Работа посвящена актуальной проблеме прогноза распространения взвешенных веществ на шельфе морей. Рассматривается задача моделирования переноса полидисперсных взвешенных веществ в тех случаях, когда размер ареала их распространения значительно превышает глубину акватории. Разработана экономичная двумерная методика расчета, учитывающая особенности взаимодействия взвеси с дном, ее фракционный состав и вертикальное положение источника взвеси. Предложен воспроизводящий «закон 4/3» Ричардсона стохастический метод дискретных облаков, сочетающий достоинства стохастического метода дискретных частиц и метода дискретных облаков. Метод тестирован путем сравнения результатов расчетов с точным решением модельной задачи о рассеянии шлейфа загрязнения, порождаемого непрерывно действующим точечным источником взвеси. С целью демонстрации работоспособности и качества предложенной вычислительной методики проводится расчет распространения облаков минеральной взвеси, образующихся в акватории Азовского моря. Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и научных сотрудников, занимающихся математическим моделированием.

Взвешенные вещества на шельфе

Юлия Юрезанская
Владимир Котеров

Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе

Теория и практика моделирования

LAP LAMBERT Academic Publishing

Юлия Юрезанская

Юрезанская Юлия Сергеевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник в Вычислительном центре им. А. А. Дородницына РАН, Москва. Котеров Владимир Николаевич, кандидат физико- математических наук, ведущий научный сотрудник в Вычислительном центре им. А. А. Дородницына РАН, Москва.

978-3-8443-5430-0

Юлия Юрезанская, В. Котеров

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Классические задачи моделирования распространения взвешенных веществ (ВзВ) в турбулентном потоке представляют интерес с двух точек зрения. Во-первых, с теоретической точки зрения они является простейшим примером явлений, связанных с таким важным и до конца не изученным феноменом, как турбулентность. Во-вторых, с практической точки зрения интерес к подобным задачам в последнее время значительно повысился, в частности, в связи с необходимостью проведения оценок влияния разнообразных антропогенных воздействий на водные биоресурсы (так называемые задачи ОВОС). Потребность в таких оценках возникает, например, при планировании строительства буровых платформ на океаническом шельфе, при прокладке подводных трубопроводов, при проведении углубления дна во время ремонтно-восстановительных работ по очистке от наносов внутрипортовых акваторий и судоходных каналов портов, при осуществлении сброса (дампинга) грунта на дно окраинных и внутренних морей и т.п. Нормативные документы, в принципе, накладывают весьма жёсткие требования на качество используемых для подобных оценок математических моделей. Например, согласно этим документам в контрольных створах, расположенных на расстояниях порядка 250 – 500 м от источника загрязнения, полная концентрация минеральной взвеси не должна превышать величины 1 мг/л, в то время как эта величина вблизи источника обычно составляет 100 г/л и более.

В настоящее время наиболее глубокие теоретические рассмотрения процесса турбулентного рассеяния ВзВ проводятся с привлечением аппарата стохастических дифференциальных уравнений (см., например, [1]) и даже методов квантовой теории поля (например, [2]). Однако при решении практических задач, в которых необходимо моделировать процесс распространения различных ВзВ в водной среде, основой являются более традиционные уравнения математической физики.

При описании распространения ВзВ можно выделить две качественно различные области, а именно «ближнюю зону», пространственный масштаб которой коррелирует с размером объекта, загрязняющего акваторию (например, водовыпуска из гидротехнического сооружения, земснаряда, проводящего дноуглубительные работы, и т.п.), и включающую контрольные створы «дальнюю зону», размер которой существенно превышает характерный размер ближней зоны.

В ближней зоне концентрации ВзВ велики и моделирование их переноса требует, вообще говоря, привлечения систем нелинейных уравнений динамики многофазных сред (см., например, [3]). В дальней зоне, рассмотрению которой посвящена настоящая работа, концентрации субстанций существенно уменьшаются как за счёт процесса турбулентного перемешивания, так и в результате возможного осаждения их твёрдых фракций. При этом ВзВ испытывают пассивную дисперсию (см., например, [4]) и могут рассматриваться как динамически не влияющая на фоновое поле скорости жидкости примесь, перенос которой определяется лишь заданной величиной скорости течения и интенсивностью турбулентной диффузии в акватории. Более того, в дальней зоне применим принцип суперпозиции. Последнее означает, что распространение взвеси можно представить в виде движения совокупности отдельных невзаимодействующих «облаков», порождаемых мгновенными точечными источниками загрязнения. Эти облака движутся сквозь водную толщу под воздействием местных течений и, возможно, осаждаются на дно. В процессе движения они увеличиваются в размере за счёт горизонтальной турбулентной диффузии, а концентрации взвешенных веществ в них падают. Концентрация взвеси C в произвольной точке $\mathbf{r}$ акватории при этом представляется в виде суммы концентраций пассивной примеси $C^j(\mathbf{r}, t - t_0)$ в отдельных облаках, включающих данную точку в рассматриваемый момент времени t (t_0 – момент возникновения облака).

Например, для протяжённого во времени и неподвижного точечного источника полидисперсной взвеси, начинающего действовать в момент времени $t = 0$,

$$C(\mathbf{r},t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{N} C^j(\mathbf{r},t-t_0)\,dt_0, \quad t > 0,$$

где j – номер фракции загрязняющего вещества, а N – количество фракций.

Для описания распространения ВзВ в дальней зоне может быть использовано трёхмерное уравнение переноса и диффузии, иногда называемое транспортно-диффузионной моделью. Однако, во многих представляющих интерес для практики случаях использование трёхмерного численного моделирования для решения задач переноса ВзВ, по меньшей мере, неоправданно или затруднительно, так как

- размер ареала распространения ВзВ существенно превышает глубину акватории,
- количество различных фракций вещества велико,
- скорости осаждения этих фракций могут отличаться на много порядков,
- значения концентраций в контрольных створах, надёжный расчёт которых должна обеспечить численная модель, на пять и более порядка отличаются от концентрации взвеси у источника загрязнения,
- отсутствует детальная информация о вертикальных распределениях параметров водного потока.

В практических целях часто рассматриваются двумерные (усреднённые по глубине) модели, исходящие из следующего интегрального соотношения:

$$\frac{\partial H\overline{C}^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[H\left(\overline{u_i C^j} + \overline{J}_i^j\right)\right] + J_z^j(H) = 0,$$

$$\overline{C}^j = \frac{1}{H}\int_0^H C^j dz, \quad \overline{J}_i^j = \frac{1}{H}\int_0^H J_i^j dz, \quad \overline{u_i C^j} = \frac{1}{H}\int_0^H u_i C^j dz. \tag{1}$$

Здесь и далее $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ – горизонтальные декартовы координаты, z – вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности к дну водоёма, $H=H(\mathbf{x})$ – локальная глубина акватории, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=(u_1, u_2)$ – скорость горизонтального течения, J_i^j – компоненты горизонтального диффузионного потока взвеси, определяемые эффектами турбулентного обмена, $J_z^j(H)$ – поток частиц к дну акватории. Черта сверху здесь и везде ниже означает усреднение по глубине акватории, а по повторяющемуся индексу $i = 1, 2$ предполагается суммирование.

Полная усреднённая по глубине концентрация $\overline{C}$ частиц, находящихся во взвешенном состоянии, и изменение погонной (на единицу площади) массы взвеси m, отлагающейся на дно, определяются выражениями

$$\overline{C} = \sum_{j=1}^{N} \overline{C}^{\,j}, \qquad \frac{\partial m}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} J_z^j(H).$$

Интегральное соотношение (1) является точным следствием закона сохранения массы взвеси. Обычно в расчётах приближённо полагают $\overline{u_i C^j} = \overline{u}_i \overline{C}^{\,j}$, $J_z^j(H) = W_j \overline{C}^{\,j}$, где W_j – так называемая гидравлическая крупность j-й фракции частиц взвеси (скорость осаждения рассматриваемой фракции в спокойной воде, когда отсутствует вертикальный турбулентный обмен). Тогда имеет место следующее двумерное «усреднённое по глубине» уравнение переноса и диффузии ВзВ (см., например, [5]):

$$\frac{\partial H\overline{C}^{\,j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[H\left(\overline{u}_i \overline{C}^{\,j} + \overline{J}_i^{\,j}\right)\right] + W_j \overline{C}^{\,j} = 0, \quad \overline{u}_i = \frac{1}{H}\int_0^H u_i dz. \quad (2)$$

Однако такой подход не всегда является приемлемым. Уравнение (2), в частности, не учитывает вертикальный турбулентный обмен, крайне существенный для частиц малой гидравлической крупности W_j. Нет возможности учёта особенностей взаимодействия отлагающихся частиц с дном акватории, а также учёта влияния на процесс конкретного положения рассматриваемого источника загрязнения над дном акватории.

Практическая цель настоящей работы состоит в разработке, обосновании и реализации двумерной («усреднённой по глубине») математической модели и эффективной вычислительной методики для прогноза распространения загрязняющих взвешенных веществ (ВзВ) сложного фракционного состава на шельфе окраинных и внутренних морей, учитывающих отмеченные выше особенности изучаемого явления. Кроме того, следует принимать во внимание, что

- поле скорости течения может иметь сложный, пространственно неоднородный и реверсивный характер;
- имеет место зависимость коэффициента горизонтального турбулентного обмена от размера диффундирующего объекта (например, обнаруженный в 1926 г. Ричардсоном «закон 4/3» рассеяния компактного облака примеси в турбулентной атмосфере [6], часто справедливый и для горизонтальной океанической турбулентности [7]);
- время действия антропогенных источников ВзВ может быть велико (от нескольких суток до нескольких месяцев).

Разрабатываемая модель и вычислительная методика последовательно основываются на понятии мгновенного точечного источника ВзВ и применении принципа суперпозиции для описания переноса взвеси от непрерывного и/или пространственно распределённого источника.

Оказывается (глава 2 настоящей работы), что в случае мгновенного точечного источника распространение усреднённой по глубине концентрации полидисперсной взвеси в дальней зоне может быть описано с помощью двумерного (усреднённого по глубине) уравнения переноса и диффузии для монодисперсной примеси, но с зависящей от времени скоростью осаждения этой примеси. Последняя величина, названная «эффективной гидравлической крупностью полидисперсной взвеси», зависит от гранолуметрического состава реального ВзВ, от интенсивности вертикального турбулентного перемешивания, от особенностей взаимодействия взвеси с дном акватории и от конкретного положения источника над дном акватории. Для её определения нужно решить N одномерных эволюционных задач (N – количество фракций).

Подход, связанный с введением понятия мгновенного точечного источника, позволяет также сравнительно просто учитывать присущие реальной океанической турбулентности особенности горизонтального турбулентного рассеяния (глава 3, пп. 3.1 – 3.3).

Эта же идея, по существу, является основой двух известных и обсуждаемых в п. 3.4 настоящей работы бессеточных численных методов решения задачи переноса ВзВ. Оба метода обладают как достоинствами, так и недостатками. В настоящей работе (п. 3.5) предлагается численный подход, сочетающий, как нам представляется, достоинства обоих методов. Подход тестируется на модельных задачах переноса ВзВ в турбулентном потоке (пп. 3.7).

С целью демонстрации работоспособности и качества предложенной математической модели и численного метода проводится расчёт одной реальной задачи ОВОС: моделирование распространения минеральной взвеси, образующихся в южной части акватории Азовского моря в процессе утилизации (дампинга) грунта, изъятого при проведении ремонтных работ в порту Темрюк. Результаты этого вычислительного эксперимента демонстрируют работоспособность и достаточную экономичность разработанной методики моделирования переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе.

Глава 1. Основы математического моделирования транспорта и диффузии пассивной примеси в морской среде

Данная глава носит вспомогательный (обзорный) характер. В ней кратко формулируется уравнение переноса и турбулентной диффузии, даются необходимые сведения о коэффициентах турбулентного обмена на океаническом шельфе, а также приводятся некоторые формулы, определяющие зависимость скорости осаждения монодисперсного ВзВ от характерного диаметра его частиц.

1.1. Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии

При моделировании турбулентного переноса пассивной примеси в океанологии широко используют так называемое полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии, получаемое следующим образом (см., например, [8], [4]). Компоненты скорости потока u_i, $i = 1, 2, 3$, и концентрацию примеси C представляют в виде стохастических полей

$$u_i = \langle u_i \rangle + u_i', \quad C = \langle C \rangle + C',$$

где угловыми скобками отмечены средние значения величин, а штрихами – пульсационные добавки. Далее предполагают, что отдельные реализации стохастических полей удовлетворяют следующему уравнению сохранения

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial C u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial C(u_3 + W)}{\partial z} = 0, \qquad (1.1.1)$$

в котором t – время; x_1, x_2 – горизонтальные декартовы координаты; выделенная вертикальная координата $z = x_3$ отсчитывается в направлении вектора силы тяжести, а $W = \text{const}$ – скорость осаждения примеси, называемая также гидравлической крупностью её частиц (молекулярной диффузией обычно можно пренебречь). Уравнение (1.1.1) усредняют по ансамблю возможных реализаций, считая, что выполняются определённые правила, в классической теории турбулентности известные под названием правил усреднения Рейнольдса. Возникающие при этом средние от произведений пульсационных добавок моделируют с помощью гипотезы градиентного переноса

$$\left\langle u_i' C' \right\rangle = -\sum_{j=1}^{3} K_{ij} \frac{\partial \left\langle C \right\rangle}{\partial x_j}, \quad K_{ij} = K_{ji}\,. \tag{1.1.2}$$

Входящий в (1.1.2) симметричный тензор K_{ij} , $i, j = 1, 2 ,3$, носит название тензора турбулентной диффузии (или турбулентного обмена). Считается (см., например, [8]), что в естественных условиях из-за наличия вертикальной плотностной стратификации воды появляется возможность разделить процесс турбулентного перемешивания на горизонтальную турбулентную диффузию и вертикальный турбулентный обмен. Тогда тензор турбулентного обмена может быть несколько упрощён, и получающееся в результате описанной выше процедуры полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии записывается в виде[1)]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial C\left(u_3 + W\right)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial C}{\partial z}\,. \tag{1.1.3}$$

Здесь скаляр K_z – так называемый коэффициент вертикальной турбулентной диффузии, а величины K_{ij} , $i, j = 1, 2$, образуют симметричный тензор горизонтального турбулентного обмена.

Если рассматривается диффузия изотропных в горизонтальной плоскости образований, то, основываясь на представлении об изотропии горизонтальной турбулентности, часто полагают $K_{ij} = K_{xy} \cdot E_{ij}$, где скаляр K_{xy} – коэффициент горизонтального турбулентного обмена, а $E_{i,j}$ – единичный тензор.

[1)] Угловые скобки у средних величин опущены; по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2$ здесь и далее предполагается суммирование.

1.2. Характерные значения вертикального и горизонтального коэффициента турбулентной диффузии

Оценки величин K_z и K_{xy} в океане могут осуществляться путём сопоставления результатов наблюдений с решениями упрощённых вариантов уравнения (1.1.3).

Для коэффициента вертикальной турбулентной диффузии на континентальном шельфе типичны значения $K_z \sim 10^{-4} \div 10^{-2}$ м^2/с [8]. Стратификация воды в глубоких водоёмах или глубина хорошо перемешанного водоёма ограничивают максимальный вертикальный размер турбулентных вихрей. Поэтому для теоретического расчёта коэффициента K_z применимы хорошо известные модели макроскопической турбулентности, начиная от модели «пути перемешивания» Прандтля и кончая современными многопараметрическими полуэмпирическими моделями, учитывающими, в частности, и вертикальную стратификацию воды (см., например, [9]). В настоящей работе при проведении расчётов для коэффициента вертикальной диффузии будет использовано одно из простейших, но часто применяемых (см., например, [10], [11][2]) приближений:

$$K_z = k_* \left(1 - \frac{z}{H} + \Delta\right)\left(0.4 + 0.6\frac{z}{H}\right), \quad k_* = \frac{u_*}{\kappa}, \quad \Delta = \frac{z_0}{H}. \quad (1.2.1)$$

Здесь H – глубина, u_* – динамическая скорость в пограничном слое у дна водоёма, $\kappa = 0.4$ – постоянная Кармана, z_0 – шероховатость поверхности дна.

Оценки коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии K_{xy} показывают, что эта величина существенным образом зависит от масштаба изучаемого явления. Так согласно данным, приводимым в [8], для лучшего согласия натурных данных с результатами расчётов общей циркуляции вод Тихого океана приходится использовать значения $K_{xy} \sim 10^8$ м^2/с. С другой стороны, исследования диффузии примеси в атолле Бикини привели к

[2] Отметим, что в этих работах вертикальная координата z отсчитывалась от дна к поверхности водоёма, а не от поверхности к дну, как было принято выше.

значению $K_{xy} \sim 10^1$ м^2/с (см. [8]). Данный эффект означает, что коэффициенты горизонтального турбулентного обмена в уравнении (1.1.3) в рассматриваемых случаях не могут считаться мгновенными функциями локального состояния потока. Это существенно снижает прогностическую ценность уравнения (1.1.3) и, вообще говоря, вызывает сомнение в возможности использования для горизонтальных турбулентных потоков гипотезы градиентного переноса (1.1.2).

Проблема моделирования горизонтального турбулентного рассеяния ВзВ на океаническом шельфе обсуждается в главе 3 настоящей работы.

1.3. Зависимость гидравлической крупности взвеси от характерного диаметра её частиц

При диаметрах частиц взвеси $D \leq 100$ мкм их гидравлическая крупность W (скорость осаждения) может быть рассчитана с помощью формулы Стокса:

$$W = \frac{gD^2}{18\nu}\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right), \tag{1.3.1}$$

где g – ускорение свободного падения, ρ_s – плотность вещества частицы, а ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость воды.

Однако, формула (1.3.1) справедлива лишь в случае ламинарного обтекания осаждающихся частиц, когда число Рейнольдса $\mathrm{Re} = WD/\nu$ достаточно мало. Поэтому она существенно завышает значения W для частиц фракций, крупнее 100 мкм.

Обтекание крупных частиц, для которых число Re велико, происходит в турбулентном режиме. В пределе Re→∞ сила сопротивления не зависит от коэффициента вязкости ν и из соображений размерности для скорости осаждения таких частиц может быть получено выражение (см., например, [12])

$$W = \sqrt{\frac{4gd}{3C}\frac{\rho_s}{\rho}}\,. \tag{1.3.2}$$

Здесь C – эмпирическая постоянная по экспериментальным данным равная $C = 0.45$.

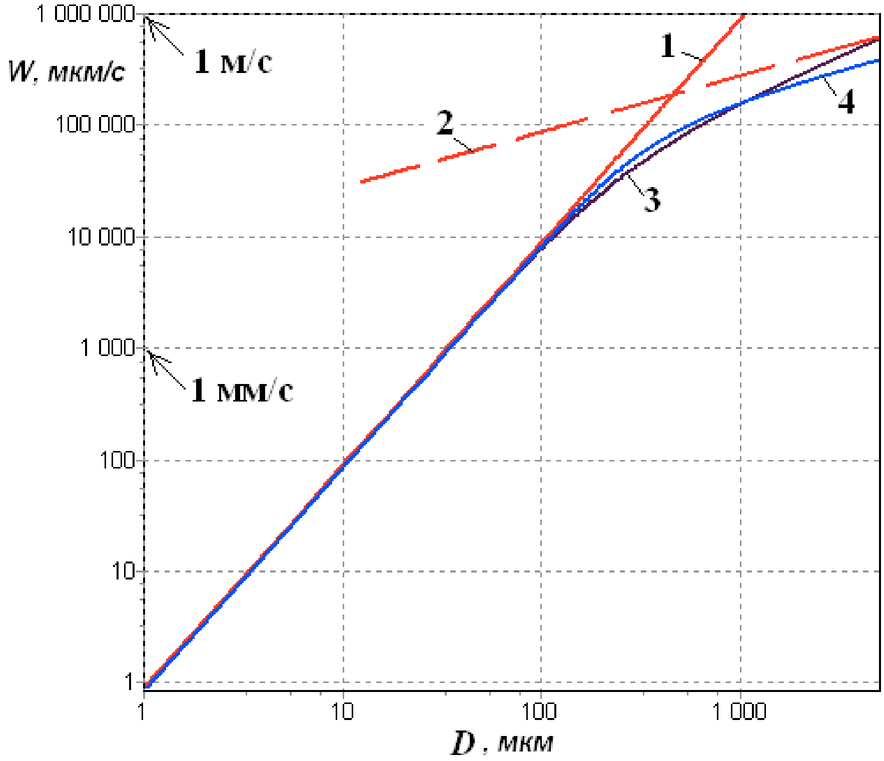


Рис. 1.3.1. Расчётная гидравлическая крупность в зависимости от диаметра частиц фракции ($\rho_s/\rho = 2.65$).
1 – формула Стокса (1.3.1), 2 – формула (1.3.2),
3 – формула (1.3.3), 4 – формула (1.3.4)

Известно довольно много полуэмпирических формул, равномерно пригодных в широком диапазоне диаметров частиц. Например, одна из таких формул имеет вид (см. [13])

$$W = \frac{gD^2}{18\nu}\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)\frac{1}{1 + 0.15\mathrm{Re}^{0.687}}. \qquad (1.3.3)$$

Формула (1.3.3) неудобна тем, что расчёт W с её помощью приходится проводить итерационным способом. Существуют эмпирические формулы, свободные от этого недостатка, например,

$$W=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{36\nu}{D}\right)^2+7.5\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)Dg\right]^{1/2}-\frac{36\nu}{D}\right\} \tag{1.3.4}$$

Четыре приведённые выше формулы сопоставляются на Рис. 1.3.1.

