R_a = L_a = 0$). $\overline{\mathfrak{C}}$, как идеал конечного индекса, имеет одностороннюю единицу e — пусть правую. Положим

$$f(a) = u_{a,\,e}.$$

Функция f удовлетворяет предъявляемым ей требованиям, ибо она линейна, так как линейна $u_{a,\,b}$, и, кроме того,

$$f(ab) = u_{ab,\,e} = u_{a,\,be} = u_{a,\,b} = u_{a,\,b} + f(b)\,L_a + f(a)\,R_b + f(a)\,f(b),$$

так как последние три слагаемых равны нулю. Имеем, таким образом, разложение для идеала $\mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D} + \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{D} \cong \overline{\mathfrak{C}}.$$

$\mathfrak{D}$ является идеалом в $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}(\mathfrak{D} + \mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\mathfrak{R} = \mathfrak{D}\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$$

и аналогично $\mathfrak{C}\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{D}$ является идеалом в $\mathfrak{A}$: пусть e — правая единица в $\mathfrak{D}$, тогда

$$\mathfrak{D}\mathfrak{A} = (\mathfrak{D}e)\,\mathfrak{A} = \mathfrak{D}\,(e\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{D}\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D},$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{D}e) = (\mathfrak{A}\mathfrak{D})\,e \subseteq \mathfrak{C}e \subseteq \mathfrak{D}.$$

Возьмем фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$. Радикалом в ней будет, ввиду сепарабельности алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$, образ $\mathfrak{R}$, а фактор-алгебра по нему изоморфна $\mathfrak{B}$:

$$\frac{\mathfrak{A}/\mathfrak{D}}{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{A}/\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}/\mathfrak{D}} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{C} \cong \overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{C}} \cong \mathfrak{B}.$$

Так как алгебра $\overline{\mathfrak{B}}$ сепарабельна, то фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$ расщепляема:

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{E}} + \mathfrak{C}/\mathfrak{D}, \text{ где } \mathfrak{C}/\mathfrak{D} \cong \mathfrak{R},\ \overline{\mathfrak{E}} \cong \overline{\mathfrak{B}}.$$

Обозначим через $\mathfrak{E}$ полный прообраз $\overline{\mathfrak{E}}$ в алгебре $\mathfrak{A}$; тогда

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} + \mathfrak{R},$$

так как $\mathfrak{E} + \mathfrak{R} = \mathfrak{E} + \mathfrak{D} + \mathfrak{R} = \mathfrak{E} + \mathfrak{C}$ отображается на все $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{E} \cap (\mathfrak{R} + \mathfrak{D}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{R} = 0$. Теорема доказана.

Имеет место также теорема единственности:

Теорема 3. *Если радикал $\mathfrak{R}$ имеет конечный ранг, а алгебра $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ сепарабельна, то любые два расщепления алгебры $\mathfrak{A}$ переводятся одно в другое внутренним автоморфизмом.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathfrak{R}^2 = 0$. Пусть мы имеем два расщепления

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{R} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}, \tag{2}$$

где $\mathfrak{B}_1 \simeq \mathfrak{B}_2 \simeq \overline{\mathfrak{A}}$. Беря в $\overline{\mathfrak{A}}$ совокупность элементов, для которых $L_a = R_a = 0$, мы, как и в теореме 2, получим идеал $\overline{\mathfrak{C}}$, фактор-алгебра по которому сепарабельна и имеет конечный ранг. Автоматически мы получаем идеалы $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ в $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ соответственно.

1. $\overline{\mathfrak{C}}^2 = \overline{\mathfrak{C}}$. Действительно, $\overline{\mathfrak{C}}^2$ — будет идеалом в $\overline{\mathfrak{A}}$, ибо $\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{C}}^2\,\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{C}})(\overline{\mathfrak{C}}\,\overline{\mathfrak{A}}) \subseteq \overline{\mathfrak{C}}\,\overline{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{C}}^2$.

Если $\overline{\mathfrak{C}} \neq \overline{\mathfrak{C}}^2$, то фактор-кольцо $\overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{C}}^2$ будет содержать нильпотентный идеал $\overline{\mathfrak{C}}/\overline{\mathfrak{C}}^2$, т. е. не будет полупросто и, следовательно, $\overline{\mathfrak{A}}$ не будет сепарабельно.

2. $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$; это множество мы будем обозначать через $\mathfrak{C}$. В самом деле,

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{R}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, мы получим:

$$\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_1\mathfrak{R} + \mathfrak{R}\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{R} + \mathfrak{R}\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{R}^2,$$

а так как $\mathfrak{C}_i\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{C}_i = \mathfrak{R}^2 = 0, \quad \mathfrak{C}_i^2 = \mathfrak{C}_i; \quad i = 1, 2$, то

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2.$$

3. $\mathfrak{C}$ является идеалом кольца $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}\mathfrak{R} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1 + 0 \subseteq \mathfrak{C}.$$

Рассмотрим фактор-кольцо $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}/\mathfrak{C}$. Образы подалгебр $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{R}$ обозначим через $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{S}$.

Так как $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$, то

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{S} = \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{S},$$

где $\mathfrak{E}_1 \simeq \mathfrak{E}_2 \simeq \overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{C}}$, а $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{R}$. Ввиду сепарабельности $\overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{C}}$ из теоремы А. И. Мальцева [1] вытекает, что эти два разложения переводятся одно в другое внутренним автоморфизмом, порождаемым некоторыми элементами $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathfrak{S}$, причем $\overline{x} + \overline{y} = \overline{xy} = \overline{yx}$. Возьмем в качестве прообразов элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ какие-либо элементы x и y из $\mathfrak{R}$. Тогда $x + y - xy \in \mathfrak{R}$, но $x + y - xy$ переходит в 0 в кольце $\mathfrak{D}$, т. е $x + y - xy \in \mathfrak{C}$, а так как $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C} = 0$, то

$$x + y = xy = yx.$$

Рассмотрим соответствие в кольце $\mathfrak{A}$:

$$a \to a - ax - ya + yax.$$

Это соответствие будет внутренним автоморфизмом в $\mathfrak{A}$. Пусть $a \in \mathfrak{B}_1$; тогда образ элемента a будет лежать в $\mathfrak{E}_1$, следовательно, образ элемента $a - ax - ya + yax$ будет лежать в $\mathfrak{E}_2$, т. е. сам элемент $a - ax - ya + yax$, ввиду того, что $\mathfrak{B}_2 \supset \mathfrak{C}$, лежит в подалгебре $\mathfrak{B}_2$.

Пусть теперь $\mathfrak{R}^2 \neq 0$, и пусть теорема уже доказана для того случая, когда индекс нильпотентности радикала меньше n. В расщеплениях (2) теперь $\mathfrak{R}^n = 0$. Рассмотрим алгебру $A = \mathfrak{A}/\mathfrak{R}^2$. Расщеплениями (2) в ней индуцируются два расщепления

$$A = B_1 + R = B_2 + R,$$

где

$$R = \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2; \; B_1 \simeq B_2 \simeq \overline{\mathfrak{A}}.$$

Но так как теперь $R^2 = 0$, то эти расщепления переводятся один в другой внутренним автоморфизмом, порожденным некоторыми элементами $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из R. Возьмем представитель x смежного класса $\overline{x}$ и такой элемент y, что $x + y = xy = yx$. Вследствие того, что y определяется элементом x однозначно, элемент y будет представителем смежного класса $\overline{y}$.

Рассмотрим автоморфизм

$$a \to a - ax - ya + yax$$

в алгебре $\mathfrak{A}$. Он переводит подалгебру $\mathfrak{B}_1$ в некоторую подалгебру $\mathfrak{B}_3$. При гомоморфном отображении $\mathfrak{A}$ на A обе подалгебры $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ переходят в B_2, т. е.

$$\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{R}^2,$$

однако, эти два разложения должны переводиться одно в другое внутренним автоморфизмом, ввиду того, что $(\mathfrak{R}^2)^{n-1} = 0$. В итоге получаем внутренний автоморфизм, переводящий одно расщепление из (2) в другое.

4. Если на радикал алгебры $\mathfrak{A}$ не накладывать никаких ограничений, то даже при сепарабельности и конечности ранга фактор-алгебры по радикалу расщепления может не быть. Более того, можно показать, что для любой сепарабельной алгебры конечного ранга можно найти такое радикальное кольцо, что расширение последнего при помощи выбранной алгебры будет нерасщепляемым.

Мы ограничимся тем случаем, когда фактор-кольцо по радикалу является основным полем.

Пример: Рассмотрим поле $P(x)$ всех рациональных функций от одной переменной x над произвольным полем P. Обозначим $p = x^2 - x$. Функции вида

$$\frac{mp}{np+1},$$

где m и n — многочлены от x, образуют радикальную алгебру $\mathfrak{R}$ над полем P. В самом деле,

$$\alpha\frac{mp}{np+1}+\beta\frac{m_1p}{n_1p+1}=\frac{[\alpha m(n_1p+1)+\beta m_1(np+1]\,p}{(nn_1p+n+n_1)\,p+1};\ \alpha \text{ и } \beta\in P,$$

$$\frac{mp}{np+1}\cdot\frac{m_1p}{n_1p+1}=\frac{(mm_1p)\,p}{(nn_1p+n+n_1)\,p+1};$$

$$\frac{mp}{np+1}\boxed{\cdot}\frac{-mp}{(n-m)\,p+1}=\frac{mp}{np+1}+\frac{-mp}{(n-m)\,p+1}-$$
$$-\frac{mp\,(-mp)}{(np+1)\,[(n-m)\,p+1]}=0.$$