Глава 2. Усреднённая по глубине транспортно-диффузионная модель. Эффективная гидравлическая крупность полидисперсной взвеси

В главе рассматривается задача переноса полидисперсного ВзВ в тех случаях, когда размер ареала его распространения существенно превышает глубину акватории. Показывается, что даже при существенном влиянии вертикального турбулентного обмена, задача расчёта эволюции загрязняющих полидисперсных ВзВ, порождаемых мгновенным точечным источником, может быть сведена к интегрированию небольшой совокупности одномерных эволюционных задач и решению одной пространственно двумерной задачи для монодисперсной взвеси. Вводится понятие эффективной гидравлической крупности полидисперсной взвеси.

2.1. Постановка задачи для случая мгновенного точечного источника

При предположении, что процесс турбулентного перемешивания можно разделить на горизонтальный турбулентный обмен и вертикальную турбулентную диффузию (см., например, [8]), трёхмерное уравнение и начальное условие для определения в дальней зоне динамики изменения концентрации G^i j-й фракции взвеси, порождаемой действием мгновенного точечного источника, может быть записано в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial G^j}{\partial t} + \frac{\partial u_i G^j}{\partial x_i} + \frac{\partial \left(u_z + W_j\right) G^j}{\partial z} + \frac{\partial J_i^j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial G^j}{\partial z} = 0, \\
G^j = M_j \, \delta(\mathbf{x}) \delta(z - z_0) \quad \text{при} \quad t = 0, \\
G^j \to 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \to \infty.
\end{gathered} \tag{2.1.1}$$

Здесь u_z – вертикальная компонента скорости течения, J_i^j – компоненты горизонтального турбулентного потока взвеси, K_z – коэффициент вертикальной турбулентной диффузии, M_j – начальная масса взвеси, δ – дельта функция Дирака, z_0 – вертикальная координата источника взвеси. Считается, что источник взвеси расположен в точке $\mathbf{x} = 0$ и действует в момент времени $t = 0$.

На поверхности акватории поток взвеси отсутствует, поэтому

$$W_j G^j - K_z \, \partial G^j \big/ \partial z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \, .$$

Краевое условие на дне водоёма зависит от режима взаимодействия осаждающегося вещества с поверхностью дна. В общем случае оно записывается в виде

$$W_j G^j - K_z \, \partial G^j \big/ \partial z = W_j \beta_j G^j \quad \text{при} \quad z = H(\mathbf{x}), \qquad (2.1.2)$$

где β_j – параметр, который по терминологии [14] может быть назван безразмерным «коэффициентом массоотдачи» к дну или безразмерным коэффициентом адсорбции.

Значения параметра β_j зависят от адсорбирующих свойств поверхности дна. При полностью адсорбирующей поверхности $\beta_j = \infty$ (т.е. на дне вместо (2.1.2) должны выставляться условия $G^j = 0$). Иногда (см. [15]) на дне постулируются условия отсутствия диффузионных потоков $\partial G^j \big/ \partial z = 0$, что соответствует значению $\beta_j = 1$. Предельным случаем является значение $\beta_j = 0$, когда полностью отсутствует поток взвеси к дну (дно является полностью неадсорбирующей поверхностью). Отметим также, что случай $\beta_j < 0$ соответствует режиму «взмучивания» взвеси, уже отложившейся на дне. В настоящей работе он не рассматривается.

Далее примем следующие допущения.

1. Глубина акватории меняется достаточно медленно:

$$\left| \partial H / \partial x_i \right| << 1, \quad i = 1{,}2 \, .$$

2. Реализуется так называемый «режим мелкой воды» и коэффициент вертикальной турбулентной диффузии K_z во всей рассматриваемой области представим в виде $K_z = k_* H K(\xi), \quad \xi = z/H$, где постоянная k_* – характерная скорость вертикальной диффузии, которую в некоторых случаях можно отождествить с так называемой динамической скорость u_* в пограничном слое у дна водоёма ($k_* = u_*/\kappa$, где $\kappa = 0.4$– постоянная Кармана), ξ – безразмерная вертикальная координата, а $K(\xi)$ – безразмерный коэффициент вертикальной турбулентной диффузии.

3. Компоненты u_i горизонтальной скорости $\mathbf{u}$ не зависят от вертикальной координаты z, т.е. представлены в виде $u_i = \bar{u}_i(\mathbf{x}, t)$.

4. Зависимости компонент J_i^j горизонтального турбулентного потока взвеси от распределения её концентрации C^j даются линейными операторами, также не зависящими от вертикальной координаты z: $J_i^j = \bar{J}_i\left[C^j\right]$. При использовании традиционной для рассматриваемых задач гипотезы горизонтального градиентного турбулентного переноса, которая представляется применимой в рассматриваемом здесь случае мгновенного точечного источника ВзВ (см. ниже п. 3.1, 3.2) $J_i^j = -K^T(\mathbf{x}, t)\partial C^j / \partial x_i$, где K^T – усреднённый по вертикали коэффициент горизонтального турбулентного обмена. Однако в случае свободной горизонтальной турбулентности гипотеза градиентного турбулентного переноса не всегда является физически оправданной. Например, в случае протяжённого во времени источника ВзВ операторы $\bar{J}_i\left[C^j\right]$, оставаясь линейными, могут иметь более сложную структуру (см. [16], [17] и п. 3.1 настоящей работы).

При зависящей от времени скорости потока $\mathbf{u}$ допущение 2, предполагающее постоянство динамической скорости в пограничном слое на дне водоёма во всей расчётной области, довольно жёсткое. Оно выполняется, например, если характерное время изменения модуля скорости горизонтального потока превосходит время рассеяния облака загрязнения. Можно полагать, что оно также приближённо выполняется на океаническом шельфе, когда течение обусловлено приливными процессами, эксцентриситет годографа скорости течения невелик и модуль скорости потока меняется не слишком сильно.

Допущения 3 и 4 тоже представляются достаточно жёсткими. Однако отметим здесь, что на практике детальная информация о пространственном распределении скорости потока, как правило, отсутствует. Более того, часто необходимое для расчётов переноса взвеси поле скорости **u** получают путём численного моделирования, основанного на использовании двумерных гидродинамических уравнений «мелкой воды». Результаты этих расчётов, также предполагающих, строго говоря, выполнение допущения 1, воспроизводят лишь усреднённые по вертикали распределения горизонтальной скорости течения в акватории. Отметим также, что ограничения, накладываемые допущением 3 на применимость разрабатываемой модели, могут быть частично сняты путём введения в уравнение усреднённой по глубине транспортно-диффузионной модели дополнительного диффузионного члена (см. п. 3.3 настоящей работы).

Сделанные допущения позволяют в первом приближении пренебречь в (2.1.1) вертикальной компонентой u_z скорости потока и представить рассматриваемую задачу в следующем виде, аналогичном (1), (2) (см. Введение):

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})G^j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{H(\mathbf{x})\left(\bar{u}_i(\mathbf{x},t)G^j+\bar{J}_i\left[G^j\right]\right)\right\}=-k_*\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\varepsilon_j G^j-K(\xi)\frac{\partial G^j}{\partial \xi}\right],$$

$$G^j=\frac{M_j}{H(0)}\delta(\mathbf{x})\delta(\xi-\xi_0) \quad \text{при} \quad t=0,$$

$$\varepsilon_j G^j-K(\xi)\frac{\partial G^j}{\partial \xi}=0 \quad \text{при} \quad \xi=0 \quad (\text{на поверхности}), \tag{2.1.3}$$

$$\varepsilon_j G^j-K(\xi)\frac{\partial G^j}{\partial \xi}=\varepsilon_j\beta_j G^j \quad \text{при} \quad \xi=1 \quad (\text{на дне}).$$

Здесь $H(0)$ – глубина акватории в точке сброса, ξ_0 – безразмерная вертикальная координата источника взвеси, а $\varepsilon_j = W_j / k_*$ – безразмерный параметр, равный отношению скорости осаждения частиц взвеси к характерной скорости вертикальной турбулентной диффузии. На практике значения последнего параметра могут меняться в крайне широких пределах. Предел $\varepsilon_j \to 0$ соответствует случаю мелкой не осаждающейся (т.н. консервативной) взвеси. При $\varepsilon_j \to \infty$ (крупная взвесь) можно пренебречь вертикальным турбулентным перемешиванием.

Определим оператор усреднения концентраций по глубине обычным образом:

$$\overline{G}^{\,j} = \int_0^1 G^j(\mathbf{x}, t, \xi)\, d\xi\,, . \tag{2.1.4}$$

Ниже будут сформулированы уравнения и начальные условия, которым должна удовлетворять величина полной концентрации $\overline{G} = \sum_{j=1}^{N} \overline{G}^{\,j}$.

2.2. Разложение по вертикальным диффузионным модам

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\varepsilon_j Z_n^j - K(\xi)\frac{dZ_n^j}{d\xi}\right] = \lambda_n^j Z_n^j\,, \tag{2.2.1а}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_j Z_n^j - K(0)\frac{dZ_n^j}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0\,, \\ \varepsilon_j Z_n^j - K(1)\frac{dZ_n^j}{d\xi} = \varepsilon_j \beta_j Z_n^j \quad \text{при} \quad \xi = 1\,. \end{gathered} \tag{2.2.1б}$$

Помножением обеих частей уравнения (2.2.1а) на величину

$$\rho^j(\xi) = \exp\left[-\varepsilon_j \int_0^{\xi} K^{-1}(\xi')d\xi'\right]$$

спектральную задачу (2.2.1) можно свести к классической задаче Штурма – Лиувилля для уравнения с самосопряжённым оператором

$$-\frac{d}{d\xi}\left[p^j(\xi)\frac{dZ_n^j}{d\xi}\right] = \lambda_n^j \rho^j(\xi) Z_n^j\,, \quad p^j(\xi) = \rho^j(\xi)K(\xi)$$

и краевыми условиями (2.2.1б).

Известно (см., например, [18]), что при $p^j(\xi) \geq const > 0$ [3)] эта задача имеет счётное число однократных неотрицательных собственных чисел $\lambda_n^j = \lambda_n^j(\varepsilon_j, \beta_j)$, $n=0,1,\ldots$, параметрически зависящих от ε_j и β_j (ниже предполагается, что λ_n^j упорядочены по возрастанию). При этом собственные функции $Z_n^j = Z_n^j(\xi; \varepsilon_j, \beta_j)$, называемые далее вертикальными диффузионными модами, образуют полную систему, причём имеет место следующее соотношение ортогональности:

$$\left(Z_n^j, Z_m^j\right) = \int_0^1 Z_n^j(\xi) Z_m^j(\xi) \rho^j(\xi) d\xi = \delta_{nm}\,, \qquad (2.2.2)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера.

Будем отыскивать решение задачи (2.1.3) в виде следующего ряда:

$$G^j = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^j(\mathbf{x}, t) Z_n^j(\xi)\,, \quad G_n^j = \left(G^j, Z_n^j\right). \qquad 2.2.3)$$

Подставляя разложение (2.2.3) в (2.1.3) и используя соотношение ортогональности (2.2.2), с учётом (2.2.1а) легко получить уравнения для коэффициентов G_n^j этого разложения:

---

3) В некоторых случаях допускаются также особенности (в частности, обращение в нуль) коэффициентов на границах интервала $0<\xi<1$.

$$\frac{\partial H G_n^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{ H\left(\bar{u}_i G_n^j + \bar{J}_i\left[G_n^j\right]\right)\right\} + k_* \lambda_n^j G_n^j = 0\,,$$
$$G_n^j = \frac{M_j}{H(0)}\delta(\mathbf{x}) Z_n^j(\xi_0)\rho^j(\xi_0) \quad \text{при} \quad t = 0\,. \tag{2.2.4}$$

Согласно (2.2.3) усреднённое по глубине акватории распределение полной концентрации взвеси $\overline{G}$ может быть найдено путём следующего суммирования:

$$\overline{G} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} G_n^j(\mathbf{x},t)\overline{Z}_n^j\,, \quad \overline{Z}_n^j = \int_0^1 Z_n^j\left(\xi; \varepsilon_j, \beta_j\right) d\xi \tag{2.2.5}$$

Приведём далее некоторые результаты аналитических исследований спектральной задачи (2.2.1).

В общем случае неоднородного по глубине распределения коэффициента вертикальной диффузии $K(\xi)$ задача (2.2.1) может быть решена только с помощью численных методов. Но при однородном распределении, когда $K = 1$, можно получить следующее аналитическое решение:

$$\lambda_n^j = \varepsilon_j^2 / 4 + \left(\omega_n^j\right)^2, \quad Z_n^j(\xi) = \frac{\varepsilon_j \sin\left(\omega_n^j \xi\right) + 2\omega_n^j \cos\left(\omega_n^j \xi\right)}{\left(D_n^j\right)^{1/2}} \exp\left(\frac{\varepsilon_j \xi}{2}\right),$$
$$D_n^j = \frac{\varepsilon_j^2}{2} + 2\left(\omega_n^j\right)^2 + \frac{2}{\omega_n^j}\left[\left(\omega_n^j\right)^2 - \frac{\varepsilon_j^2}{4}\sin\omega_n^j \cos\omega_n^j\right] + 2\varepsilon_j^2 \sin^2\omega_n^j\,.$$

Здесь ω_n^j – положительные корни уравнения

$$\frac{4\beta_j \omega_n^j \varepsilon_j}{4\left(\omega_n^j\right)^2 - \left(2\beta_j - 1\right)\varepsilon_j^2} = \operatorname{tg}\omega_n^j\,. \tag{2.2.6}$$

При $\beta_j > 0$ это уравнение имеет счётное число положительных корней, отстоящих друг от друга примерно на π, причём минимальный положительный корень ω_0^j находится в диапазоне $0 < \omega_0^j < \pi$ (см. Рис. 2.2.1).

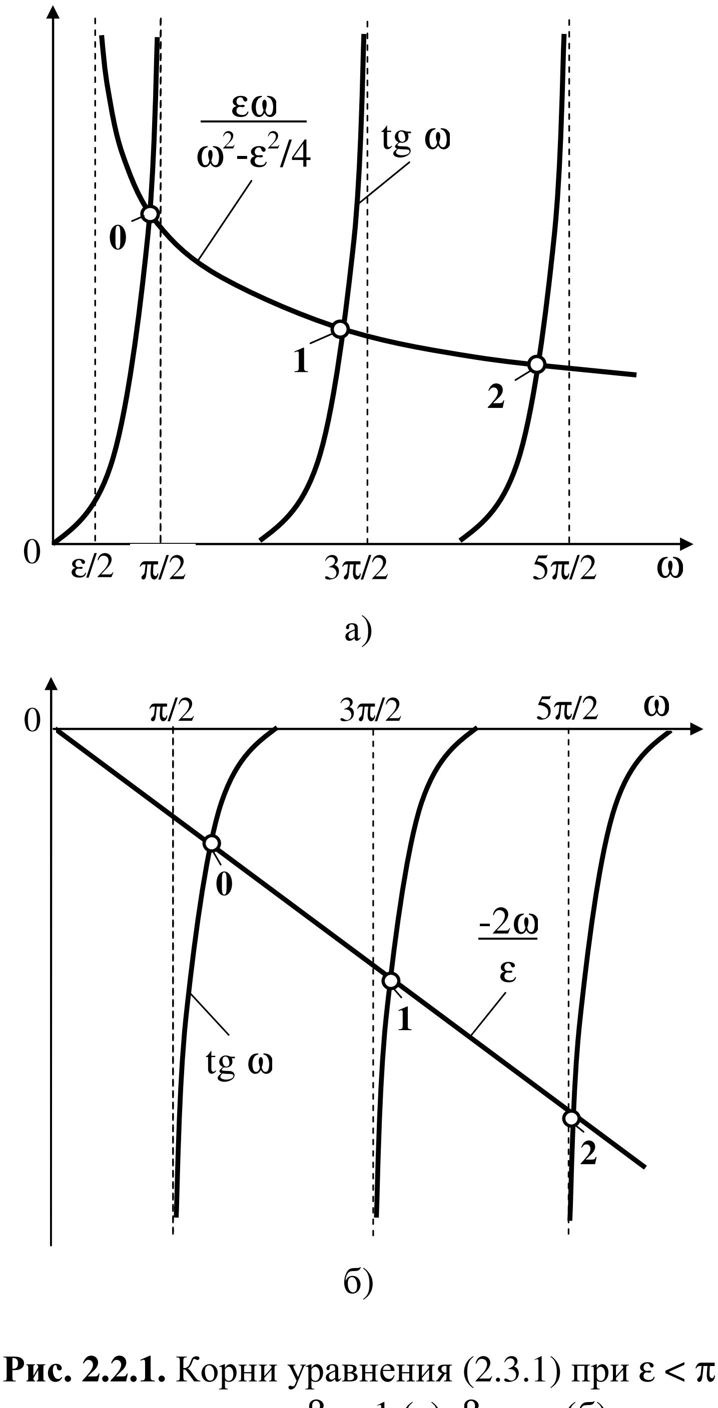


Рис. 2.2.1. Корни уравнения (2.3.1) при $\varepsilon < \pi$ для случаев $\beta_j = 1$ (а), $\beta_j = \infty$ (б)

При фиксированном значении параметра β_j и $\varepsilon_j \to 0$ для главного собственного числа λ_0^j может быть получено следующее асимптотическое разложение:

$$\lambda_0^j = \beta_j \varepsilon_j + \frac{1}{6}\beta_j \left(3 - 2\beta_j\right)\varepsilon_j^2 + O\left(\varepsilon_j^3\right). \qquad (2.2.7)$$

Данное разложение не является регулярным при $\beta_j \to \infty$. Не приводя результатов детального анализа, укажем, что при $\beta_j = \infty$ (полностью адсорбирующая поверхность дна) и $\varepsilon_j \to 0$

$$\lambda_0^j = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \varepsilon_j + \frac{\varepsilon_j^2}{4} + O\left(\varepsilon_j^3\right). \qquad (2.2.8)$$

Графики зависимостей $\lambda_0^j\left(\varepsilon_j\right)$ для случаев $\beta_j = 1$, $\beta_j = \infty$ и асимптотик (2.2.7), (2.2.8) (штриховые кривые) приведены на Рис. 2.2.2.

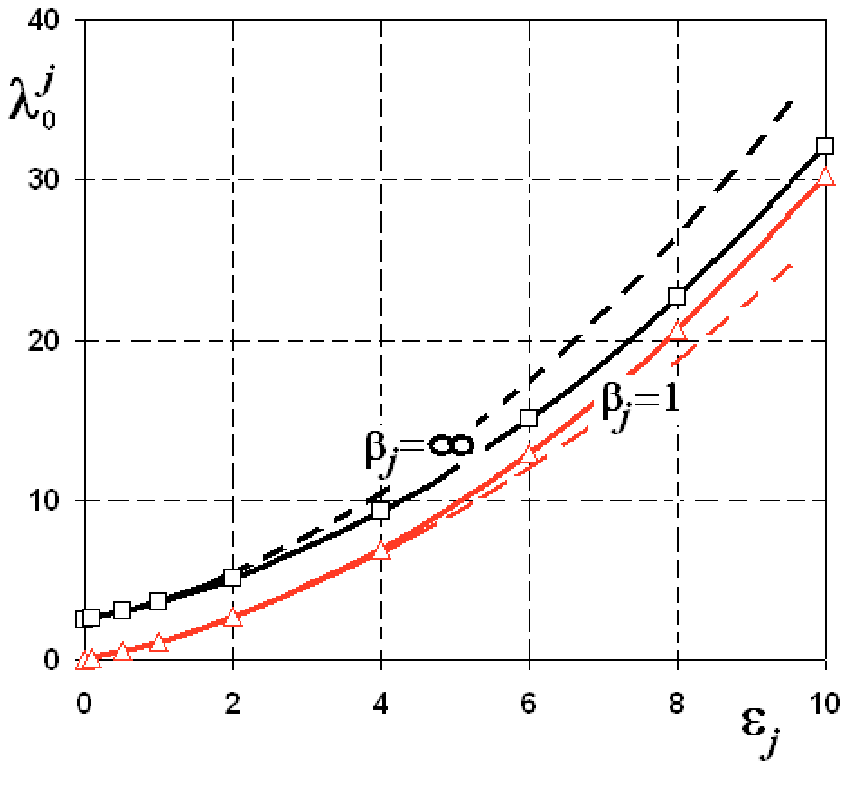


Рис. 2.2.2. Зависимость главного собственного числа от параметров ε_j и β_j

Приведём далее несколько графиков, иллюстрирующих «устройство» собственных функций спектральной задачи (2.2.1).