Элементами алгебры $\mathfrak{A}$ будут пары (α, r), где $\alpha\in P$, $r\in\mathfrak{R}$. Определим L_α, R_α и $u_{\alpha,\beta}$: $L_\alpha = R_\alpha$ есть умножение в $\mathfrak{R}$ на αx, $u_{\alpha,\beta}=\alpha\beta p$; легко видеть, что $\alpha\beta p\in\mathfrak{R}$ и результат умножения элемента из $\mathfrak{R}$ на x снова лежит в $\mathfrak{R}$. Проверим ассоциативный закон. Тождества I—IV из (1) будут следовать из справедливости ассоциативного закона в поле рациональных функций $P(x)$.

$$L_\beta L_\alpha = L_{\beta x}\cdot L_{\alpha x} = L_{\alpha\beta x^2},$$

но

$$L_{\alpha\beta}+L_{u_{\alpha,\beta}} = L_{\alpha\beta x}+L_{\alpha\beta p} = L_{\alpha\beta x+\alpha\beta x^2-\alpha\beta x} = L_{\alpha\beta x^2},$$

т. е. равенство V — (1) выполнено. Равенство VI выполняется, так как кольца коммутативные. Проверим равенства VII:

$$u_{\alpha,\beta\gamma}+u_{\beta,\gamma}L_\alpha=\alpha\beta\gamma p+\beta\gamma pL_\alpha=\alpha\beta\gamma\,(1+x)\,p,$$
$$u_{\alpha\beta,\gamma}+u_{\alpha,\beta}R_\gamma=\alpha\beta\gamma p+\alpha\beta pR_\gamma=\alpha\beta\gamma\,(1+x)\,p.$$

Остается доказать, что кольцо $\mathfrak{A}$ нерасщепляемо. Если бы оно было расщепляемым, то в нем лежало бы основное поле. Мы же докажем, что в $\mathfrak{A}$ нет идемпотента: пусть

$$(\alpha, r)(\alpha, r) = (\alpha^2,\ \alpha^2 p + \alpha r x + \alpha x r + r^2) = (\alpha, r).$$

Так как $\alpha^2=\alpha$, то $\alpha=0$ или $\alpha=1$; первое отпадает, так как элемент (α, r) не лежит в радикале $\mathfrak{R}$.

Сравниваем вторые компоненты:

$$p+2xr+r^2=r,$$

т. е.

$$x^2+2xr+r^2=r+x,$$

откуда

$$(x+r)^2=x+r.$$

Опять две возможности:

1. $x+r=0$, т. е. $r=-x$, что невозможно, так как $-x$ не лежит в радикале $\mathfrak{R}$,

2. $x+r=1$, т. е. $r=1-x$; опять невозможно, ибо $1-x$ не лежит в $\mathfrak{R}$.

5. Пример предыдущего параграфа показал, что нельзя получить положительных результатов, не накладывая никаких ограничений на радикал. В дальнейшем мы будем предполагать, что радикал и полупростая фактор-алгебра по нему локально конечны, т. е. что локально конечна вся алгебра $\mathfrak{A}$.

Будем называть алгебру $\overline{\mathfrak{A}}$ над полем P *локально сепарабельной*, если любое конечное множество ее элементов содержится в сепарабельной подалгебре конечного над P ранга.

Лемма. *Локально сепарабельная алгебра $\mathfrak{A}$ сепарабельна.*

Доказательство. Пусть локально конечная алгебра $\mathfrak{A}$ несепарабельна. Это значит, что существует расширение Σ основного поля P, при котором $\mathfrak{A}_\Sigma$ можно гомоморфно отобразить на кольцо с радикалом. Пусть идеал $\mathfrak{B}$ будет ядром этого гомоморфизма. Так как $\mathfrak{A}$ локально конечна, то локально конечными алгебрами над полем Σ будут также $\mathfrak{A}_\Sigma$ и $\mathfrak{A}_\Sigma/\mathfrak{B}$. Но у локально конечной алгебры, в частности у $\mathfrak{A}_\Sigma/\mathfrak{B}$, радикал локально нильпотентен.

Пусть элемент $\bar{a}$ лежит в радикале алгебры $\mathfrak{A}_\Sigma/\mathfrak{B}$ и a — любой прообраз в $\mathfrak{A}_\Sigma$ элемента $\bar{a}$. Элемент a можно представить в виде

$$a=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\ldots+a_n\xi_n,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лежат в $\mathfrak{A}$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ лежат в Σ. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ любую подалгебру конечного ранга, содержащую все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$\mathfrak{A}_{0\Sigma}$ будет расширением алгебры $\mathfrak{A}_0$ при расширении поля P до Σ, а $\mathfrak{R}$ — радикал в $\mathfrak{A}_{0\Sigma}$. Очевидно, $\mathfrak{A}_{0\Sigma}\subseteqq\mathfrak{A}_\Sigma$. Положим $\mathfrak{B}_0=\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_{0\Sigma}$. Тогда

$$\mathfrak{B}_0\cdot\mathfrak{A}_{0\Sigma}=(\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_{0\Sigma})\mathfrak{A}_{0\Sigma}\subseteqq\mathfrak{B}\mathfrak{A}_{0\Sigma}\cap\mathfrak{A}_{0\Sigma}\subseteqq\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_{0\Sigma}=\mathfrak{B}_0;$$

таким образом, $\mathfrak{B}_0$ является идеалом в $\mathfrak{A}_{0\Sigma}$. Далее

$$\frac{\mathfrak{A}_{0\Sigma}}{\mathfrak{B}_0}=\frac{\mathfrak{A}_{0\Sigma}}{\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_{0\Sigma}}\cong\frac{\mathfrak{A}_{0\Sigma}\cup\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\subset\frac{\mathfrak{A}_\Sigma}{\mathfrak{B}},$$

причем радикал алгебры $\mathfrak{A}_{0\Sigma}\cup\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$, т. е. алгебры $\mathfrak{A}_{0\Sigma}/\mathfrak{B}_0$, содержит ввиду локальной нильпотентности радикала алгебры $\mathfrak{A}_\Sigma/\mathfrak{B}$ пересечение алгебры $\mathfrak{A}_{0\Sigma}\cup\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ и радикала алгебры $\mathfrak{A}_\Sigma/\mathfrak{B}$, содержит, следовательно, элемент a и поэтому отличен от нуля. Так как $\mathfrak{A}_{0\Sigma}$ имеет конечный ранг, то из того, что алгебра $\mathfrak{A}_{0\Sigma}/\mathfrak{B}_0$ не полупроста, следует, что и алгебра $\mathfrak{A}_{0\Sigma}$ не полупроста, т. е. что алгебра $\mathfrak{A}_0$ не сепарабельна. Мы показали, что любая подалгебра конечного ранга, содержащая элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, будет несепарабельной, что противоречит предположению о локальной сепарабельности алгебры $\mathfrak{A}$.

Можно доказать следующую теорему о расщепляемости алгебр:

Теорема 4. *Расширение $\mathfrak{A}$ локально нильпотентной алгебры $\mathfrak{R}$ при помощи локально сепарабельной алгебры счетного ранга $\overline{\mathfrak{A}}$ всегда расщепляемо.*

Доказательство. Так как $\overline{\mathfrak{A}}$ имеет счетный ранг, то ее можно представить в виде объединения алгебр $\overline{\mathfrak{A}}_n$ конечного ранга

$$\overline{\mathfrak{A}}_1\subset\overline{\mathfrak{A}}_2\subset\ldots\subset\overline{\mathfrak{A}}_n\subset\ldots,$$

причем, ввиду локальной сепарабельности $\overline{\mathfrak{A}}$, можно все $\overline{\mathfrak{A}}_n$ считать сепарабельными и, следовательно, полупростыми. Возьмем теперь такой базис

$$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots$$

алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$, что k_n первых его элементов $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k_n}}$ образуют базис подалгебры $\overline{\mathfrak{A}}_n$. Выбрав в каждом смежном классе $\overline{a_k}$ по представителю a_k из $\mathfrak{A}$, образуем подалгебры

$$\mathfrak{A}_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}\},$$

порожденные этими представителями в $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ радикал алгебры $\mathfrak{A}_n$. Так как радикал $\mathfrak{R}$ локально нильпотентен, то $\mathfrak{R}_n \supseteq \mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{R}$; однако

$$\frac{\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{R}} \cong \frac{\mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{R}}{\mathfrak{R}} \cong \overline{\mathfrak{A}}_n,$$

а так как $\overline{\mathfrak{A}}_n$ полупросто, то $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{R}$ и

$$\frac{\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{R}} \cong \overline{\mathfrak{A}}_n.$$

Алгебра $\mathfrak{A}_n$ имеет конечный ранг, а $\overline{\mathfrak{A}}_n$ сепарабельна; поэтому, по теореме Веддербарна, алгебра $\mathfrak{A}_n$ расщепляема:

$$\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_n + \mathfrak{R}_n, \text{ где } \mathfrak{B}_n \cong \overline{\mathfrak{A}}_n,$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма. *Пусть дана алгебра $\mathfrak{A}$ конечного ранга с сепарабельной фактор-алгеброй по радикалу $\mathfrak{R}$ и подалгебра $\mathfrak{C}$ с теми же свойствами и с радикалом $\mathfrak{S}$. Тогда для расщепления*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D} + \mathfrak{S}$$

подалгебры $\mathfrak{C}$ можно найти такое расщепление

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{R}$$

алгебры $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{D}$.