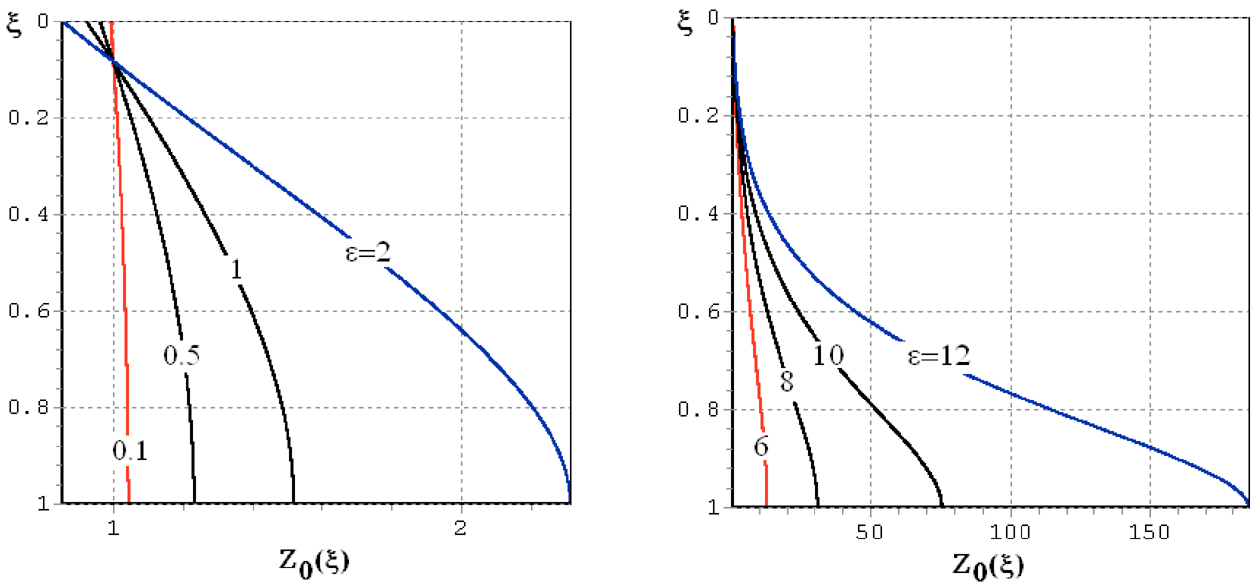


Рис. 2.2.3. Главные вертикальные диффузионные моды для неадсорбирующей поверхности ($\beta_j = 1$)

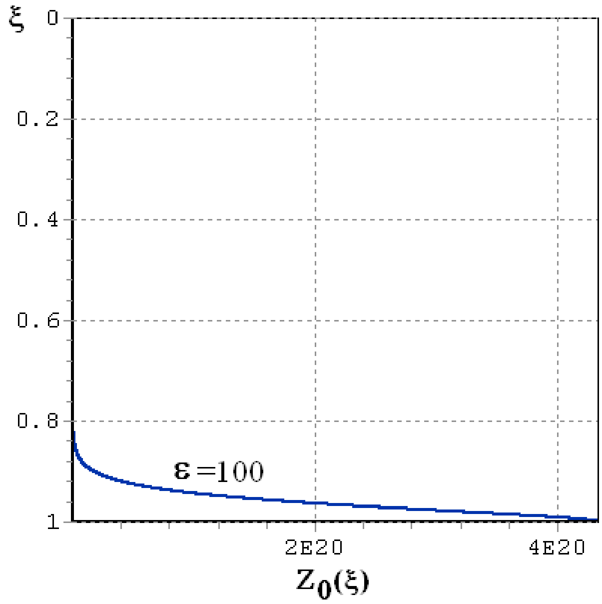


Рис. 2.2.4. Главная мода при ε = 100 для неадсорбирующей поверхности ($\beta_j = 1$)

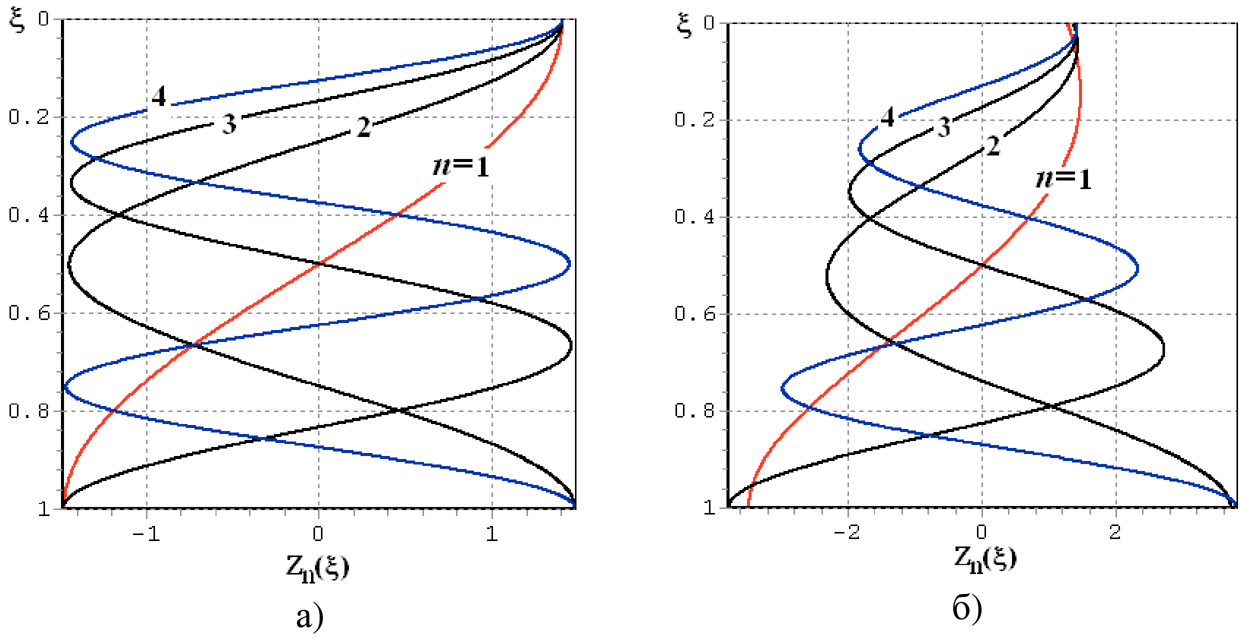


Рис. 2.2.5. Высшие вертикальные диффузионные моды для неадсорбирующей поверхности ($\beta_j = 1$) при $\varepsilon = 0.1$ (а) и $\varepsilon = 2$ (б)

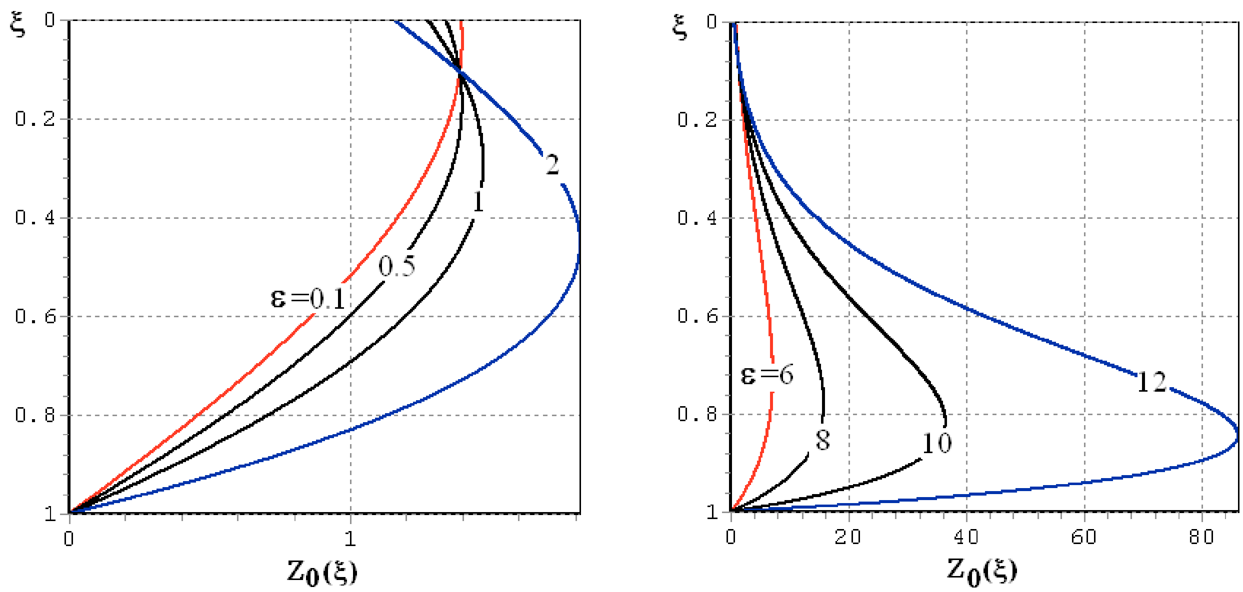


Рис. 2.2.6. Главные вертикальные диффузионные моды для адсорбирующей поверхности ($\beta_j = \infty$)

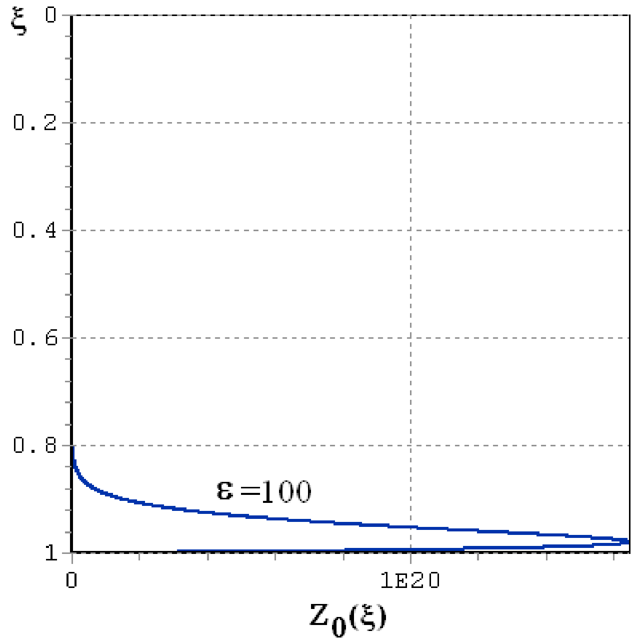


Рис. 2.2.7. Главная мода при ε = 100 для адсорбирующей поверхности ($\beta_j = \infty$)

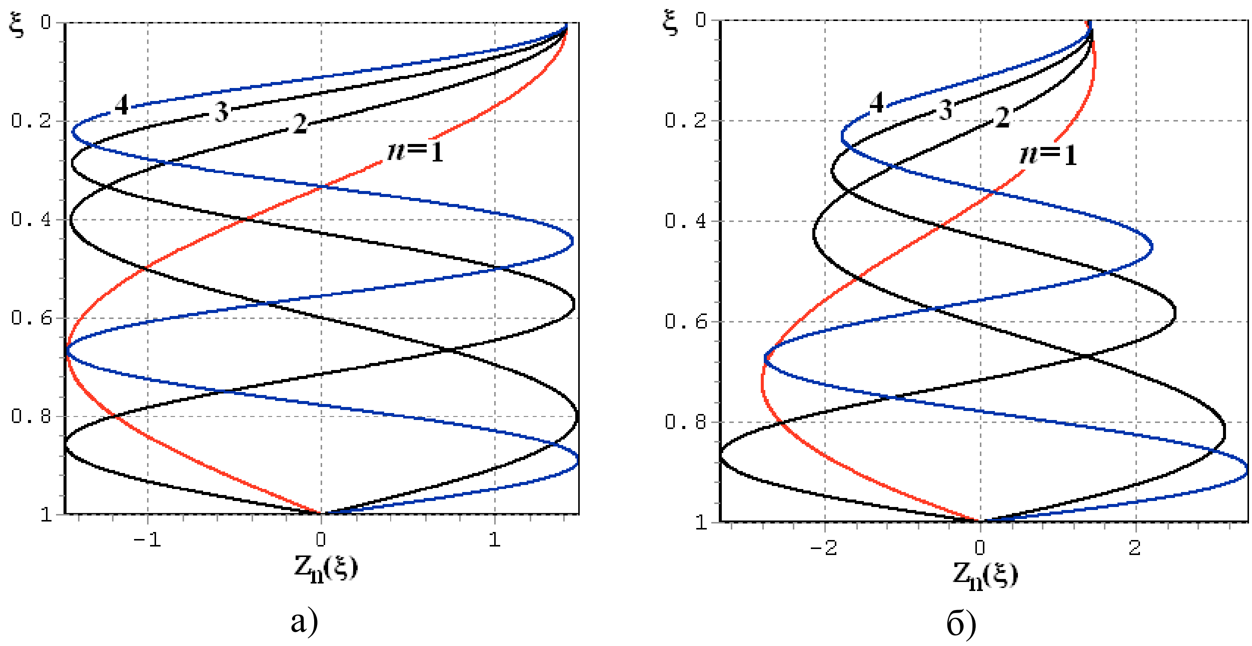


Рис. 2.2.8. Высшие вертикальные диффузионные моды для адсорбирующей поверхности ($\beta_j = \infty$) при ε = 0.1 (а) и ε = 2 (б)

На Рис. 2.2.3 представлены эпюры главной вертикальной диффузионной моды для нескольких значений параметра ε для неадсорбирующей поверхности ($\beta_j = 1$). При малых значениях ε мода практически однородна ($Z_0(\xi) \sim 1$). При больших значениях ε она также однородна практически всюду, за исключением пограничного слоя вблизи дна, толщина которого уменьшается с увеличением ε (Рис. 2.2.4). На Рис. 2.2.5 представлены эпюры высших вертикальных диффузионных мод для двух значений параметра ε.

На Рис. 2.2.6 представлены эпюры главной вертикальной диффузионной моды для нескольких значений параметра ε для адсорбирующей поверхности ($\beta_j = \infty$). Видно, что при больших значениях ε вблизи дна должен формироваться пограничный слой, толщина которого уменьшается с увеличением ε (Рис. 2.2.7). На Рис. 2.2.8 представлены эпюры высших вертикальных диффузионных мод для двух значений параметра ε.

2.3. Об асимптотике решения для больших моментов времени

Можно видеть, что решения задач (2.2.4) экспоненциально стремятся к нулю при $t \to \infty$, причём в разложении (2.2.3) наиболее медленно затухают компоненты G_0^j, отвечающие минимальным собственным числам λ_0^j, которые можно назвать безразмерной гидравлической крупностью фракции j с поправкой на вертикальный турбулентный обмен (см. (2)). Иными словами, при $t \to \infty$ в сумме (2.2.5) главным является член с номером фракции $j = j_m$, доставляющим минимум величине λ_0^j [4)]. Эти соображения позволяют в ряде случаев отыскивать форму шлейфа загрязнения спустя достаточно большое время после сброса загрязняющих веществ путём численного интегрирования единственного двумерного уравнения переноса и диффузии (2.2.4) для фракции, доставляющей минимум величине λ_0^j.

Если возникает необходимость расчёта полного количества взвеси,

---

4) Можно отметить, что номер j_m не обязательно должен отвечать фракции с минимальной гидравлической крупностью (т.е. с минимальным значением параметра ε_j), так как величина λ_0^j зависит ещё и от параметра β_j, учитывающего особенности взаимодействия отлагающейся взвеси с дном акватории.

отлагающейся на дно, и концентрации взвешенных веществ в течение всего времени существования шлейфа, то необходимо суммировать ряды (2.2.3), (2.2.5). Исследования случая $K = 1$ показывают, что при $\varepsilon_j < 1$ ряд (2.2.3) и внутренний ряд в (2.2.5) являются хорошо суммируемыми, так что при малых ε_j в этих разложениях достаточно удерживать лишь главную диффузионную моду Z_0^j. Однако сходимость рядов катастрофически ухудшается с увеличением параметра ε_j и уменьшением времени *t*. Это не удивительно, так как в пределе $\varepsilon_j \to \infty$ задача (2.1.3) вырождается. К счастью существует приём, позволяющий обойти эту трудность.

2.4. Усреднённое по глубине уравнение переноса и диффузии случая мгновенного точечного источника в акватории постоянной глубины

Применяя оператор суммирования (2.2.5) к уравнениям (2.2.4), легко получить следующие соотношения[5)], которым должна удовлетворять усреднённая по глубине концентрация взвеси $\overline{G}$:

$$\frac{\partial H\overline{G}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{H\left(\overline{u}_i\overline{G} + \overline{J}_i\left[\overline{G}\right]\right)\right\} + W\overline{G} = 0,$$
$$\overline{G} = \frac{M}{H(0)}\delta(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad , \qquad (2.4.1а)$$

$$W = k_* w, \quad w = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^j\, G_n^j \overline{Z}_n^j \Big/ \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} G_n^j \overline{Z}_n^j ,$$
$$M = \sum_j M_j \quad . \qquad (2.4.1б)$$

[5)] При выводе начального условия для уравнения (2.4.1а) использовалось следующее «разложение δ - функции»: $\delta(\xi - \xi_0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n^j(\xi_0)\rho^j(\xi_0) Z_n^j(\xi)$.

Здесь M – полная начальная масса загрязняющих веществ, а величина W может быть названа эффективной гидравлической крупностью взвеси (w – безразмерная эффективная гидравлическая крупность).

Покажем, что в акватории постоянной глубины, когда H=const, величина w не зависит от координат **x**, но является функцией времени t. Укажем также путь её нахождения.

Легко проверить, что в рассматриваемом случае решения задач (2.2.4) представимы в виде

$$G_n^j = \frac{M_j}{H} Z_n^j(\xi_0)\,\rho^j(\xi_0)\,\mu^0(\mathbf{x},t)\exp\left(-k_*\,\lambda_n^j t/H\right). \tag{2.4.2}$$

Здесь не зависящая от индексов j и n функция μ^0 описывает консервативное распространение облака единичной массы и удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mu^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{u}_i\mu^0 + \bar{J}_i\left[\mu^0\right]\right) = 0\,, \\ \mu^0 = \delta(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0\end{gathered} \tag{2.4.3}$$

Подставляя (2.4.2) в (2.4.1б), получим

$$w \equiv w(t) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} M_j \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n^j Z_n^j(\xi_0)\,\rho^j(\xi_0)\exp\left(-k_*\,\lambda_n^j t/H\right)\bar{Z}_n^j}{\sum\limits_{j=1}^{N} M_j \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n^j(\xi_0)\,\rho^j(\xi_0)\exp\left(-k_*\,\lambda_n^j t/H\right)\bar{Z}_n^j} \tag{2.4.4}$$

Как уже отмечалось выше, при произвольных значениях ε_j и t внутренние ряды в (2.4.4) суммируются плохо и попытки нахождения функции $w(t)$ с помощью решения спектральной задачи (2.2.1) и последующего суммирования (2.4.4) не приводят к цели. Однако эта функция не зависит ни от скорости течения **u**, ни от компонент $\bar{J}_i$ горизонтального диффузионного потока. Поэтому её можно отыскивать путём интегрирования следующей совокупности одномерных эволюционных задач (см. (2.1.3)), усреднением их решений по координате ξ, суммированием результатов по номерам фракций j и вычислением логарифмической производной:

$$\frac{\partial Hc^j}{\partial t}+k_*\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\varepsilon_j c^j-K(\xi)\frac{\partial c^j}{\partial\xi}\right]=0\,,$$

$$c^j=\frac{M_j}{H}\delta(\xi-\xi_0)\quad\text{при}\quad t=0\,,$$

$$\varepsilon_j c^j-K(\xi)\frac{\partial c^j}{\partial\xi}=0\quad\text{при}\quad\xi=0\,,$$

$$\varepsilon_j c^j-K(\xi)\frac{\partial c^j}{\partial\xi}=\varepsilon_j\beta_j c^j\quad\text{при}\quad\xi=1, \tag{2.4.5}$$

$$\overline{c}=\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 c^j d\xi,\quad w(t)=-\frac{H}{k_*}\frac{d\ln\overline{c}}{dt}\,.$$

Легко видеть, что определённая таким образом безразмерная эффективная гидравлическая крупность w зависит от начального дисперсного состава взвеси, определяемого параметрами ε_j и M_j, от безразмерного коэффициента адсорбции β_j и от параметра ξ_0, задающего положения источника взвеси над дном акватории.