В самом деле, возьмем любое расщепление $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{R}$ алгебры $\mathfrak{A}$. Пересечение $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{R}$ подалгебры $\mathfrak{D}$ и радикала $\mathfrak{R}$ состоит только из нуля, так как иначе $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{R}$ содержалось бы в радикале подалгебры $\mathfrak{D}$, которая, однако, полупроста. Подалгебра $\mathfrak{C}$, порожденная $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$, будет поэтому их полупрямой суммой

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D} + \mathfrak{R} \qquad (*)$$

Так как $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, то из разложения $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{R}$ мы получим для $\mathfrak{C}$ другое разложение

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}' + \mathfrak{R}, \text{ где } \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{B}'. \qquad ({*}{*})$$

Алгебра $\mathfrak{D}$ сепарабельна, а поэтому расщепление (**) алгебры $\mathfrak{C}$ переводится в расщепление (*) внутренним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{C}$. Этот автоморфизм естественным образом продолжается до внутреннего автоморфизма всего $\mathfrak{A}$, который переводит $\mathfrak{B}'$ в некоторое $\mathfrak{B}$, причем $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{D}$, что и было нужно.

Применим эту лемму для доказательства теоремы.

Положив $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1'$, мы будем иметь

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{R}_1.$$

Пусть уже найдены такие разложения

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}_i + \mathfrak{R}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

что $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{B}_n$.

Возьмем $\mathfrak{A}_{n+1}$. Так как $\mathfrak{A}_{n+1} \supset \mathfrak{A}_n$ и обе алгебры удовлетворяют условию леммы, то существует такое разложение $\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{B}_{n+1} + \mathfrak{R}_{n+1}$, что $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1}$.

Мы получили возрастающую последовательность

$$\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{B}_n \subset \ldots$$

подалгебр; обозначим их объединение через $\mathfrak{B}$.

Алгебра $\mathfrak{B}$ полупроста, откуда $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{R} = 0$; при гомоморфном отображении $\mathfrak{A}$ на $\overline{\mathfrak{A}}$ подалгебра $\mathfrak{B}$ отображается на все $\overline{\mathfrak{A}}$, а тогда мы имеем расщепление

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{R}.$$

6. Указанная теорема перестает быть справедливой, если отказаться от счетности ранга фактор-алгебры по радикалу. Здесь мы построим пример нерасщепляемой алгебры с локально сепарабельной фактор-алгеброй по радикалу и нильпотентным радикалом $\mathfrak{R}$, причем даже $\mathfrak{R}^2 = 0$.

Пример. В качестве основного поля возьмем любое поле P характеристики 0. Пусть $\mathfrak{m}$ какое-либо несчетное множество. Обозначим через $\mathfrak{M}_{k\alpha}$ кольцо матриц второго порядка с матричными единицами $\varepsilon_{ij}^{(k\alpha)}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $i, j = 1, 2$. Через $\mathfrak{A}_{kl}$ обозначим алгебру ранга 8 с базисными элементами $\varepsilon_{ij}^{(kl)}$, $r_{ij}^{(kl)}$, $k = 1, 2, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots, k$; $i, j = 1, 2$, и таблицей умножения (δ_{jm} — символ Кронекера)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^{(kl)} \cdot \varepsilon_{mn}^{(kl)} &= \delta_{jm} \varepsilon_{in}^{(kl)}, \\
\varepsilon_{ij}^{(kl)} \cdot r_{mn}^{(kl)} &= \delta_{jm} r_{in}^{(kl)}, \\
r_{ij}^{(kj)} \cdot \varepsilon_{mn}^{(kl)} &= \delta_{jm} r_{in}^{(kl)}, \\
r_{ij}^{(kl)} \cdot r_{mn}^{(kl)} &= 0.
\end{aligned}$$

В кольце $\mathfrak{A}_{kl}$ элементы $r_{ij}^{(kl)}$ образуют базис идеала $\mathfrak{R}_{kl}$, который служит радикалом для $\mathfrak{A}_{kl}$, а фактор-алгебра по нему будет матричной алгеброй второго порядка.

Образуем теперь такие прямые произведения над полем P:

$$S_0 = \prod_{\alpha \in \mathfrak{m}} \mathfrak{M}_{0\alpha}$$

$$S_1 = \mathfrak{A}_1 \times \prod_{\alpha \in \mathfrak{m}} \mathfrak{M}_{1\alpha}, \text{ где } \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_{11},$$

. . . .

$$S_n = \mathfrak{A}_n \times \prod_{\alpha \in \mathfrak{m}} \mathfrak{M}_{n\alpha}, \text{ где } \mathfrak{A}_n = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_{ni},$$

. . . .