Таким образом, в случае акватории постоянной глубины решение исходной задачи о расчёте усреднённого по вертикали распространения полидисперсной взвеси с количеством фракций N сводится к решению N одномерных эволюционных задач (2.4.5) и последующему расчёту одной двумерной эволюционной задачи (2.4.1а). Решение последней, как нетрудно видеть, даётся формулой

$$\overline{G}=\frac{M}{H}\mu^0(\mathbf{x},t)\exp\left(-\frac{k_*}{H}\int_0^t w(t')dt'\right)$$

Важно отметить, что при моделировании распространения взвеси от протяжённого во времени и/или пространственно распределённого источника постоянного дисперсного состава эволюционные задачи (2.4.5) могут быть решены всего один раз.

2.5. Приближение для случая медленно меняющейся глубины акватории

В общем случае, когда глубина акватории H в рассматриваемой области не может считаться постоянной, решения задач (2.2.4) не представимы в виде (2.4.2). Поэтому представленный выше подход здесь, строго говоря, не применим. Однако может быть предложен приближённый метод расчёта, связанный с введением понятия траектории движения облака взвеси. Область применимости этого метода ограничивается предположением о малом изменении глубины акватории на расстояниях порядка характерного размера эволюционирующего облака.

Определим траекторию движения «центра» $\mathbf{x}_0(t)$ облака обычным образом: $d\mathbf{x}_0/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t), \quad \mathbf{x}_0(0) = 0$. Пусть $H_0(t) = H(\mathbf{x}_0(t))$ – изменяющаяся со временем глубина акватории в центре облака.

При сформулированном выше предположении решения задач (2.2.4) приближённо представимы в виде

$$G_n^j = \frac{M_j}{H} Z_n^j(\xi_0)\,\rho^j(\xi_0)\,\mu^0(\mathbf{x},t)\exp\left(-k_*\lambda_n^j \int_0^t H_0^{-1}(t')dt'\right), \quad (2.5.1)$$

в котором финитная функция μ^0 удовлетворяет уравнению (2.4.3).

Действительно, подставляя (2.5.1) в (2.2.4), получим

$$\frac{\partial \mu^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u}_i \mu^0 + \overline{J}_i\left[\mu^0\right]\right) = k_*\lambda_n^j \left(\frac{1}{H_0(t)} - \frac{1}{H(\mathbf{x})}\right)\mu^0 \quad (2.5.2)$$

Пусть характерная полуширина функции μ^0 равна $\sigma(t)$ и мала по сравнению с характерным пространственным масштабом изменения глубины акватории. Тогда правая часть (2.5.2) оценивается малой величиной

$$\frac{\sigma(t)}{H_0(t)}\max_i \left| \partial H/\partial x_i \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)} \right| << 1 .$$

Если приближённое представление (2.5.1) может быть использовано, то справедливы все рассуждения предыдущего раздела работы. В частности, имеют место уравнения (2.4.1а) и (2.4.5), в которых глубина акватории H должна быть заменена зависящей от времени величиной $H_0(t)$.

В данном случае эффективная гидравлическая крупность $w(t)$ становится зависящей от траектории движения облака взвеси. Однако по-прежнему при моделировании распространения взвеси от протяжённого во времени и/или пространственно распределённого источника эволюционные задачи (2.4.5) могут быть решены всего один раз. Действительно, произведя в (2.4.5) замену

$$\mu^j = H_0(t)c^j, \quad \tau = k_* \int_0^t H_0^{-1}(t')dt' , \tag{2.5.3}$$

получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mu^j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\varepsilon_j \mu^j - K(\xi)\frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} \right] = 0 , \\
\mu^j = M_j \; \delta(\xi - \xi_0) \quad \text{при} \quad t = 0 , \\
\varepsilon_j \mu^j - K(\xi)\frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 , \\
\varepsilon_j \mu^j - K(\xi)\frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} = \varepsilon_j \beta_j \mu^j \quad \text{при} \quad \xi = 1, \\
\overline{\mu} = \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \mu^j d\xi, \quad w(\tau) = -\frac{d \ln \overline{\mu}}{d\tau} .
\end{gathered} \tag{2.5.4}$$

Определённая таким образом стандартная функция $w(\tau)$ не зависит от траектории движения облака взвеси.

В заключение отметим, что в тех случаях, когда вертикальным турбулентным перемешиванием можно пренебречь, эффективная гидравлическая крупность W в уравнении (2.4.1а) должна вычисляться по формуле

$$W(t) = \sum_{j=1}^{N} M_j W_j \exp\left(-W_j \int_0^t H_0^{-1}(t')dt'\right) \Bigg/ \sum_{j=1}^{N} M_j \exp\left(-W_j \int_0^t H_0^{-1}(t')dt'\right)$$

2.6. Пример расчёта эффективной гидравлической крупности полидисперсной взвеси

Таблица 2.6.1

№ фракции j	Диапазон диаметров частиц, мм	Средний диаметр D_j, мм	Массовая доля в сбросе, M_j %	Гидравлическая крупность W_j, м/с	Параметр ε_j
	> 40		0.00		
1	40 - 20	30	1.65	9.845E-01	1.969E+01
2	20 - 10	15	1.28	6.955E-01	1.391E+01
3	10.0 - 5.0	7.5	2.17	4.906E-01	9.812E+00
4	5.0 – 2.0	3.5	2.28	3.323E-01	6.647E+00
5	2.0 – 1.0	1.5	2.56	2.109E-01	4.217E+00
6	1.0 – 0.5	0.75	4.58	1.377E-01	2.754E+00
7	0.5 – 0.25	0.375	8.87	7.823E-02	1.565E+00
8	0.25 – 0.1	0.175	10.25	2.921E-02	5.841E-01
9	0.1 – 0.05	0.075	11.56	6.216E-03	1.243E-01
10	0.05 – 0.01	0.03	21.25	1.010E-03	2.019E-02
11	0.01 – 0.005	0.0075	15.10	6.316E-05	1.263E-03
12	<0.005		18.45	0.000E+00	0.000E+00

В качестве иллюстрации приведём здесь результаты расчётов эффективной гидравлической крупности одной из реальных полидисперсных взвесей, с которыми приходится иметь дело при проведении дноуглубительных работ.

Это так называемый «суглинок лёгкий песчанистый». Его начальный дисперсный состав, гидравлические крупности компонент и значения параметров ε_j представлены в табл. 2.6.1.

При вычислении ε_j для коэффициента вертикальной турбулентной диффузии использовалась формула (1.2.1) с $k_* = 0.05$ м/с и $\Delta = 0.01$. Распространение наиболее мелкой фракции с диаметром частиц $D_j < 0.005$ мм считалось консервативным, то есть для неё полагалось $W_j = 0$. Безразмерная вертикальная координата источника взвеси принималась равной $\xi_0 = 0.1$.

Задача (2.5.4) численно интегрировалась при использовании неявной консервативной разностной схемы, разрешаемой методом прогонки. Расчёты выполнены для двух случаев:

1) дно является полностью адсорбирующим, то есть для всех фракций взвеси $\beta_j = \infty$ (Рис. 2.6.1);

2) на дне отсутствуют диффузионные потоки, то есть для всех фракций $\beta_j = 1$ (Рис. 2.6.2).

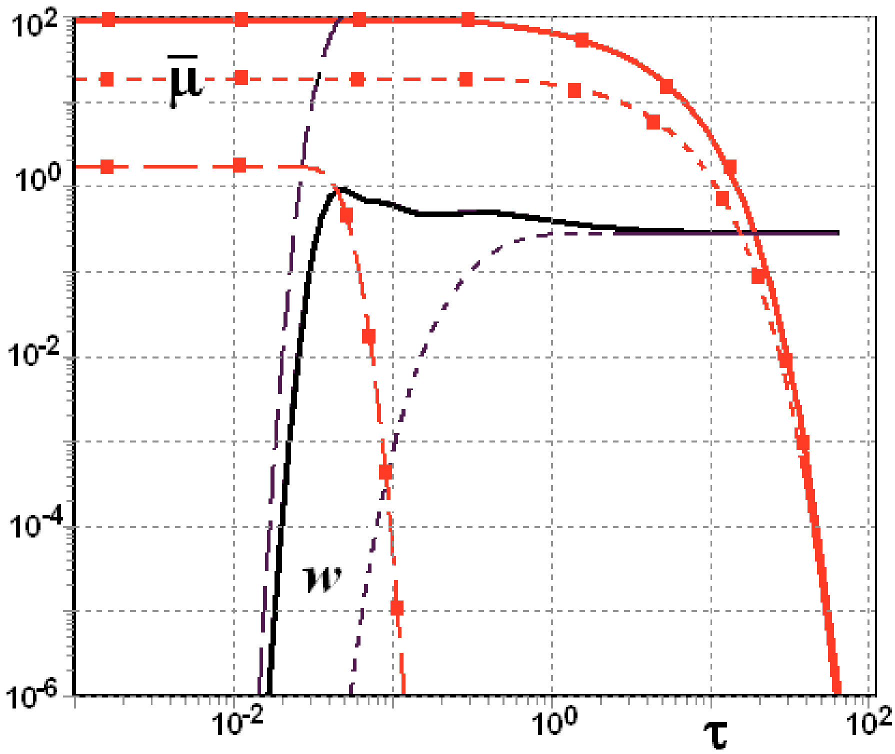


Рис. 2.6.1. Полностью адсорбирующее дно ($\beta_j = \infty$)

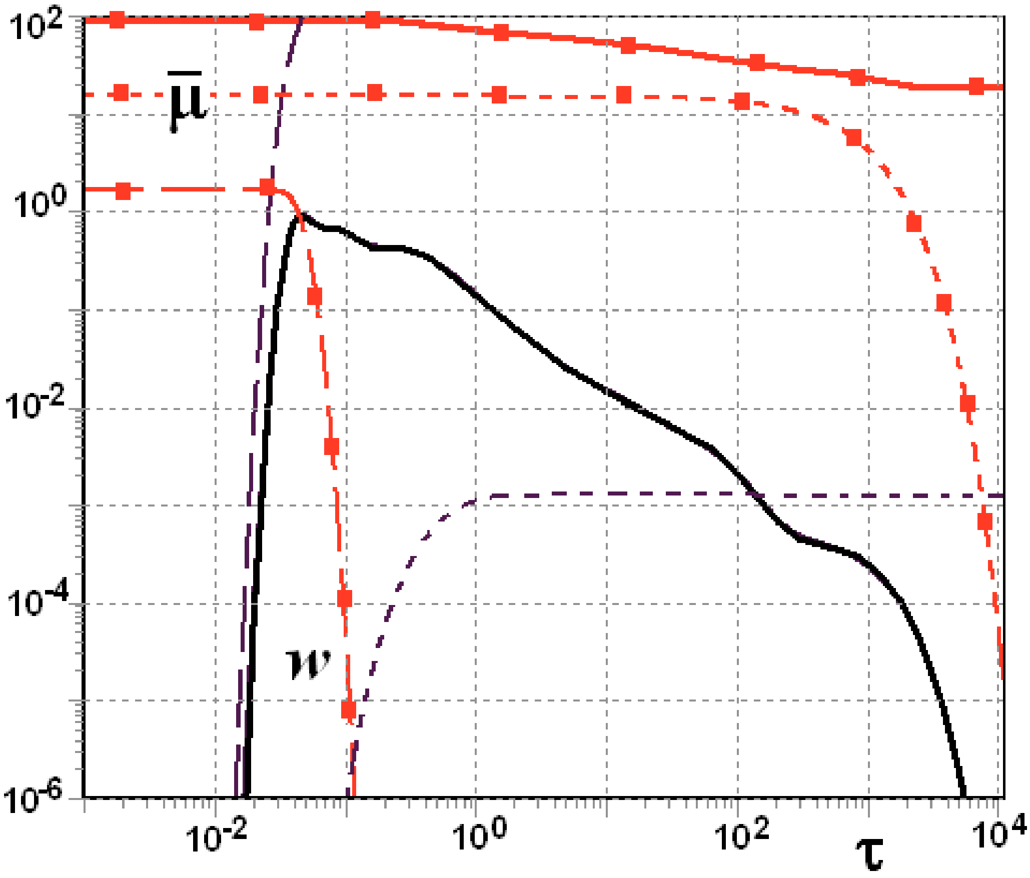


Рис. 2.6.2. Частично адсорбирующее дно ($\beta_j = 1$)

На обоих графиках приведена расчётная динамика функции $\overline{\mu}(\tau)$, описывающей изменение полной массы взвеси (в процентах от её начальной массы – кривые с маркерами) и безразмерной гидравлической крупности $w(\tau)$ (кривые без маркеров). Сплошные кривые – расчёты, выполненные для полидисперсной взвеси, представленной в табл. 2.6.1. Штриховые кривые – случай монодисперсной взвеси, отвечающей наиболее крупной фракции из табл. 1 ($j = 1$). Пунктирные кривые на Рис. 2.6.1 – монодисперсная консервативная взвесь ($j = 12$ в табл. 2.6.1), а на Рис. 2.6.2 – монодисперсная взвесь, отвечающая наиболее мелкой неконсервативной фракции ($j = 11$ в табл. 2.6.1).

Видно, что в начальные моменты времени τ средняя по глубине масса $\overline{\mu}(\tau)$ взвеси, находящейся во взвешенном состоянии, не меняется, поскольку компактному облаку взвеси необходимо некоторое время для достижения дна акватории. Поэтому безразмерная эффективная гидравлическая крупность $w(\tau)$=0. Дальнейшая эволюция величин $\overline{\mu}(\tau)$ и $w(\tau)$ связана с последовательным осаждением на дно различных фракций взвеси. В случае полностью адсорбирующего дна (Рис. 2.6.1) при $\tau \to \infty$ динамика изменения этих функций определяется консервативной составляющей взвеси, адсорбируемой дном. При отсутствии диффузионных потоков к дну (Рис. 2.6.2) адсорбции консервативной составляющей не происходит и эта фракция всегда остаётся во взвешенном состоянии, так что для достаточно больших моментов времени τ величина $w(\tau) = 0$.

В методических целях рассматривался также случай постоянного коэффициента вертикальной турбулентной диффузии со значением

$$\overline{K} = \int_0^1 K(\xi)d\xi = 0.3 + 0.7\delta \approx 0.3. \qquad (2.6.2)$$

Результаты этих расчётов представлены на Рис. 2.6.3. Сплошные кривые – случай $\beta_j = \infty$, штриховые – $\beta_j = 1$. Кривые без маркеров – расчёты, выполненные для случая коэффициента вертикальной диффузии, определяемого формулой (1.2.1), кривые с маркерами – случай усреднённого коэффициента вертикальной диффузии (2.6.2). При $\beta_j = 1$ кривые практически совпадают. Как и следовало ожидать, заметные отличия наблюдаются лишь тогда, когда динамика изменения $\overline{\mu}(\tau)$ и $w(\tau)$ определяется процессом диффузии взвеси к дну акватории ($\beta_j = \infty$). Совпадение кривых при отсутствии диффузионных потоков, по-видимому, связано с тем, что, с одной стороны, процесс вертикальной диффузии малосущественен для крупных фракций, а, с другой стороны, в случае мелких фракций при $\beta_j = 1$ этот процесс вне зависимости от формы эпюры коэффициента вертикальной диффузии успевает обеспечить интенсивное турбулентное перемешивание взвеси.

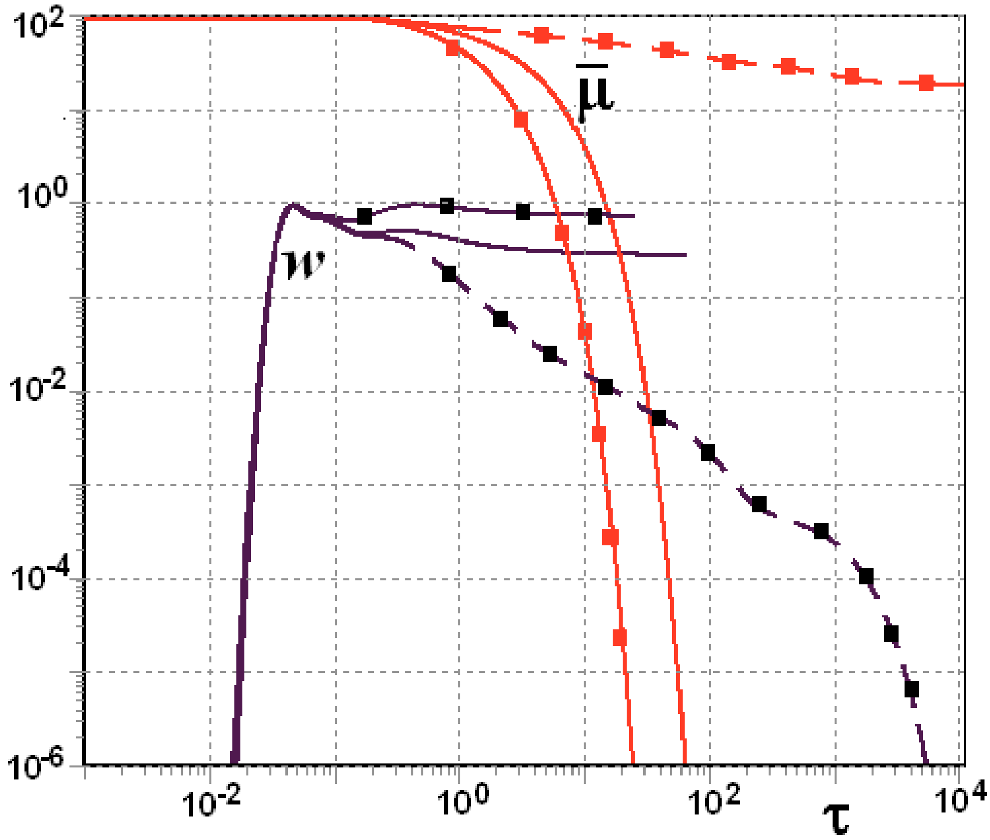


Рис. 2.6.3. Расчёты с усреднённым по глубине коэффициентом вертикальной диффузии

Глава 3. Горизонтальное турбулентное рассеяние. Стохастический метод дискретных облаков

Формулируется и анализируется модель горизонтального рассеяния ВзВ на океаническом шельфе. Обсуждаются известные вычислительные подходы к расчёту переноса примеси в водной среде. Предлагается и тестируется бессеточный стохастический алгоритм, наследующий достоинства двух известных методов: метода дискретных облаков и стохастического метода дискретных частиц.

3.1. Горизонтальное рассеяние взвеси в однородном и изотропном потоке

Рассмотрим, прежде всего, модельную задачу о рассеянии консервативной (т. е. не осаждающейся) пассивной примеси в не меняющемся по глубине z потоке жидкости, который движется с постоянной скоростью U в направлении оси x_1 горизонтальной декартовой системы координат (x_1, x_2). Пусть этот двумерный турбулентный поток однороден и изотропен. Тогда, в соответствии с классическими представлениями, усреднённая по стохастическому ансамблю возможных реализаций концентрация G примеси, возникающая в результате действия в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$ мгновенного изотропного источника единичной массы, может быть описана функцией

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi H \sigma^2(t)} \exp\left[-\frac{(x_1 - Ut)^2 + x_2{}^2}{2\sigma^2(t)} \right], \tag{3.1.1}$$

в которой $\sigma^2(t)$ представляет собой дисперсию распределения вещества примеси, $\sigma(t)$, соответственно, определяет характерную полуширину облака загрязнения, а H – постоянная глубина потока.

Нетрудно проверить, что функция (3.1.1) при $t > 0$ удовлетворяет следующему уравнению переноса и диффузии:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + U\frac{\partial G}{\partial x_1} = K^T(t)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2}\right) \tag{3.1.2}$$

с зависящим от времени коэффициентом горизонтального турбулентного обмена

$$K^T(t) = \frac{1}{2}\frac{d\sigma^2(t)}{dt}. \tag{3.1.3}$$

Зависимость K^T от времени в данном случае эквивалентна зависимости коэффициента турбулентного обмена от размера $l(t) = 2\sigma(t)$ диффундирующего облака. Действительно, пусть

$$\sigma^2(t) = A_n t^n,\ \ A_n, n = \mathrm{const}. \tag{3.1.4}$$

Тогда, согласно (3.1.3), $K^T(t) = 0.5n\,A_n t^{n-1}$ и

$$K^T(l) = B_\omega l^{\,\omega}, \quad \omega = \frac{2(n-1)}{n}, \quad B_\omega = \frac{n}{2^{(3n-2)/n}}A_n^{1/n} \tag{3.1.5}$$

Если в (3.1.4) $n = 3$, то $\omega = 4/3$. Зависимость (3.1.5) в этом случае выражает так называемый «закон 4/3» [6], сформулированный Ричардсоном в 1926 г. с помощью анализа доступных ему в то время экспериментальных данных о турбулентной диффузии компактных объектов различного пространственного масштаба в атмосфере. Случай $n = 1$, т. е. $\omega = 0$, соответствует не зависящему от размера эволюционирующего облака коэффициенту диффузии (далее он будет называться «обычной диффузией»).

Следует, однако, подчеркнуть, что уравнение (3.1.2) с изотропным коэффициентом диффузии $K^T(t)$ неприменимо для решения задачи турбулентного рассеяния взвешенного вещества от непрерывно действующего источника. Действительно, с помощью фундаментального решения (3.1.1) и принципа суперпозиции распределение концентрации $C(\mathbf{x},t)$ взвеси в этом случае можно записать в виде

$$C(\mathbf{x},t)=\int_0^t \dot{M}(t_0)\,G(\mathbf{x},t-t_0)\,dt_0\,. \tag{3.1.6}$$

Можно показать [19], что функция (3.1.6) вне точки $\mathbf{x}=0$ удовлетворяет следующему уравнению переноса и диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}K_{11}\frac{\partial C}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}K_{22}\frac{\partial C}{\partial x_2}\ , \tag{3.1.7}$$

в котором компоненты тензора диффузии K_{ii} являются функционалами, зависящими как от динамики изменения мощности источника $\dot{M}(t)$, так и от скорости потока U. А именно,

$$K_{ii}=\frac{\int_0^t \dot{M}(t_0)\,K^T(t-t_0)\,G'_{x_i}(x_1-U(t-t_0),x_2,t-t_0)\,dt_0}{\int_0^t \dot{M}(t_0)\,G'_{x_i}(x_1-U(t-t_0),x_2,t-t_0)\,dt_0},\quad i=1,2\,. \tag{3.1.8}$$

Здесь и далее штрихи над функцией G означают частные производные от функции (3.1.1) по её аргументам, указанным подстрочными индексами.

Действительно, подстановка (3.1.6) в левую часть уравнения (3.1.7) с учётом (3.1.2) приводит к следующей цепочке равенств, доказывающей сделанное утверждение:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial x_1}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \dot{M}(t_0)\,G(\mathbf{x},t-t_0)dt_0+U\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^t \dot{M}(t_0)\,G(\mathbf{x},t-t_0)dt_0=$$

$$= \dot{M}(t)\,\delta(0) + \int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\left[G'_t(\mathbf{x}, t - t_0) + U\,G'_{x_1}(\mathbf{x}, t - t_0)\right] dt_0 =$$

$$= \dot{M}(t)\,\delta(0) + \int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,K^T(t - t_0)\left[G''_{x_1x_1}(\mathbf{x}, t - t_0) + G''_{x_2x_2}(\mathbf{x}, t - t_0)\right] dt_0 =$$

$$= \dot{M}(t)\,\delta(0) + \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,K^T(t - t_0)\,G'_{x_1}(\mathbf{x}, t - t_0)\,dt_0 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,K^T(t - t_0)\,G'_{x_2}(\mathbf{x}, t - t_0)\,dt_0 =$$

$$= \dot{M}(t)\,\delta(0) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,K^T(t - t_0)\,G'_{x_1}(\mathbf{x}, t - t_0)\,dt_0}{\int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,G'_{x_1}(\mathbf{x}, t - t_0)\,dt_0}\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,G(\mathbf{x}, t - t_0)\,dt_0 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,K^T(t - t_0)\,G'_{x_2}(\mathbf{x}, t - t_0)\,dt_0}{\int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,G'_{x_2}(\mathbf{x}, t - t_0)\,dt_0}\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_0^t \dot{M}(t_0)\,G(\mathbf{x}, t - t_0)\,dt_0 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}K_{11}\frac{\partial C}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}K_{22}\frac{\partial C}{\partial x_2}.$$

Формула (3.1.8) показывает, что даже в простейшем случае однородного и изотропного турбулентного течения коэффициент турбулентного обмена не может считаться локальной изотропной функцией состояния потока, если рассматривается протяжённый во времени источник взвешенного вещества, а диапазон размеров вихревых структур, определяющих зависимость $\sigma^2(t)$, широк и в масштабах задачи не ограничен сверху[6)]. Для таких задач свойство локальности и изотропии коэффициента обмена выполняется лишь в случае обычной диффузии, когда дисперсия $\sigma^2(t)$ является линейной функцией времени, т. е. когда коэффициент K^T в (3.1.8) не зависит от времени и $K_{ii}=K^T$. Конечно, в каждом конкретном случае путём подбора эффективного коэффициента диффузии, можно добиться соответствия результатов расчётов по моделям турбулентной и обычной диффузии в нескольких удачно расположенных контрольных точках, если полагать этот эффективный эмпирический коэффициент зависящим от масштаба изучаемого явления, т. е. от рассматриваемой задачи. Однако в других точках расхождение может быть значительным.

Проиллюстрируем последнее утверждение путём сравнения с помощью аналитического решения (3.1.6) распределений концентраций ВзВ, моделируемых в соответствии с «законом 4/3» и по законам обычной диффузии [16], [17]. В качестве пространственного масштаба примем величину L=1 км. Расчёты проведём для значений $\dot{M}=1$ кг/с, U=0.2 м/с, H=10 м. В качестве временного масштаба примем значение $T=L/U=5\cdot10^3$ с $\approx$1.5 час. Коэффициент обычной диффузии K выберем таким образом, чтобы при $t_1=T$ дисперсии ВзВ, рассчитанные по моделям турбулентной и обычной диффузии, совпадали. Согласно (3.1.4), (3.1.5) для этого необходимо, чтобы $A_1=A_3T^2$ и $K=0.5A_1$.

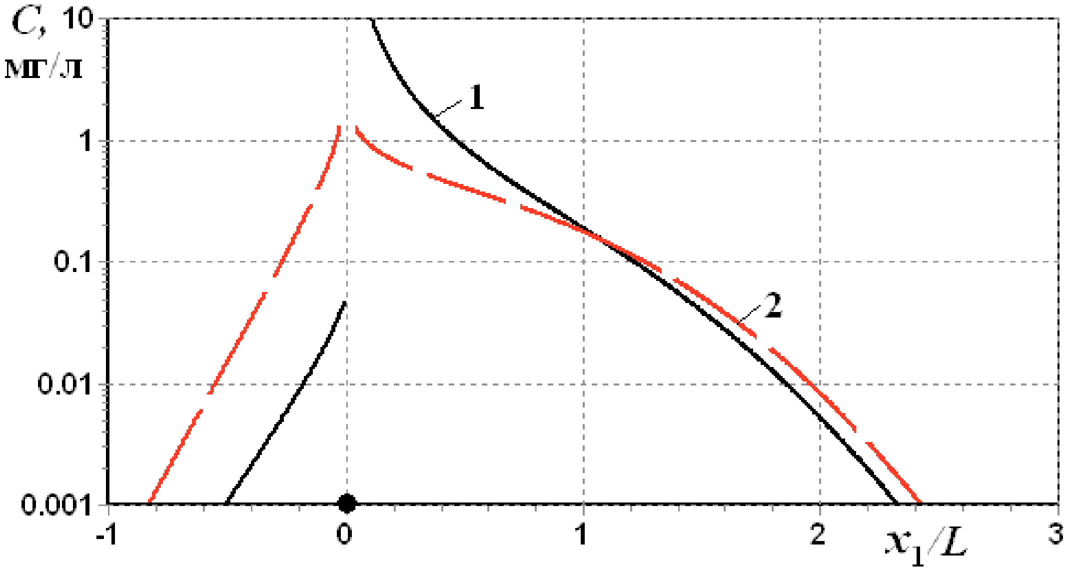
Ниже на Рис. 3.1.1 для момента времени $t=T$ и двух значений структурного параметра турбулентности A_3 представлены графики распределения концентраций на оси $x_2=0$ образующегося «шлейфа» ВзВ. Поля концентраций для этого же момента времени показаны на Рис. 3.1.2. При проведении расчётов интеграл в формуле (3.1.6) рассчитывался методом трапеций с шагом $\Delta t_1=10^{-4}t$.

---

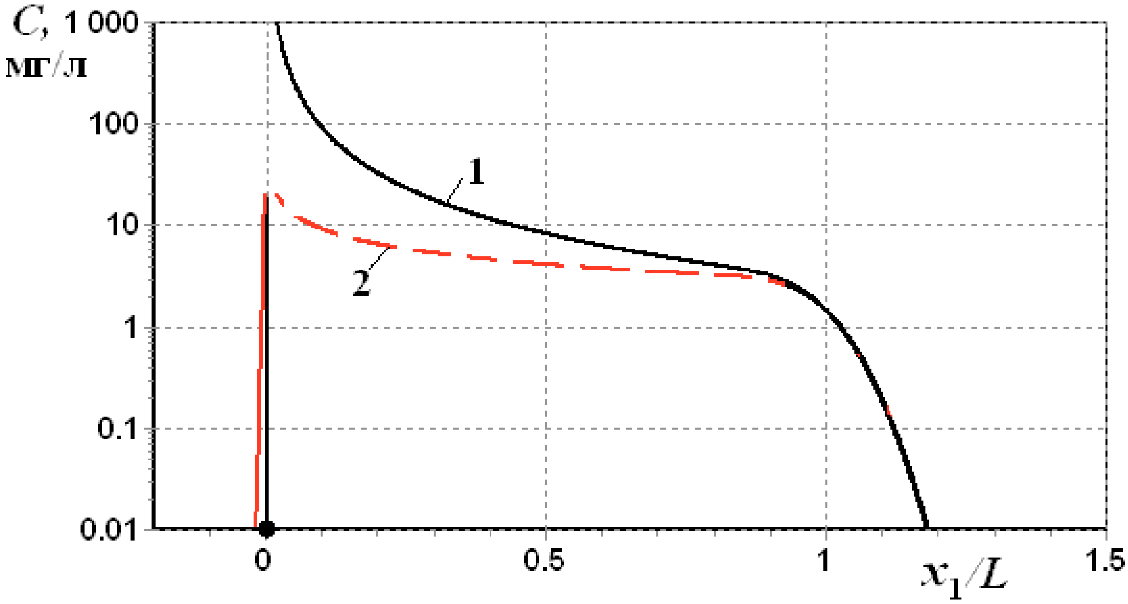
6) Более точно нужно, конечно, говорить об ограниченности спектра волновых чисел турбулентных пульсаций.

Из графиков видно, что для варианта с постоянным коэффициентом диффузии (Рис. 3.1.2а) шлейф существенно размыт по сравнению со случаем турбулентной диффузии (Рис. 3.1.2б). Во втором случае у источника наблюдаются бóльшие концентрации загрязняющих веществ по сравнению с первым. Кроме того, в первом случае загрязняющее вещество может распространяться вверх по потоку в бóльшей степени, чем во втором.

Совпадение результатов на переднем фронте шлейфа является следствием специального подбора принятых в расчётах значений коэффициента обычной диффузии.

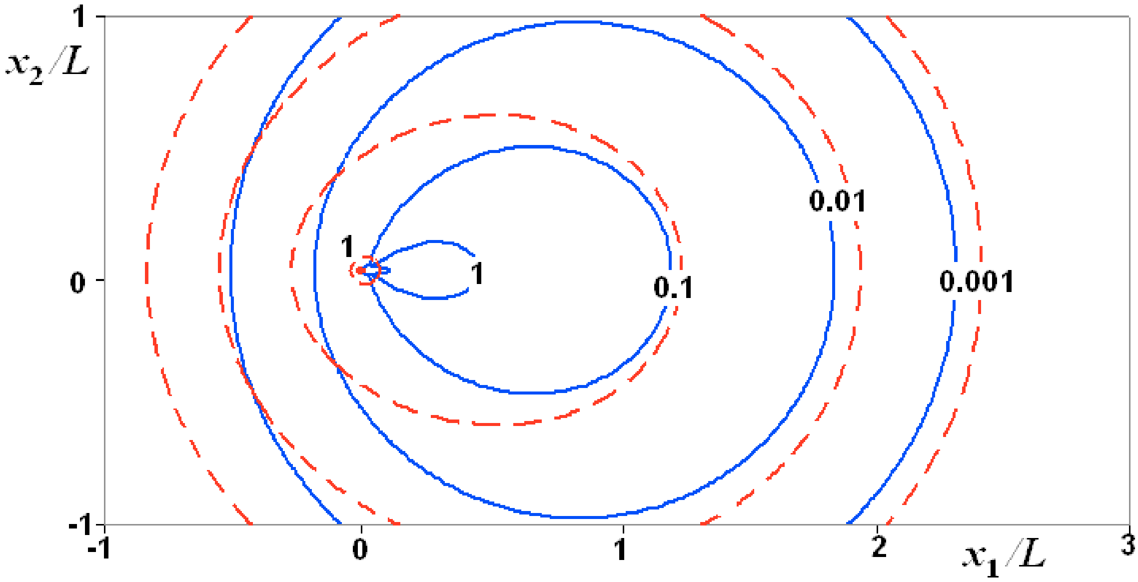


а)

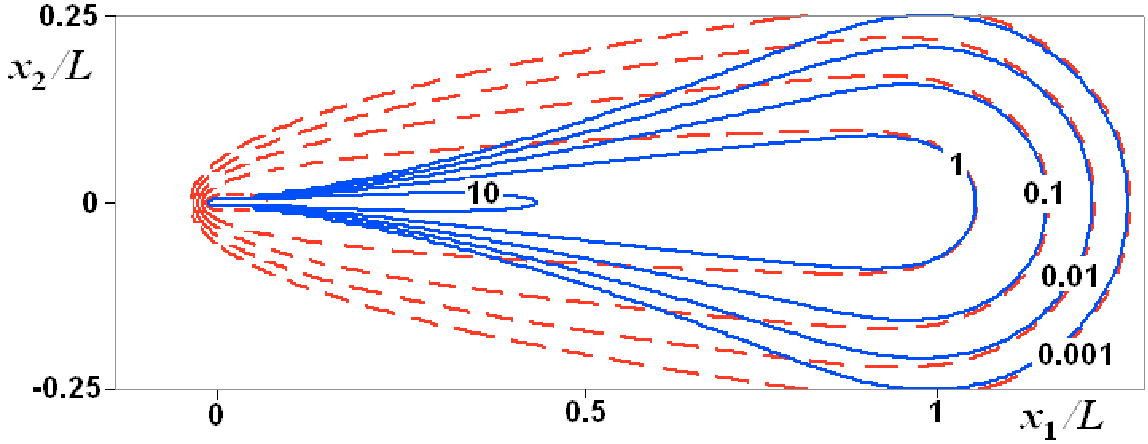


б)

Рис. 3.1.1. Концентрации ВзВ на оси шлейфа при $A_3 = 2.4{\cdot}10^{-6}$ м^2/с^3 ($B_{4/3} = 8{\cdot}10^{-3}$ м$^{2/3}$/с, A_1=60.6 м^2/с, K = 30.3 м^2/с (а), $A_3 = 3.8{\cdot}10^{-8}$ м^2/с^3 ($B_{4/3} = 2{\cdot}10^{-3}$ м$^{2/3}$/с, A_1=0.94 м^2/с, K = 0.47 м^2/с (б), 1 – турбулентная диффузия, 2 – обычная диффузия.



а)



б)

Рис. 3.1.2. Изолинии концентрации ВзВ (мг/л).

Условия и обозначения такие же, как на Рис. 3.1.1.

3.2. Эмпирическая модель океанической турбулентности

Реальная трёхмерная океаническая турбулентность обладает рядом специфических особенностей, описанных, например, в [8]. Строго говоря, она может считаться локально однородной и изотропной лишь в масштабах, значительно меньших глубины акватории, так как стратификация воды в глубоких водоёмах или глубина хорошо перемешанного мелкого водоёма ограничивают максимальный вертикальный размер турбулентных вихрей. Считается, что по последней причине процесс турбулентного перемешивания можно разделить на горизонтальный турбулентный обмен и вертикальную турбулентную диффузию.

Диапазон горизонтальных размеров вихревых структур океанической турбулентности чрезвычайно широк. Вследствие этого коэффициент горизонтального турбулентного обмена K^T существенным образом зависит от масштаба l изучаемого явления[7)]. Зависимость $K^T(l)$ может быть получена в опытах с диффузией пятен трассеров (см., например, [8]). Такие экспериментальные данные систематизированы в [20], [21]. Результат представлен ниже на Рис. 3.2.1а (см. [7], а также [8], [22]).

Рис. 3.2.1а хорошо согласуется с предложенной в [23], [24] теоретической схемой распределения кинетической энергии по разномасштабным горизонтальным турбулентным движениям в океане. Согласно этой схеме, в спектре океанической турбулентности можно ожидать трёх различных зон притока энергии, а именно, в глобальных масштабах $l \sim a_1 = 10^6$ м, в масштабах инерционных и приливных колебаний $l \sim a_2 = 10^4$ м и в масштабах ветровых волн $l \sim a_3 = 10$ м. В промежутках между зонами энергоснабжения приток внешней энергии невелик и здесь для горизонтальной океанической турбулентности могут приближённо выполняться универсальные законы

7) Предположение об изотропии горизонтальной океанической турбулентности в достаточно больших пространственных масштабах, которое позволяет ввести понятие скалярного коэффициента обмена K^T, может быть подвергнуто критике. Однако представляется, что приводимые далее экспериментальные данные позволяют принять это предположение, по крайней мере, в первом приближении.

инерционного интервала спектра турбулентных пульсаций, такие, как «закон 5/3» Колмогорова для энергии турбулентности и вытекающий из него «закон 4/3» Ричардсона для коэффициента турбулентной диффузии (см., например, [4]).

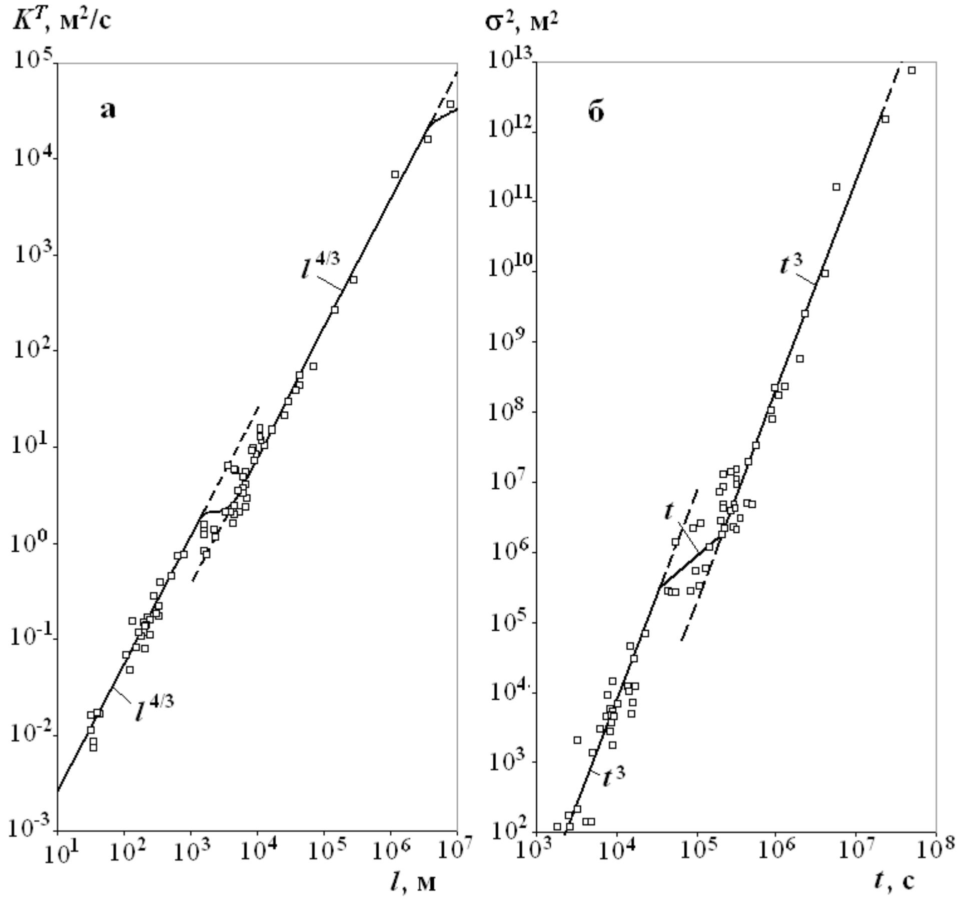


Рис. 3.2.1. Эмпирическая зависимость коэффициента горизонтального турбулентного обмена от характерного размера диффундирующего объекта (а) и соответствующая зависимость дисперсии ВзВ от времени (б)

Из Рис. 3.2.1а видно, что в диапазоне масштабов $10 - 10^3$ м и $10^4 - 10^6$ м имеется приемлемое согласие экспериментальных точек с локальными прямыми (в логарифмическом масштабе), выражающими «закон 4/3».