Определим вложение S_{n-1} внутрь S_n; полагаем

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}^{(n-1,\,\varphi)} = \varepsilon_{11}^{(n\varphi)};\ \varepsilon_{12}^{(n-1,\,\varphi)} = \varepsilon_{12}^{(n\varphi)} + r_{12}^{(nn)}\,\varepsilon_{12}^{(n\varphi)}; \\
&\varepsilon_{21}^{(n-1,\,\varphi)} = \varepsilon_{21}^{(n\varphi)} - r_{12}^{(nn)}\,\varepsilon_{21}^{(n\varphi)};\ \ \varepsilon_{22}^{(n-1,\,\varphi)} = \varepsilon_{22}^{(n\varphi)}; \\
&\qquad (\varphi = \alpha \text{ или } 1, 2, \ldots). \\
&r_{11}^{(n-1,\,i)} = r_{11}^{(ni)};\ r_{12}^{(n-1,\,i)} = r_{12}^{(ni)} + r_{12}^{(nn)}\,r_{12}^{(ni)}; \\
&r_{21}^{(n-1,\,i)} = r_{21}^{(ni)} - r_{12}^{(nn)}\,r_{21}^{(ni)};\ \ r_{22}^{(n-1,\,i)} = r_{22}^{(ni)},
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

вкладывая $\mathfrak{M}_{n-1,\alpha}$ внутрь $\mathfrak{A}_{nn} \times \mathfrak{M}_{n\alpha}$ и $\mathfrak{A}_{n-1,i}$ внутрь $\mathfrak{A}_{ni} \times \mathfrak{A}_{nn}$.
Такое вложение отдельных множителей дает вложение всей алгебры S_{n-1}, так как эти множители перестановочны. Действительно, если мы возьмем $a_{ij}^{(n-1,\,\varphi)}$ и $b_{ke}^{(n-1,\,\psi)}$, где под a и b подразумеваются буквы ε или r, а под φ и ψ — либо целые числа, либо индексы из $\mathfrak{m}$,

то при $\varphi \neq \psi$ в новые выражения для $a_{ij}^{(n-1, \varphi)}$ и $b_{ke}^{(n-1, \psi)}$ будут входить $a_{ij}^{(n\varphi)}$ и $b_{ke}^{(n\psi)}$ и, быть может, $r_{12}^{(nn)}$; однако $\varphi \neq n \neq \psi$ и, следовательно, все эти элементы будут перестановочными.

Объединение всех S_n обозначим через S. Пусть R будет радикалом алгебры S. Как объединение локально конечных алгебр, S локально конечно, и, следовательно, радикал R локально нильпотентен. Нужной нам алгеброй $\mathfrak{S}$ будет фактор-алгебра алгебры S по квадрату радикала:

$$\mathfrak{S} \cong S/R^2.$$

Образ радикала R будет радикалом $\mathfrak{R}$ алгебры $\mathfrak{S}$.

Алгебра $\mathfrak{S}$, являясь фактор-алгеброй алгебры S, будет локально конечной алгеброй, квадрат радикала которой равен нулю и у которой фактор-алгебра по радикалу локально сепарабельна. Действительно, она, что легко видеть, разлагается в прямое произведение матричных колец. Остается доказать, что алгебра $\mathfrak{S}$ нерасщепляема. Допустим, что $\mathfrak{S}$ расщепляема, т. е. что

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R} + \mathfrak{B}.$$

Выберем для каждого элемента из $\mathfrak{B}$ представитель в соответствующем смежном классе по радикалу в S; так как мы имеем дело с алгебрами, то это можно, очевидно, сделать так, чтобы эти представители образовывали подмодуль B. Тогда для аддитивной группы алгебры S получим прямое разложение

$$S = R + B. \tag{4}$$

Чтобы не усложнять последующего изложения, будем вести все рассуждение не для $\mathfrak{S}$, а для S, однако, по модулю R^2 (если специально не оговорено противное), понимая, в частности, под выражениями «элементы равны», «элементы перестановочны» и т. д. те же выражения со словами «по модулю R^2». Тогда написанное выше равенство (4) можно рассматривать как полупрямую кольцевую сумму, т. е. как расщепление.

Рассмотрим теперь алгебру $\overline{S}$, получающуюся объединением алгебр $\overline{S}_n$:

$$\overline{S}_0 = \prod_{\alpha \in \mathfrak{m}} \mathfrak{M}_{0\alpha},$$

$$\overline{S}_n = \prod_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{A}}_{ni} \times \prod_{\alpha \in \mathfrak{m}} \mathfrak{M}_{n\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\overline{\mathfrak{A}}_{ni} = \mathfrak{A}_{ni}/\mathfrak{R}_{ni}$. Вложение $\overline{S}_{n-1}$ в $\overline{S}_n$ достигается отождествлением матричных единиц с одинаковыми нижними индексами из $\mathfrak{A}_{n-1, i}$ и $\mathfrak{A}_n$, из $\mathfrak{M}_{n-1, \alpha}$ и $\mathfrak{M}_{n\alpha}$.