При построении графика, представленного на Рис. 3.2.1а, авторами [7] использовался следующий способ обработки экспериментальных данных. Исходными данными служили последовательные съёмки диффундирующих пятен трассеров, по которым определялась дисперсия σ^2 их горизонтальных распределений как функция времени t. Затем с помощью формулы $K^T = \sigma^2/(4t)$ определялся коэффициент K^T, а соответствующая величина масштаба l принималась равной 3σ.

Для целей численного моделирования процесса рассеяния загрязняющих веществ наиболее удобной характеристикой горизонтального турбулентного обмена является зависимость $\sigma^2(t)$, отражающая структуру горизонтальных турбулентных пульсаций и непосредственно определяемая в экспериментах. Однако работы [20], [21], содержащие исходные экспериментальные данные, нам недоступны. Поэтому эта зависимость восстанавливалась нами по Рис. 3.2.1а с учётом принятого авторами [7] способа обработки экспериментальных данных. Результат представлен на Рис. 3.2.1б.

Показанные на Рис. 3.2.1б локальные прямые (в логарифмическом масштабе) соответствуют характерной для «закона 4/3» кубической ($n = 3$) зависимости (3.1.4) дисперсии σ^2 от времени t со значением параметра $A_3 = 8{\cdot}10^{-9}$ м^2/с^3 в наиболее интересующей нас области промежуточных масштабов $10 – 10^3$ м и с $A_3 = 2{\cdot}10^{-10}$ м^2/с^3 в области больших масштабов 10^4 – 10^6 м. В зоне энергоснабжения на Рис. 3.2.1б принят линейный закон роста дисперсии ($\sigma^2 = A_1 t$, $A_1 = 9$ м^2/с), характерный для независящего от пространственного масштаба коэффициента горизонтального турбулентного обмена.

Следует подчеркнуть, что представленная на Рис. 3.2.1б зависимость $\sigma^2(t)$, которую можно называть «стандартной эмпирической моделью горизонтального турбулентного обмена», количественно оправдывается лишь для средних условий, существующих в океане. В случае конкретных регионов из-за специфики ряда факторов, таких, например, как орография дна, погодные условия и т. п. , в формуле (3.1.4) может меняться не только величина коэффициента A_n, но и сам показатель степени n. Данный эффект особенно сильно должен проявляться во внутренних водоёмах, в которых циркуляция вод и энергоснабжение турбулентных движений определяется не приливными и инерционными колебаниями, а синоптическими процессами (см., например, [25], [26]). Поэтому перед проведением расчётов распространения взвешенных веществ в конкретном регионе желательно по возможности экспериментальным путём определить характерный для данного региона вид зависимости $\sigma^2(t)$ с целью выявления отличий от средних ситуаций, адекватных стандартной эмпирической модели.

Обобщая изложенное выше, линейные операторы, определяющие усреднённые по глубине компоненты горизонтального турбулентного потока взвешенного вещества, будем задавать в виде

$$\overline{J_i}[G] = J_i^T[G] = -K^T(\mathbf{x},t)\frac{\partial G}{\partial x_i},$$
$$K^T(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}n(\mathbf{x},t)A_n(\mathbf{x},t)t^{n(\mathbf{x},t)-1}, \tag{3.2.1}$$

где эмпирические параметры n и A_n могут быть, вообще говоря, медленно меняющимися функциями координат x и времени t, устанавливаемыми по экспериментальным данным о горизонтальной дисперсии $\sigma^2(t)$ пятен трассеров в рассматриваемом регионе. Подчеркнём ещё раз, что выражение (3.2.1) может быть применено только для моделирования распространения взвешенных веществ от мгновенных точечных источников.

3.3. Эффект сдвига и продольная дисперсия

Существенным недостатком модели (2.4.1), (3.2.1) является, то, что при её выводе было использовано допущение о независимости горизонтальной скорости $\mathbf{u}$ потока от вертикальной координаты z, хотя в реальности из-за наличия придонного пограничного слоя величина $\mathbf{u}$ всегда меняется от практически нулевых значений у дна до конечных значений у поверхности акватории. Известно [27], что в подобном случае значительный вертикальный градиент (сдвиг) горизонтальных компонент скорости потока приводит к существенному изменению законов рассеяния взвешенных веществ, интенсифицируя перенос взвеси в направлении скорости усреднённого по глубине течения. Данный эффект называется продольной дисперсией или «эффектом сдвига» (см., например, [5]).

На океаническом шельфе величина эффекта должна, прежде всего, зависеть от вертикального сдвига горизонтальной скорости потока, т. е. от глубины H, и от скорости потока на поверхности акватории, которая по порядку величины совпадает с усреднённой по глубине скоростью $|\mathbf{u}|$. Простейшая модель (см., например, [5]) заключается в добавлении к горизонтальным компонентам турбулентного потока взвеси (3.2.1) дополнительного диффузионного члена, действующего в направлении вектора скорости усреднённого по глубине течения. Коэффициент этой продольной дисперсии определяется выражением $K^D = \gamma H|\mathbf{u}|$[8). В нём характеризующий рассматриваемый регион безразмерный фактор γ зависит от нормированного на своё среднее значение вертикального распределения горизонтальной скорости потока[9) и от безразмерного распределения коэффициента вертикальной диффузии. Например, согласно [5], [28], для Северного моря $\gamma = 0.45$.

Итак, следуя изложенным концепциям, в (2.2.1) компоненты потока взвешенного вещества, обусловленные горизонтальным перемешиванием, в настоящей работе будем представлять в виде

$$\overline{J}_i[G] = -K_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_j}, \quad K_{ij} = K^T(\mathbf{x},t)\delta_{ij} + K_{ij}^D(\mathbf{x},t),$$

$$\mathbf{K}^D = \left\| K_{ij}^D \right\| = \gamma H|\mathbf{u}| \left\| \begin{matrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{matrix} \right\|. \qquad (3.3.1)$$

8) Вид этого выражения легко установить, например, с помощью теории размерностей.

9) Фактор γ обращается в ноль, если это распределение однородно.

Здесь K_{ij} – компоненты тензора горизонтальной дисперсии, являющегося суммой тензора горизонтальной турбулентной диффузии (δ_{ij} – символ Кронекера) и тензора продольной дисперсии $\mathbf{K}^D$ ($\varphi = \mathrm{Arccos}\left(u_1 / |\mathbf{u}|\right)$ – угол наклона вектора скорости потока к оси x_1 системы координат).

Подчеркнём, что понятие продольной дисперсии имеет чисто математическую природу и возникает при попытках описания распространения взвеси с помощью осреднённых по глубине уравнений. Физической причиной возникновения в этих моделях данного диффузионного механизма продольного переноса вещества являются реальные вертикальные неоднородности горизонтальной скорости потока.

3.4. Вычислительные подходы к моделированию переноса взвешенных веществ в водной среде. Вариант стохастического метода дискретных частиц, воспроизводящий «закон 4/3» Ричардсона

Вычислительные подходы к моделированию переноса взвешенных веществ в водной среде при пространственно распределённом и/или непрерывно действующем источнике загрязнения можно разделить на три основные группы:

– сеточные численные методы,
– методы дискретных облаков,
– стохастические методы дискретных частиц.

Эти методы обсуждаются ниже.

3.4.1. Сеточные численные методы

Данные методы интегрирования транспортно-диффузионной модели эффективны, если коэффициент горизонтального турбулентного обмена может считаться локальной мгновенной функцией состояния потока или если для его расчёта применяются полуэмпирические дифференциальные модели турбулентности (см., например, [12]). Такой подход, однако, не даёт возможность учесть характерную для рассматриваемых задач зависимость коэффициента турбулентной диффузии от размера диффундирующего объекта, или делает учёт этой характерной особенности процесса турбулентного рассеяния крайне сложным (см. пп. 3.1 и 3.2 настоящей работы). Есть, конечно, возможность численного интегрирования большой совокупности задач (2.4.1), (3.3.1), описывающих распространения отдельных облаков взвеси, с последующим суммированием их решений, используя принцип суперпозиции. Однако ясно, что подобный алгоритм крайне неэффективен с точки зрения вычислительных затрат.

3.4.2. Методы дискретных облаков

Эти методы используют принцип суперпозиции и приближённое представление горизонтального распределения концентрации взвеси в отдельном облаке, возникающем в результате действия мгновенного точечного источника, гауссовой функцией. Основанием для последнего служит тот факт, что в акватории постоянной глубины H и в случае скорости потока $\mathbf{u}$, зависящей только от времени t, гауссова функция является точным решением уравнения переноса и диффузии.

Например, в случае усреднённой по глубине транспортно-диффузионной модели, описываемой уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial Cu_i}{\partial x_i}+\frac{W}{H}C=\frac{\partial}{\partial x_i}K_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}, \tag{3.4.1}$$

непосредственной проверкой можно убедиться, что решением (3.4.1) является следующая гауссова функция

$$C(\mathbf{x},t)=$$
$$=\frac{m(t)}{2\pi HS}\exp\left[-\frac{\sigma_1^2(t)\sigma_2^2(t)}{S^2}\left(\frac{(x_1-x_{01})^2}{2\sigma_1^2(t)}+\frac{(x_2-x_{02})^2}{2\sigma_2^2(t)}-\frac{S_{12}(t)(x_1-x_{01})(x_2-x_{02})}{\sigma_1^2(t)\,\sigma_2^2(t)}\right)\right]. \tag{3.4.2}$$

Здесь m – масса вещества в облаке, $\mathbf{x}_0$ – координаты «центра тяжести» облака, параметры σ_1, σ_2, S_{12} характеризуют форму облака и его ориентацию в выбранной глобальной системе координат (x_1, x_2). Эти величины удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{W}{H}m, \quad \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{u},$$
$$\frac{d\sigma_1^2}{dt} = 2K_{11}, \quad \frac{d\sigma_2^2}{dt} = 2K_{22}, \quad \frac{dS_{12}}{dt} = 2K_{12}, \tag{3.4.2}$$

в которых компоненты тензора горизонтального рассеяния K_{ij} могут являться функциями времени.

Изолинии функции (3.4.2) являются эллипсами (Рис. 3.4.1), повёрнутыми на угол θ относительно исходной системы координат (x_1, x_2), который определяется формулой

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2S_{12}}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

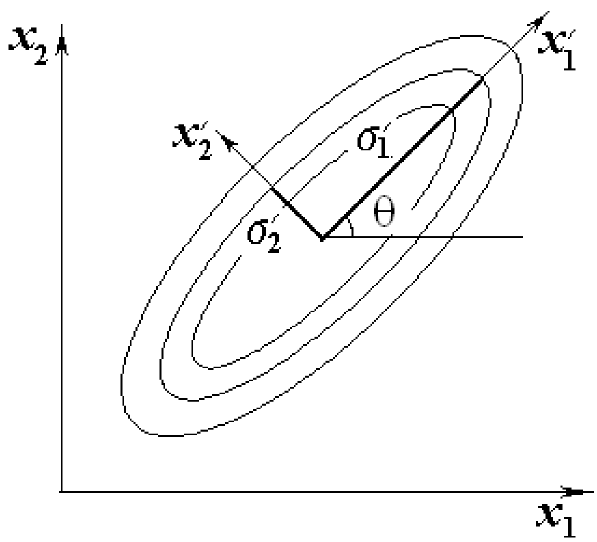


Рис. 3.4.1. Основная (x_1, x_2) и локальная (x_1', x_2') системы координат для «эллиптического» облака

При переходе к локальной системе координат, (x_1', x_2') связанной с главными осями облака, формула (3.4.1) преобразуется к виду

$$C = \frac{m}{2\pi H\,\sigma_1'^2(t)\,\sigma_2'^2(t)} \exp\left[-\left(\frac{x_1'^2}{2\sigma_1'^2(t)} + \frac{x_2'^2}{2\sigma_2'^2(t)}\right)\right]. \quad (3.4.3)$$

Вычислительная эффективность метода дискретных облаков достаточно высока. Например, в простейшем случае непрерывного точечного источника в однородном и изотропном потоке (см. выше п. 3.1) этот метод эквивалентен расчёту интеграла (3.1.6) методом прямоугольников.

Существует обобщение метода на случай медленно меняющейся глубины акватории H и слабо пространственно неоднородных полей скорости $\mathbf{u}$ [29]. Однако так как с течением времени размеры облаков сильно увеличиваются, то методы дискретных облаков не применимы в случае сильно неоднородных полей скорости, содержащих области возвратных течений и/или застойные зоны.

3.4.3. Стохастические методы дискретных частиц

Данным подходам на практике (см., например, [30] – [34]) часто отдаётся предпочтение, по-видимому, в связи кажущейся простотой их реализации даже в трёхмерном случае. Поэтому рассмотрим эти подходы, иногда объединяемые названием «методы Монте-Карло», более подробно.

Методы реализуется в виде случайных блужданий (обобщённого броуновского движения [1]) N частиц. Например, полагают, что каждая частица на каждом шаге по времени Δt совершает переход к новому положению в соответствии с уравнениями

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_i \Delta t + u_i' \Delta t\ , \quad (3.4.4)$$

в которых x_i^{n+1} и x_i^n – координаты частицы в моменты времени $n+1$ и n соответственно; u_i – компоненты скорости потока; u_i' – статистически независимые случайные компоненты приращения скорости, которым иногда придают смысл турбулентных пульсаций потока. На практике часто считается, что последние величины распределены по нормальному закону с заданными дисперсиями $\sigma_{u_i}^2$, параметризуемыми, например, в соответствии с данными наблюдений ([35], [36]).

Возможна и другая реализация метода, когда закон случайных блужданий принимается в форме

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_i \Delta t + \Delta x_i', \tag{3.4.5}$$

где $\Delta x_i'$ – статистически независимые случайные приращения координат частиц, также обычно распределяемые по нормальному закону с заданными дисперсиями $\sigma_{x_i}^2$. Легко видеть, что подходы (3.4.4) и (3.4.5) оказываются эквивалентными, если дисперсии стохастической скорости на шаге связаны с дисперсиями величины случайных приращений координат на шаге соотношением $\sigma_{u_i}^2 = \sigma_{x_i}^2 \big/ (\Delta t)^2$.

Каждой блуждающей частице приписывается определённая масса m загрязняющего вещества. Концентрацию C загрязняющего вещества в некоторой точке $\mathbf{x}$ пространства определяют как $C(\mathbf{x},t) = m\, n_N / \Delta\mathbf{x}$, где n_N – количество частиц, попадающих в момент времени в некоторую достаточно малую область пространства $\Delta\mathbf{x}$ около точки $\mathbf{x}$. Эта концентрация естественным образом связана с плотностью распределения вероятности $p(\mathbf{x},t)$ достижения блуждающей частицей области $\Delta\mathbf{x}$. Действительно, рассмотрим залповый сброс загрязняющего вещества общей массой $M = N\, m$.

Тогда $C(\mathbf{x},t)\Delta\mathbf{x} = M\, n_N/N$. Но в силу закона больших чисел $n_N/N \to p(x,t)\Delta\mathbf{x}$ при $N \to \infty$. Отсюда

$$C(\mathbf{x},t) \to Mp(\mathbf{x},t) \text{ при } N \to \infty. \tag{3.4.6}$$

В теории случайных процессов показывается (см., например, [37]), что в случае допущения о наличии конечной дисперсии одного шага рассматриваемого случайного процесса и при независимости его отдельных шагов плотность распределения вероятности $p(\mathbf{x},t)$ в пределе $\Delta t \to 0$ подчиняется уравнению диффузионного типа. В физической литературе подобное уравнение часто называют уравнением Эйнштейна – Смолуховского, а в математической – вторым уравнением Колмогорова. В двумерном случае это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = K_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}, \quad K_{ij} = \frac{\left\langle \Delta x_i' \Delta x_j' \right\rangle}{2\Delta t}, \quad i, j = 1,2.$$

где угловыми скобками обозначена операция статистического усреднения, в частности, $\left\langle (\Delta x_i')^2 \right\rangle = \sigma_i^2$. Тогда в силу (3.4.6) имеем[10)]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = K_{ij} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$K_{ii} = \frac{\sigma_i^2}{2\Delta t} = \frac{\sigma_{u_i}^2 \Delta t}{2}, \; i = 1,2, \quad K_{12} = 0.$$

Здесь важно отметить следующее.

Изложенное выше показывает, что если в процессах (3.4.4) или (3.4.5) дисперсии случайных величин принимаются статистически независимыми, то в результате применения данных процессов может быть получено решение

[10)] Отметим, что в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей уравнение (3.4.7) оказывается справедливым даже в том случае, когда стохастические величины в процессах (3.4.4) или (3.4.5) распределены по законам, отличным от нормального. Достаточным оказывается лишь предположение о конечности соответствующих дисперсий и статистической независимости отдельных шагов процесса.

уравнения переноса и диффузии, но лишь для простейшего случая обычной диффузии, когда компоненты тензора диффузии являются локальными и мгновенными функциями состояния потока. В то же время, как отмечалось, например, в пп. 3.1, 3.2 настоящей работы, горизонтальная океаническая турбулентная диффузия таковой не является.

Распространённым подходом, часто используемым в стохастических методах дискретных частиц для решения этой проблемы, является введение в рассмотрение ансамбля K одновременно генерируемых частиц ($K \geq 2$), связанных некоторой корреляционной зависимостью. Полагается, что корреляция между любыми двумя частицами зависит только от расстояния между ними. Действительно, именно понятие расстояния между двумя частицами лежит в основе «закона 4/3» Ричардсона для турбулентного перемешивания: дисперсия расстояний между парами частиц на некоторый момент времени пропорциональна кубу времени распространения частиц (при этом коэффициент диффузии пропорционален среднеквадратичному отклонению расстояний между парами частиц в степени 4/3). Достоинство подобного подхода заключается ещё и в том, что он, в принципе, даёт возможность изучать не только концентрацию, осреднённую по ансамблю, но и моменты более высокого порядка, в частности стандартное отклонение концентрации.

Существует довольно много работ, в которых применяются стохастические алгоритмы, использующие понятие расстояния между частицами (например, [38] – [49]). Однако на практике в силу своего статистического характера эти методы даже при использовании современных высокопроизводительных ЭВМ не позволяют давать надёжные предсказания поведения решения в областях с малыми концентрациями ВзВ, а также делать обоснованные прогнозы на длительные периоды времени (год и более) и в дальней окрестности источника загрязнения (километр и более).

Нам представляется, что если нет необходимости вычислять стандартные отклонения концентрации, то случай турбулентной диффузии также может быть описан простым и экономичным процессом (3.4.5), если принять, что дисперсии $\sigma_{x_i}^2$ в законе случайных блужданий частиц определённым образом зависят от времени этого блуждания (началом отсчёта служит момент «возникновения» конкретной частицы)[11]. Именно,

$$\sigma_{x_i}^2(t) = \sigma^2(t + \Delta t) - \sigma^2(t). \tag{3.4.7}$$

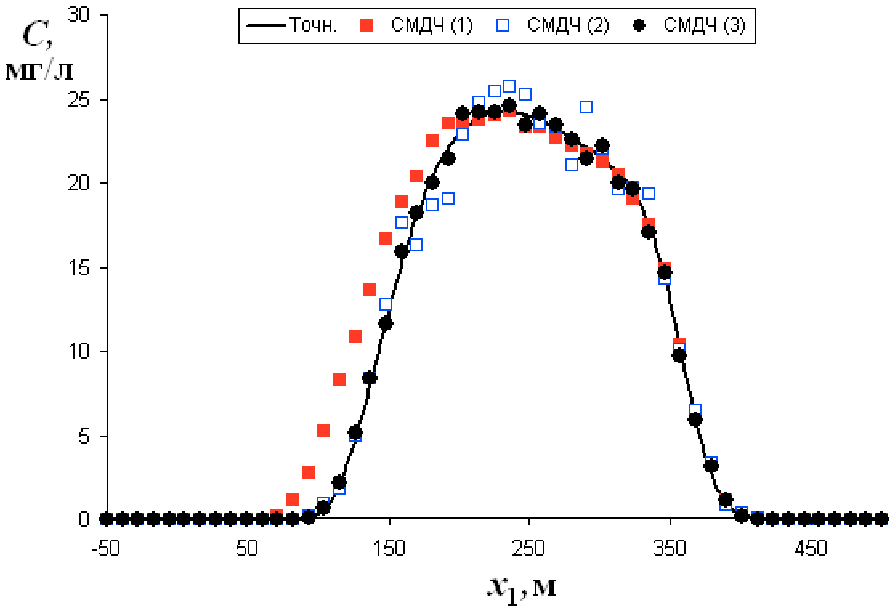
Здесь $\sigma^2(t)$ – реальная «физическая» дисперсия, определяемая спектром горизонтальных турбулентных пульсаций (см., пп. 3.1, 3.2).