Если мы в алгебре S положим $R = 0$, то получим, с одной стороны, $\overline{S}$, а с другой — B. Таким образом, $\overline{S} \cong B$ (по модулю R^2!); соответствие это обозначим через φ. $\overline{S}$ разлагается в прямое произведение конечных алгебр; $\overline{\mathfrak{A}} = \prod_n \overline{\mathfrak{A}}_{nn}$ содержится в $\overline{S}$ и отщепляется от $\overline{S}$ прямым множителем. С каждым элементом a из $\overline{\mathfrak{A}}$ можно связать некоторое конечное множество индексов α: берем $\varphi(a)$ и если оно уже содержится в S_n, то записываем $\varphi(a)$ соответственно разложению $S_n = \mathfrak{A}_n \times \prod \mathfrak{M}_{n\alpha}$ и отмечаем те α, которые затронуты этим разложением. От выбора индекса n это множество не зависит, ибо при вложении S_n в S_{n+1} каждое $\mathfrak{M}_{n\alpha}$ вкладывается в $\mathfrak{A}_{n+1} \times \mathfrak{M}_{n+1,\alpha}$, т. е. новых индексов α появиться не может. Объединение всех этих конечных множеств даст некоторое не более чем счетное множество $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$. Множество $\mathfrak{n}$ не более чем счетно, так как алгебра $\mathfrak{A}$ имеет счетный ранг над P. Обозначим через $\mathfrak{N}$ прямой множитель, отщепляющийся от $\overline{S}$ и состоящий из $\overline{\mathfrak{A}}$ и из всех $\mathfrak{M}_{n\alpha}$, у которых $\alpha \in \mathfrak{n}$. Пусть $N = \varphi(\mathfrak{N})$. Так как $B \cong \overline{S}$, то N должно отщепляться от B прямым множителем (с точностью до R^2), причем $B \neq N$, так как N имеет счетный ранг, а B — несчетный. Посмотрим, что из себя представляет второй множитель, дополнительный для N.

Пусть элемент $a \in B$ коммутирует со всеми элементами из N. Если $a \in S_n$, то

$$a = \sum p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} \varepsilon_{i_1 j_1}^{(n\alpha_1)} \ldots \varepsilon_{i_k j_k}^{(n\alpha_k)} + r, \tag{5}$$

где $p_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^{i_1 j_1\ldots i_k j_k} \in P$; $r \in R$; $i, j = 1, 2$ и под $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ подразумеваются для простоты записи как индексы α из множества $\mathfrak{m}$, так и целочисленные индексы первых множителей в разложении S_n. Если мы будем рассматривать a не как элемент алгебры S_n, а как элемент S_m, $m > n$, то в записи (5), как показывают формулы (3), заменятся индексы n на m и изменится элемент радикала r.

Будем вести сначала сравнение по модулю R; другими словами, речь будет идти о перестановочности образа элемента a в $\overline{S}$ со всеми элементами, входящими в $\mathfrak{N}$. В этом случае a должен лежать в дополнительном для $\mathfrak{N}$ множителе, что будет тогда, и только тогда, если ни один из вторых нижних индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не входит в $\mathfrak{n}$ и не является целым числом, т. е. $\alpha_i \in \mathfrak{m} - \mathfrak{n}$.

Дальнейшие сравнения ведем по модулю R^2. Элемент a должен коммутировать с $\varphi\left(\varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)}\right) = \varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} + s$, где $s \in R$; запишем a в виде $b + r$, где b — «главная часть» формулы (5), а $r \in R$. Тогда

$$(b+r)\left(\varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} + s\right) \equiv \left(\varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} + s\right)(b+r) \pmod{R^2}$$

или

$$\left(b\varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} - \varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} b\right) + (bs - sb) + \\ + \left(r\varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} - \varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} r\right) + (rs - sr) \in R^2.$$

Начнем с конца. Последнее слагаемое $rs - sr$ лежит в R^2. Исследуем предпоследнее. Мы знаем, что $r \in S_n$. При вложении S_n в S_{n+1} запись для r изменится в соответствии с (3); оттуда же следует, что в новой записи для r изменяются индексы n на $n+1$ и, возможно, добавляются слагаемые, которые, однако, лежат в R^2. В первом случае слагаемые будут перестановочны с $\varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)}$, во втором они перестановочны по модулю R^2, так как просто лежат в R^2. Рассмотрим теперь второе слагаемое $bs - sb$. Пусть $s \in S_m$, $m \geqslant n$; если мы будем рассматривать b как элемент алгебры S_m, то новая его запись будет отличаться от старой тем, что помимо тех же одночленов, но с индексом m вместо n, в сумму будут входить еще элементы из радикала. Последние, будучи умножены на s, попадут в R^2, а первые перестановочны с s, так как s связан с элементом $\varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)}$ и, следовательно, имеет индексами либо целые числа, либо элементы $\alpha \in \mathfrak{n}$, элемент же b, в качестве «главной части» элемента a, имеет индексы α только из $\mathfrak{m} - \mathfrak{n}$.

Из всего этого следует, что

$$b\varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} - \varepsilon_{11}^{(n+1,\, n+1)} b \in R^2.$$

Возьмем разложение элемента b в S_{n+1}, заменив по правилам (3) множители, из которых составлены одночлены в b. У нас получится сумма одночленов следующих видов:

1. Те же слагаемые, что и в (5), но с заменой индекса n на индекс $n+1$: $\varepsilon_{i_1 j_1}^{(n+1, \alpha_1)} \ldots \varepsilon_{i_k j_k}^{(n+1, \alpha_k)}$.

2. Слагаемые, получающиеся из одночленов (5) заменой одного множителя $\varepsilon_{12}^{(n\, \alpha_l)}$ на $r_{12}^{(n+1, n+1)} \varepsilon_{12}^{(n+1, \alpha_l)}$.

3. Слагаемые, получающиеся из одночленов (5) заменой одного множителя $\varepsilon_{21}^{(n\alpha_l)}$ на $-r_{12}^{(n+1, n+1)} \varepsilon_{21}^{(n+1, \alpha_l)}$.

4. Слагаемые, содержащие два или больше множителей $r_{12}^{(n+1, n+1)}$ и, следовательно, равные нулю, так как $(r_{12}^{(n+1, n+1)})^2 = 0$.

Слагаемые типа 1 все отличны как друг от друга, так и от слагаемых типов 2 и 3. Каждый из этих слагаемых перестановочен с $\varepsilon_{11}^{(n+1, n+1)}$. Слагаемые типов 2 и 3 будут совпадать тогда, и только тогда, если они получены из одного и того же одночлена разложения (5). Из них слагаемые типа 2 будут со знаком $+$, а типа 3 — со знаком $-$; в итоге для каждого одночлена $\varepsilon_{i_1 j_1}^{(n\alpha_1)} \ldots \varepsilon_{i_k j_k}^{(n\alpha_k)}$ получим слагаемое

$$tr_{12}^{(n+1, n+1)} \varepsilon_{i_1 j_1}^{(n+1, \alpha_1)} \ldots \varepsilon_{i_k j_k}^{(n+1, \alpha_k)},$$

где t равно разности числа пар (1,2) и числа пар (2,1) среди нижних индексов одночлена. Если $t \neq 0$, то это слагаемое не будет коммутировать с $\varepsilon_{11}^{(n+1, n+1)}$, так как

$$r_{12}^{(n+1, n+1)} \varepsilon_{11}^{(n+1, n+1)} = 0, \varepsilon_{11}^{(n+1, n+1)} r_{12}^{(n+1, n+1)} = r_{12}^{(n+1, n+1)}.$$

Следовательно, в записи любого одночлена в (5) числа пар (1,2) равно числу пар (2,1). Дальнейшее проводится, как у А. Г. Куроша [4]: доказывается, что никакие четыре элемента с этой особенностью не могут являться матричными единицами. С этой целью вводится «свободный член» — то слагаемое в записи (5), которое принадлежит P. Свободные члены при сложении и умножении элементов нашего вида соответственно складываются и умножаются. Обозначив тогда через a_{ij} свободные члены матричных единиц (в предположении, что последние существуют), мы получим противоречие: $a_{11}a_{22} = 0$; если $a_{11} = 0$, то из $a_{11} + a_{22} = 1$ следует $a_{22} = 1$; $a_{21}a_{22} = 0$, следовательно, $a_{21} = 0$, но тогда $1 = a_{22} = a_{21}a_{12} = 0 \neq 1$.

Дополнительный для N множитель разлагался в произведения матричных колец, и в то же время в нем, как доказано, не может быть матричных единиц. Выход один — алгебра $\mathfrak{S}$ нерасщепляема.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Мальцев А. И. О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры. ДАН, **36**, (1942), 46—50.

[2]. Тихомиров А. И. Обобщение теоремы Мальцева о расщепляемых алгебрах. ИАН, сер. матем., 11 (1947), 47—66.

[3] Jacobson N. The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. Journ. Math., **67** (1945), 300—320.

[4] Курош А. Г. Direct decompositions of simples rings. Матем. сб., 11 (53), (1942), 245—264.