Проиллюстрируем сделанное утверждение путём сравнения результатов расчётов по предложенному алгоритму с точным решением задачи расчёта шлейфа консервативного ВзВ от непрерывного точечного источника загрязнения мощностью $\dot{M} = \mathrm{const}$, начинающего действовать в момент времени $t = 0$ в точке $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ в однородном турбулентном потоке глубины H, движущемся со скоростью U в направлении оси x_1 системы координат. В этих расчётах полагалось $H = 10$ м, $U = 0.1$ м/с, $\dot{M} = 1$ кг/с, $\sigma^2(t) = A_3(t - t_0)^3$, $A_3 = 8 \cdot 10^{-9}$ м^2/с^3, t_0 – момент «возникновения» очередной дискретной частицы. Точное решение даётся формулами (3.1.1), (3.1.6). Получающаяся форма шлейфа подобна изображённой на Рис. 3.1.2б сплошными линиями.

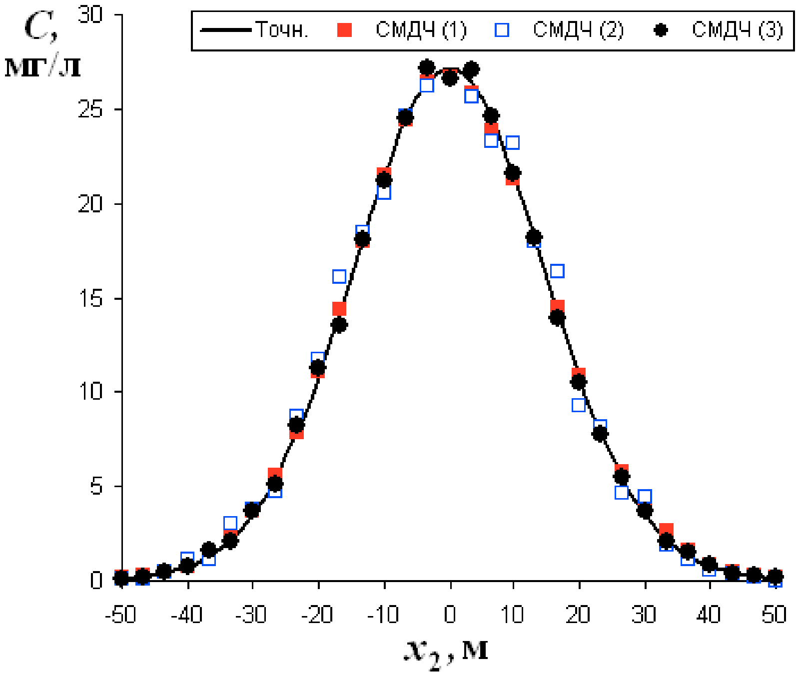
На Рис. 3.4.2, 3.4.3 представлены расчётные концентрации в сечениях $x_2 = 10$ м (а) и $x_1 = 300$ м (б) к моменту времени $t = 1$ час. В расчётах стохастическим методом дискретных частиц варьировалось общее число частиц N, моделирующих непрерывный сброс ВзВ и величина $\mathbf{\Delta x}$ области, используемой для вычисления концентрации взвеси.

---

[11] Это предположение не нарушает условий выполнения центральной предельной теоремы теории вероятностей.

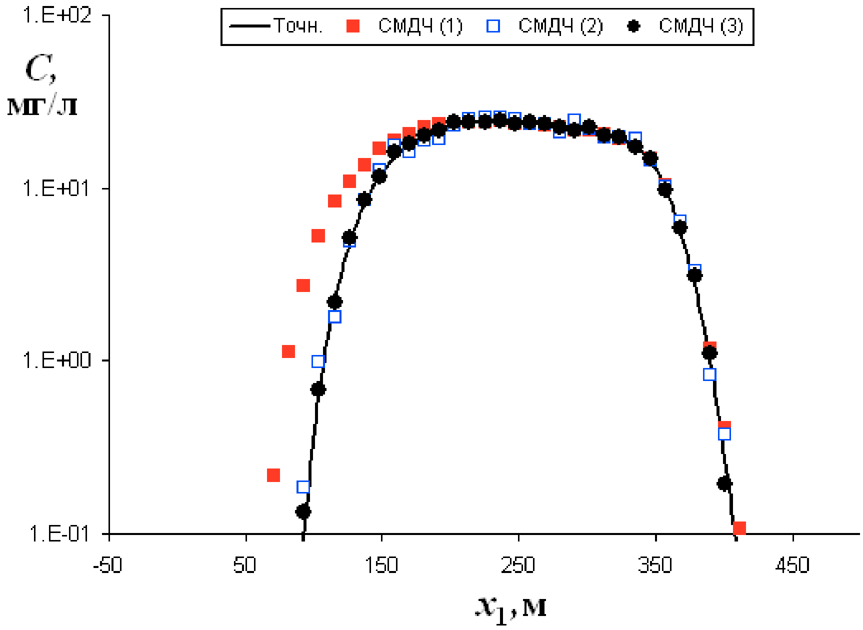


а)

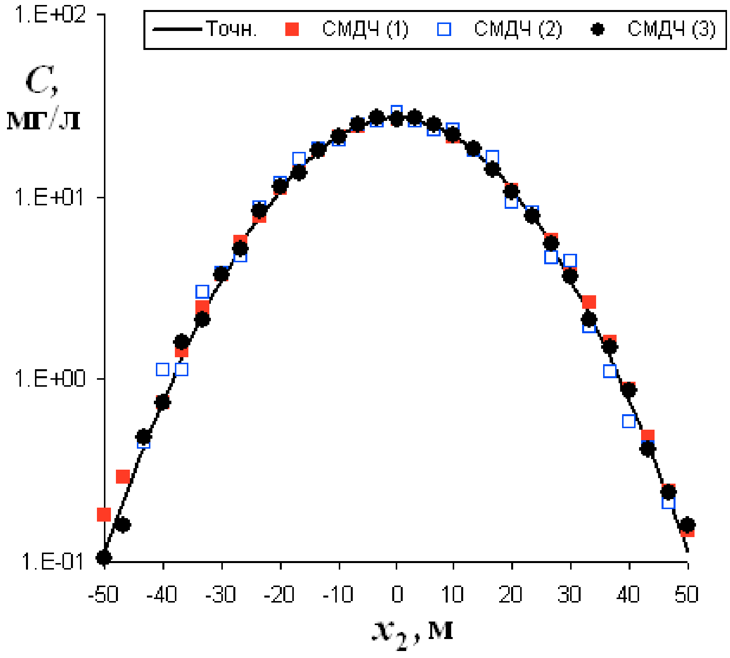


б)

Рис. 3.4.2. Сравнение точного решения с расчётами, выполненными с помощью стохастического метода дискретных частиц.
$1 - N = 10^6$, $\Delta\mathbf{x} = 10\times10$ м^2,
$2 - N = 10^6$, $\Delta\mathbf{x} = 2\times2$ м^2,
$3 - N = 5\cdot10^6$, $\Delta\mathbf{x} = 2\times2$ м^2,



а)



б)

Рис. 3.4.3. То же, что на Рис. 3.5.2, но в логарифмическом масштабе

Из Рис. 3.4.2, 3.4.3 видно, что предложенный вариант стохастического метода дискретных частиц воспроизводит точное решение, отвечающее «закону 4.3» Ричардсона. В то же время, очевидно, что для достижения приемлемой точности расчётов требуется очень большое количество частиц.

3.5. Стохастический метод дискретных облаков

Экономичный метод дискретных облаков неприменим в случае сильно неоднородных полей скорости, содержащих области возвратных течений и/или застойные зоны. Стохастический метод дискретных частиц, свободный от этого недостатка даже в случае пространственно однородных гидродинамических полей не является экономичным, т.к. для достижения приемлемой точности в зоне малых концентраций, расположенной на большом расстоянии от источника ВзВ, требуется очень большое количество частиц. Опишем здесь основные моменты вычислительной методики, совмещающей, как нам представляется, достоинства обоих этих методов.

Представим распределение загрязняющей взвеси в акватории совокупностью следующих «эллиптических дискретных облаков», порождаемых действием мгновенных точечных источников (см. Рис. 3.4.1):

$$C(\mathbf{x}',t)=\frac{m(t)}{2\pi H(\mathbf{x}_0(t))\,\sigma'_{1C}(t)\,\sigma'_{2C}(t)}\exp\left(-\frac{x_1'^2}{2\sigma_{1C}'^2(t)}-\frac{x_2'^2}{2\sigma_{2C}'^2(t)}\right) \quad (3.5.1)$$

Здесь m – текущая масса взвеси в облаке, $\mathbf{x}_0$ – координаты центра облака в глобальной системе координат. Штрихами помечены локальные координаты, отсчитываемые от центра облака (x_1' – в направлении движения воды, x_2' – в перпендикулярном направлении). Каждое облако характеризуется моментом своего возникновения t_0 и начальными дисперсиями $\sigma_{1C0}'^2$ и $\sigma_{2C0}'^2$.

В отличие от метода облаков примем, что центры $\mathbf{x}_0(t)$ испытывают дискретные случайные блуждания с дисперсией $\sigma_X^2(t)$ (дисперсия случайных приращений координат на каждом шаге процесса равна $\sigma_X^2(t_{n+1})-\sigma_X^2(t_n)$, соответственно) и переходят на каждом временном шаге $\Delta t_n = t_{n+1}-t_n$ из положения $\mathbf{x}_0^n$ в положение $\mathbf{x}_0^{n+1}$ по закону

$$x_{0i}^{n+1} = x_{0i}^n + u_i\left(\mathbf{x}_0^n, t_n\right)\Delta t_n + N\left(\sigma_X^2(t_{n+1})-\sigma_X^2(t_n)\right). \quad (3.5.2)$$

Здесь $N(D)$ – нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием 0 и дисперсией D.

Характеризующие вычислительный процесс дисперсии $\sigma_{1C}'^2(t)$, $\sigma_{2C}'^2(t)$ и $\sigma_X^2(t)$ свяжем с определяемой спектром горизонтальных турбулентных пульсаций потока «физической» турбулентной дисперсией $\sigma^2(t)$ (см. пп. 3.1, 3.2) и с коэффициентом продольной дисперсии K_D (см. п. 3.3) соотношениями

$$\frac{d\sigma_{1C}'^2}{dt} = \alpha\frac{d\sigma^2}{dt} + 2K_D, \quad \frac{d\sigma_{2C}'^2}{dt} = \alpha\frac{d\sigma^2}{dt}, \quad \frac{d\sigma_X^2}{dt} = (1-\alpha)\frac{d\sigma^2}{dt}, \quad (3.5.3)$$

в которых величина $0 \le \alpha \le 1$ – настроечный параметр процесса (величина 1 – α может быть названа «степенью стохастичности алгоритма»).

Изменение массы облака на каждом шаге процесса будем рассчитывать по формуле

$$m(t_{n+1}) = m(t_n)\exp\left[-\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{W(\tau(t))}{H(\mathbf{x}_0(t))}dt\right] = m(t_n)\exp\left[F(\tau_n) - F(\tau_{n+1})\right],$$

$$F(\tau) = \frac{1}{k_*}\int_0^{\tau} W(\tau')d\tau',$$

где W – эффективная гидравлическая крупность ВзВ, а τ – безразмерное время (2.5.3). Заметим, что функция $F(\tau)$ может быть табулирована заранее совместно с функцией $w(\tau)$. Её введение обеспечивает консервативность расчёта осаждения ВзВ даже при больших шагах Δt_n.

Значение полной концентрации взвеси в произвольной точке акватории в моменты времени t_n вычисляется с помощью (3.5.1) путём суммирования по всем облакам, существующим в данный момент времени. Для вычисления увеличения толщины донных отложений, происходящее в результате осаждения ВзВ, в расчётной области может быть введена разностная сетка, в ячейки (i, j) которой в течение всего расчёта для всех участвующих в расчёте облаков суммируются величины

$$\Delta M_{ij}\left(t_{n+1/2}\right)=\frac{m(t_n)-m(t_{n+1})}{2\pi\sigma'_{1C}\left(t_{n+1/2}\right)\sigma'_{2C}\left(t_{n+1/2}\right)}\exp\left(-\frac{x'^2_{1ij}}{2\sigma'^2_{1C}\left(t_{n+1/2}\right)}-\frac{x'^2_{2ij}}{2\sigma'^2_{2C}\left(t_{n+1/2}\right)}\right),$$

где x'_{1ij} и x'_{2ij} – положения центров ячеек сетки в локальной системе координат, связанной с центром облака. После окончания расчёта увеличение h толщины донных отложений в ячейке сетки рассчитывается по формуле $h_{ij} = M_{ij} / \left[(1-\varepsilon_0)\,\rho_0 S_{ij}\right]$, где M_{ij} – масса отложений, накопленная в ячейке, ρ_0 – минеральная плотность ВзВ, ε_0 – пористость донных отложений, а S_{ij} – площадь этой ячейки.

При $\alpha = 1$ описанный алгоритм представляет собой метод дискретных облаков. Предел $\alpha \to 0$ соответствует методу дискретных частиц (при отсутствии продольной дисперсии, когда в (3.5.3) $K_D = 0$[12]).

Отметим, что если параметр стохастичности α очень мал, т.е. малы дисперсии σ'^2_{1C0} и σ'^2_{2C0} дискретных облаков и распределения концентрации взвеси в них близки к δ-функциям, то при расчётах поля концентрации ВзВ перед суммированием концентраций по отдельным облакам может оказаться необходимым дополнительно проводить следующую усредняющую консервативную процедуру:

[12] Если $K_D \neq 0$, то в пределе $\alpha \to 0$ эллиптическое облако вырождается в отрезок. Поэтому этот случай можно назвать « стохастическим методом дискретных отрезков».

$$\overline{C}_{\Delta\mathbf{x}}(\mathbf{x}',t)=\frac{1}{4R_1'R_2'}\int\limits_{x_1'-R_1'}^{x_1'+R_1'}\int\limits_{x_2'-R_2'}^{x_2'+R_2'}C(\mathbf{x}',t)\,dx_1'dx_2'=$$

$$=\frac{m}{16R_1'R_2'H}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_1'+R_1'}{\sqrt{2}\sigma_{1C}'}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x_1'-R_1'}{\sqrt{2}\sigma_{1C}'}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_2'+R_2'}{\sqrt{2}\sigma_{2C}'}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x_2'-R_2'}{\sqrt{2}\sigma_{2C}'}\right)\right].$$

Здесь erf – функция ошибок (интеграл вероятностей), для которой имеются удобные и достаточно точные приближения элементарными функциями (см., например, [50]), а $\Delta\mathbf{x}=2R_1'\times 2R_2'$ – область усреднения.

Как уже отмечалось, метод дискретных облаков ($\alpha=1$) наиболее экономичен с точки зрения вычислительных затрат. Однако для его успешного применения необходимо, чтобы гидродинамические поля (и глубины) были достаточно однородными, то есть менялись мало на расстояниях порядка увеличивающегося со временем размера дискретного облака. На практике априорная проверка выполнения этого предположения обычно невозможна. Поэтому важно, что предложенный подход позволяет достаточно экономично оценивать достоверность получаемых результатов путём проведения серии расчётов с последовательным уменьшением параметра α.

3.6. Точные решения для случая точечного источника взвеси в потоке со сдвигом скорости

С целью тестирования предложенного алгоритма рассмотрим задачу расчёта переноса примеси в потоке со сдвигом скорости, предполагая, что поток движется со скоростью U параллельно оси x_1 системы координат. Ограничимся случаем консервативной взвеси.

В соответствии с моделью (2.4.1), (3.3.1), распределение концентрации G взвеси в облаке, возникающем в результате действия в момент времени $t=0$ мгновенного точечного источника единичной массы, в данном случае описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial G}{\partial t}+U(1+ax_2)\frac{\partial G}{\partial x_1}=\left[\,K^T(t)+\gamma HU\,|1+ax_2|\right]\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}+K^T(t)\frac{\partial^2 G}{\partial y_2^2},$$

$$G=\frac{1}{H}\delta(\mathbf{x})\ \text{при}\ \ t=0, \tag{3.6.1а}$$

$$K^T(t)=\frac{n-1}{2}A_n\,t^{n-1},\quad A_n,n=\text{const}. \tag{3.6.1б}$$

Здесь параметры a и γ задают величины горизонтального и вертикального сдвига скорости.

Нам не удалось проинтегрировать задачу (3.6.1) в элементарных функциях для общего случая $a \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Поэтому рассмотрим далее два частных примера.

Вертикальный сдвиг скорости отсутствует (γ = 0). Заменой переменных

$$x_1'=x_1-U(1+ax_2)\,t,\quad x_2'=x_2,\quad t'=t \tag{3.6.2}$$

уравнение (3.7.1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial G}{\partial t}=K_{11}(t)\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}+2K_{12}(t)\frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial x_2}+K_{22}(t)\frac{\partial^2 G}{\partial x_2}, \tag{3.6.3а}$$

$$K_{11}(t)=\left[1+(aUt)^2\right]K^T(t),\quad K_{12}(t)=-aUt\ K^T(t),\quad K_{22}(t)=K^T(t) \tag{3.6.3б}$$

(штрихи у новых переменных здесь и далее опущены).

Можно проверить, например непосредственной подстановкой, что решением уравнения (3.6.3) является следующая гауссова функция:

$$G=\frac{1}{2\pi HS}\exp\left[-\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{S^2}\left(\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}+\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}-\frac{S_{12}x_1x_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\right],$$

$$S^2=\sigma_1^2\sigma_2^2-S_{12}^2,\ \ H\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Gdx_1dx_2=1, \tag{3.6.4а}$$

в которой

$$\frac{d\sigma_1^2}{dt} = 2K_{11}(t), \quad \frac{dS_{12}}{dt} = 2K_{12}(t), \quad \frac{d\sigma_2^2}{dt} = 2K_{22}(t). \qquad (3.6.4б)$$

Как уже отмечалось, изолинии функции (3.6.4а) представляют собой эллипсы, главные оси которых повёрнуты на угол $\theta = 0.5\,\mathrm{arctg}\left(2S_{12}/\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)\right)$ относительно осей системы координат (x_1, x_2) (Рис. 3.4.1).

Интегрируя (3.6.4б) с учётом (3.6.1б), (3.6.3б), получим

$$\begin{gathered} \sigma_1^2(t) = A_n t^n + \frac{n}{n+2}(aU)^2 A_n t^{n+2} + \sigma_{10}^2, \\ S_{12}(t) = -\frac{n}{n+1} aUA_n t^{n+1} + S_{120}, \\ \sigma_2^2(t) = A_n t^n + \sigma_{20}^2. \end{gathered} \qquad (3.6.5)$$

Постоянные интегрирования $\sigma_{10}, \sigma_{20}, S_{120}$ здесь характеризуют размеры и ориентацию мгновенного компактного «неизотропного» источника взвеси. Для точечного источника $\sigma_{10} = \sigma_{20} = S_{120} = 0$. Если источник взвеси изотропный и имеет характерный размер σ_0, то $\sigma_{10} = \sigma_{20} = \sigma_0$, $S_{120} = 0$.

Итак, возвращаясь к исходным переменным с помощью формул (3.7.2), найдём, что решение задачи (3.7.1) имеет вид

$$\begin{gathered} G = \frac{1}{2\pi HS} \exp\left[-\frac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2}{S^2}\left(\frac{\left(x_1 - U(1+ax_2)\,t\right)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right)\right] \times \\ \times \exp\left[\frac{S_{12}\,\left(x_1 - U(1+ax_2)\,t\right)x_2}{S^2}\right], \\ S^2 = \sigma_1^2\,\sigma_2^2 - S_{12}^2, \end{gathered} \qquad (3.7.6)$$

в котором функции $\sigma_1(t), \sigma_2(t), S_{12}(t)$ удовлетворяют соотношениям (3.6.5) с $\sigma_{10} = \sigma_{20} = S_{120} = 0$. При $a = 0$ это решение переходит в указанную в п. 3 функцию (3.1.1), описывающую распределение взвеси, возникающее в результате действия мгновенного точечного источника единичной массы в однородном потоке.

Горизонтальный сдвиг скорости отсутствует ($a = 0$). В этом случае справедливы все приведённые выше выкладки, за исключением того, что

$$K_{11}(t) = K^T(t) + \gamma HU = \frac{n}{2} A_n t^{n-1} + \gamma HU,$$
$$K_{12}(t) = 0, \quad K_{22}(t) = \frac{n}{2} A_n t^{n-1}. \tag{3.6.7}$$

Интегрируя (3.6.4б) с учётом (3.6.1б), (3.6.7) находим, что решение сформулированной задачи будет иметь вид (3.6.6), если

$$\sigma_1^2(t) = A_n t^n + 2\gamma HUt + \sigma_{10}^2,$$
$$S_{12} = S_{120} = \mathrm{const}, \quad \sigma_2^2(t) = A_n t^n + \sigma_{20}^2.$$

Для точечного источника постоянные интегрирования $\sigma_{10} = \sigma_{20} = S_{120} = 0$.

Используя (3.6.6) и принцип суперпозиции, распределение усреднённой по глубине концентрации C взвеси в шлейфах загрязнения, порождаемых источником постоянной интенсивности $\dot{M}$, который начинает действовать в момент времени $t = 0$, запишем в виде

$$C = \dot{M} \int_0^t G(\mathbf{x}, t - t_0)\, dt_0. \tag{3.6.8}$$

Интеграл (3.6.8) рассчитывался методом трапеций. Контроль точности осуществлялся путём увеличения количества узлов интегрирования. Результаты расчётов, выполненных для случая $H = 10$ м, $U = 0.1$ м/с, $\dot{M} = 1$ кг/с, $t = 1$ час, $A_3 = 8 \cdot 10^{-9}$ м^2/с^3. представлены на Рис. 3.6.1 в виде изолиний концентрации C [мг/л] взвеси в шлейфах загрязнения. В расчётах использовалась стандартная эмпирическая модель горизонтальной океанической турбулентности (см. п. 3.2).

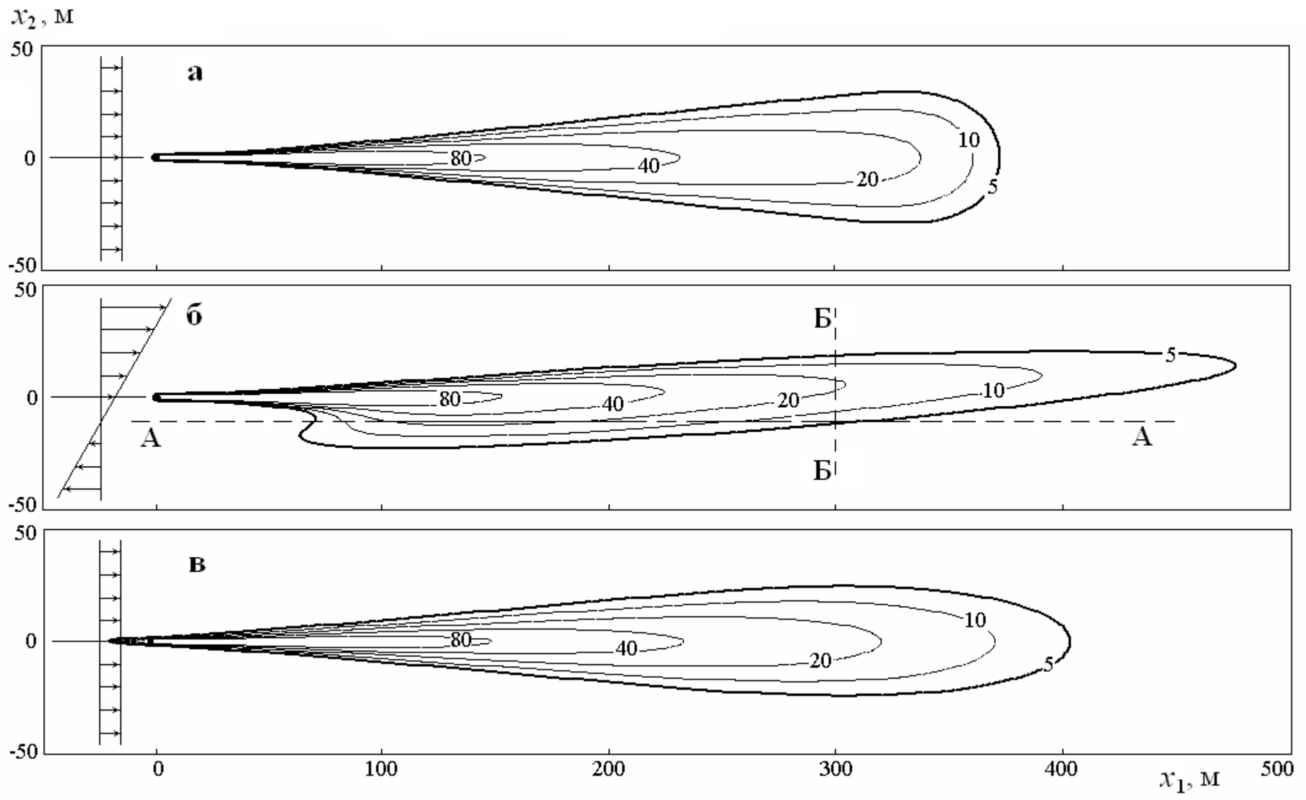


Рис. 3.6.1. Шлейфы ВзВ в однородном потоке (а),
в потоке с горизонтальным сдвигом скорости (б),
в потоке с вертикальным сдвигом скорости (в)

На Рис. 3.6.1а представлен простейший случай потока без сдвига скорости, когда $a = 0$, $\gamma = 0$. Результаты расчётов потока с горизонтальным сдвигом (при $a = 0.1$ м$^{-1}$, $\gamma = 0$) показаны на Рис. 3.6.1б, а с вертикальным сдвигом (при $a = 0$, $\gamma = 0.45$) – на Рис. 3.6.1в.

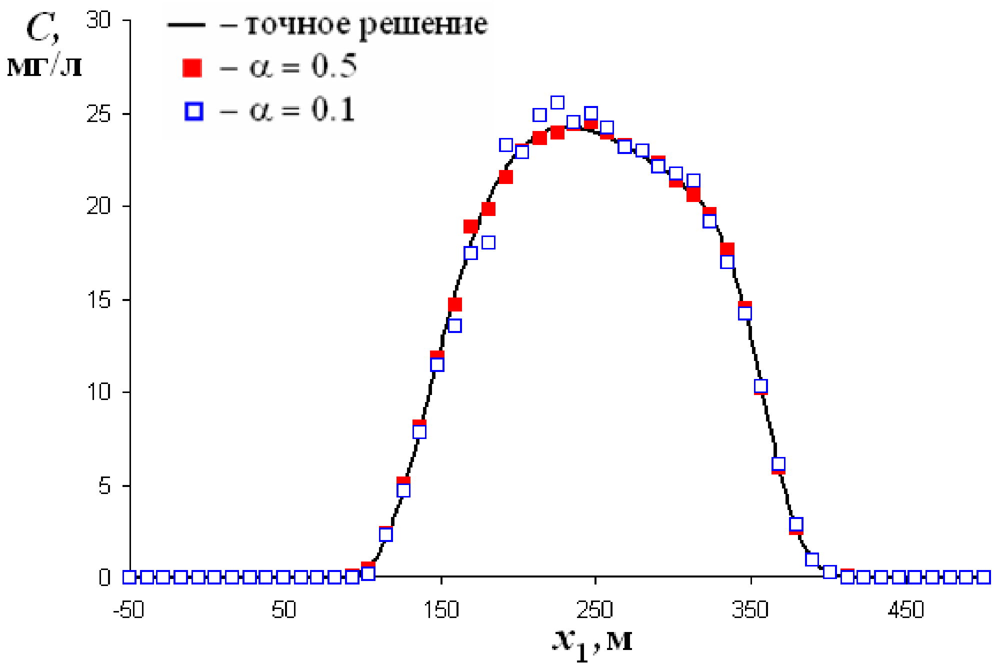
3.7. Тестирование стохастического метода дискретных облаков

Приведённые на Рис. 3.6.1 точные решения использовались для тестирования стохастического метода дискретных облаков. Некоторые результаты приведены ниже на Рис. 3.7.1–3.7.6 в виде графиков концентрации C в сечениях А–А и Б–Б, показанных Рис. 3.6.1,б. Сплошные кривые – точное решение, зачернённые маркеры – расчёт стохастическим методом дискретных облаков с параметром $\alpha = 0.5$, незачернённые маркеры – расчёт с параметром $\alpha = 0.1$. Во всех расчётах количество дискретных облаков составляло $N = 10^5$.

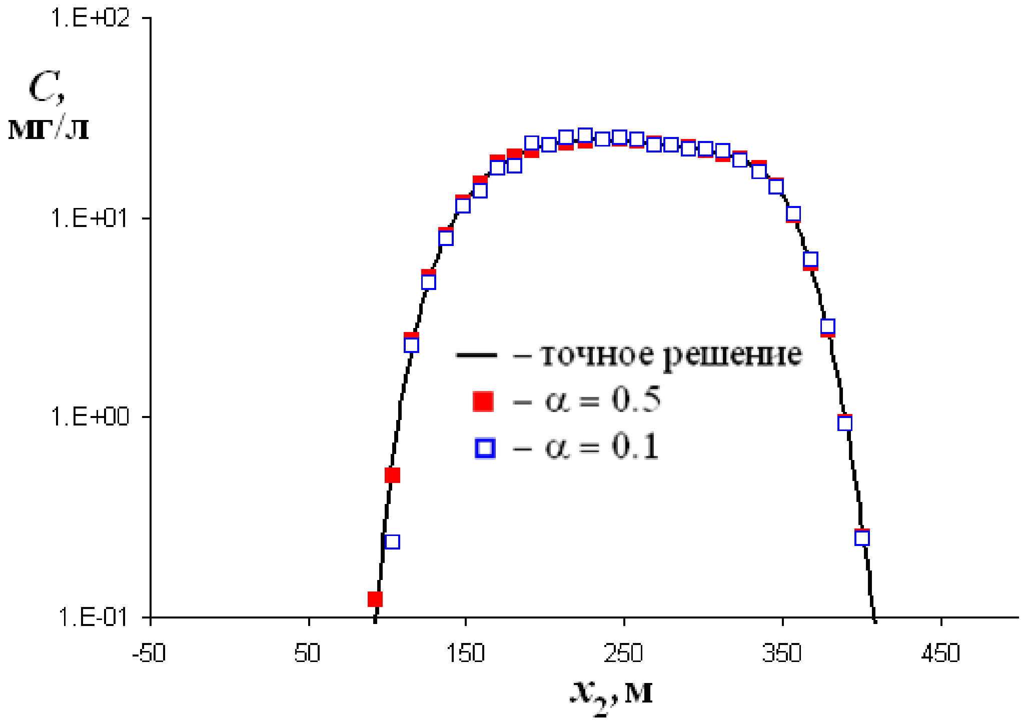
Видно, что в простейшем случае однородного потока (Рис. 3.7.1, 3.7.2) вне зависимости от значения α наблюдается хорошее соответствие результатов расчётов точному решению. Укажем, что, согласно нашим расчётам, здесь, как и следовало ожидать, наиболее эффективен обычный метод дискретных облаков ($\alpha = 1$). Соответствующая Рис. 3.7.1, 3.7.2 точность в этом случае достигается уже при $N = 10^3$ (при $N = 10^2$ вблизи источника в расчётах наблюдаются заметные нефизические колебания концентрации взвеси). В то же время, получения такого же результата стохастическим методом дискретных частиц ($\alpha = 0$) требуется не менее $N = 10^7$ частиц.

В случае потока с горизонтальным сдвигом, когда имеется область возвратного течения (см. Рис. 3.7.1б), параметр α должен быть достаточно малым, что подтверждают Рис. 3.7.3, 3.7.4.

Наконец, в потоке с вертикальным сдвигом скорости (Рис. 3.7.5, 3.7.6) также наиболее эффективным является метод эллиптических дискретных облаков ($\alpha = 1$).

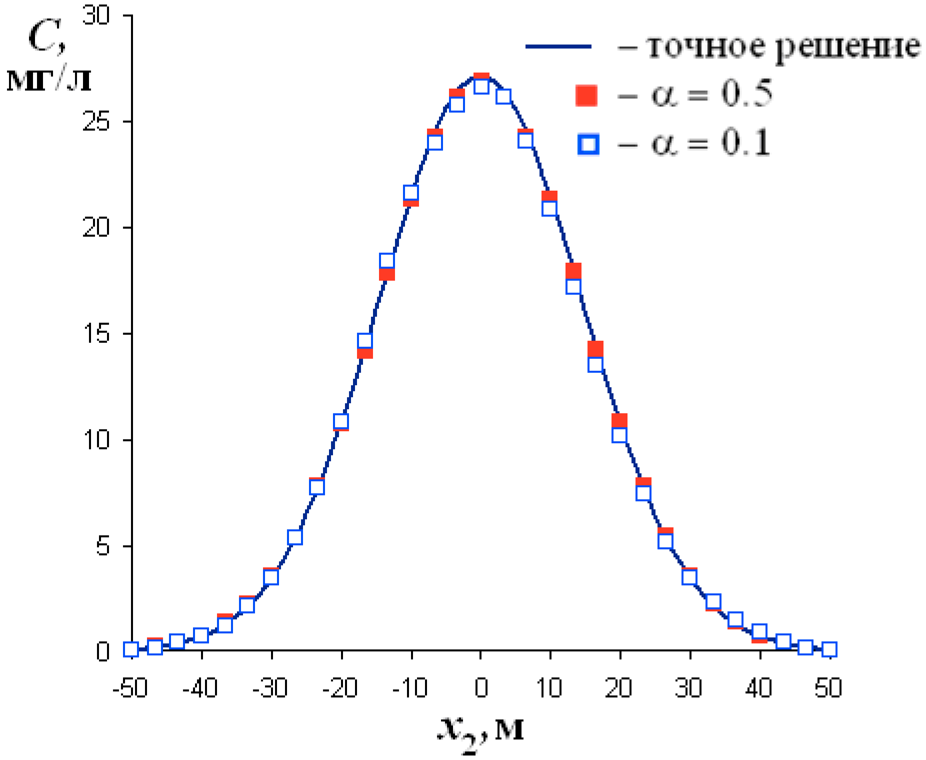


а)

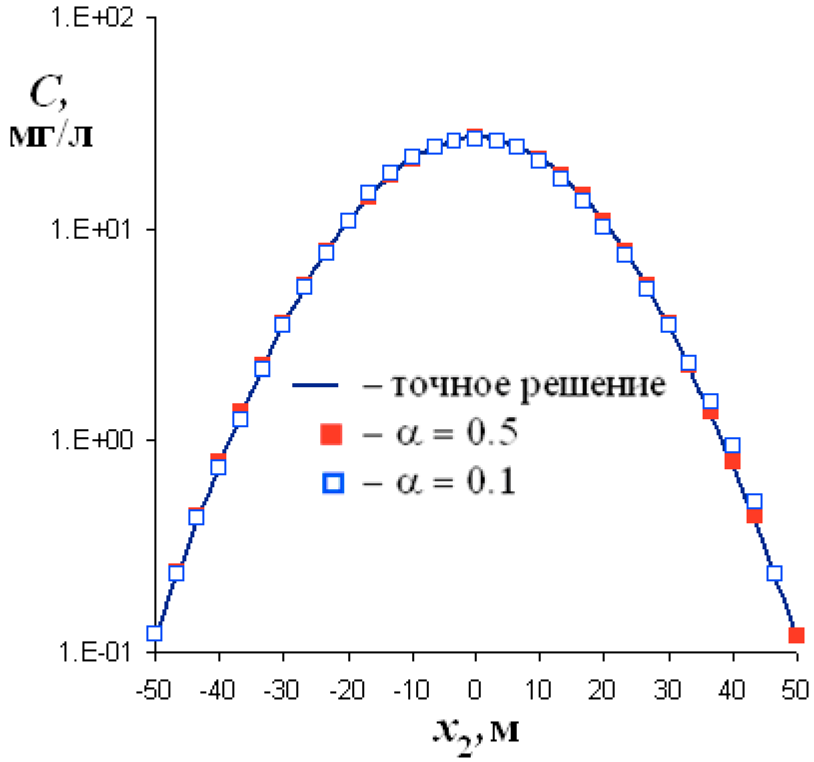


б)

Рис. 3.7.1. Однородный поток. Распределение концентрации в сечении А–А в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах

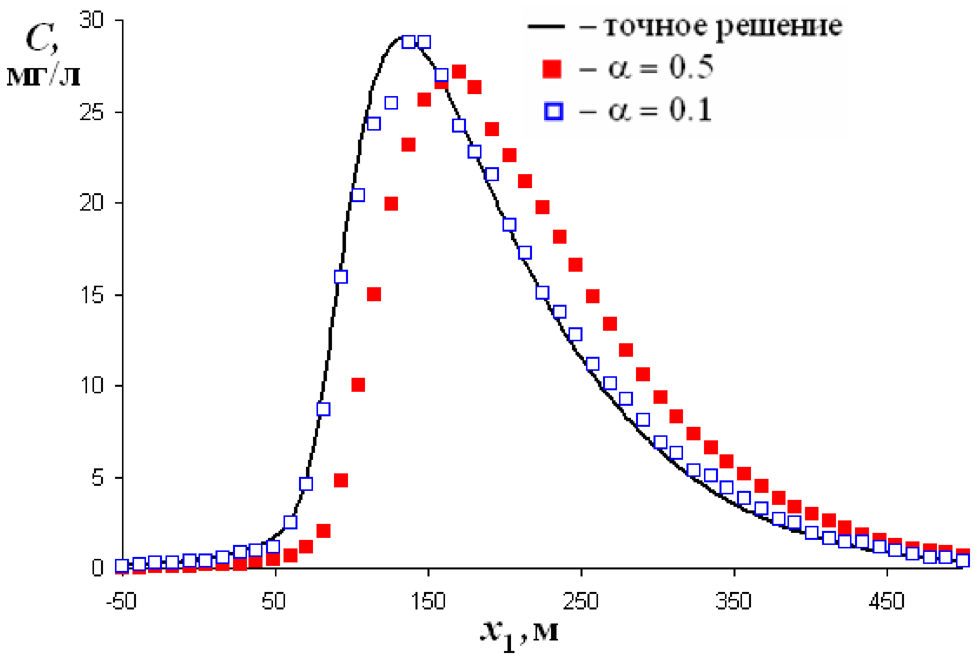


а)

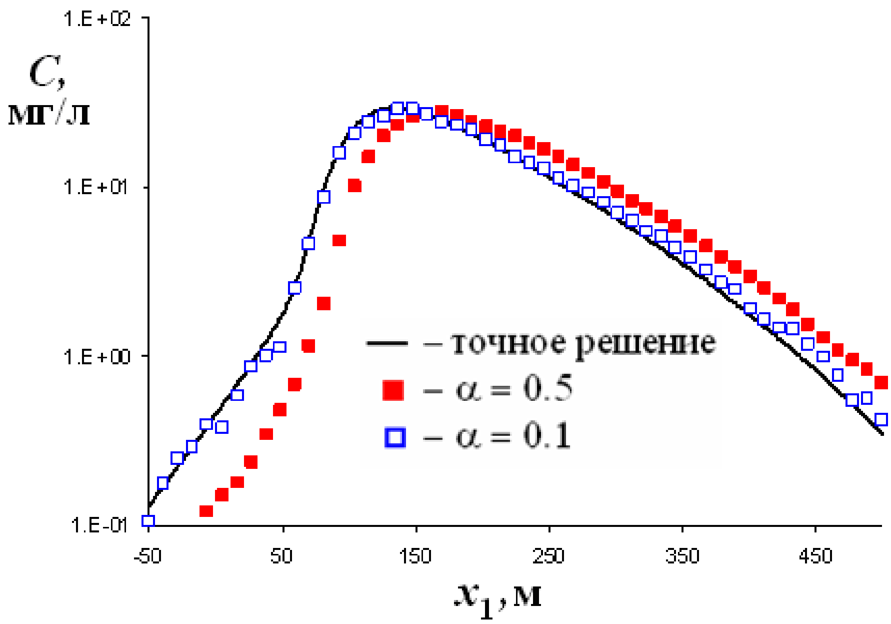


б)

Рис. 3.7.2. То же, что на Рис. 3.7.1, но в сечении Б–Б

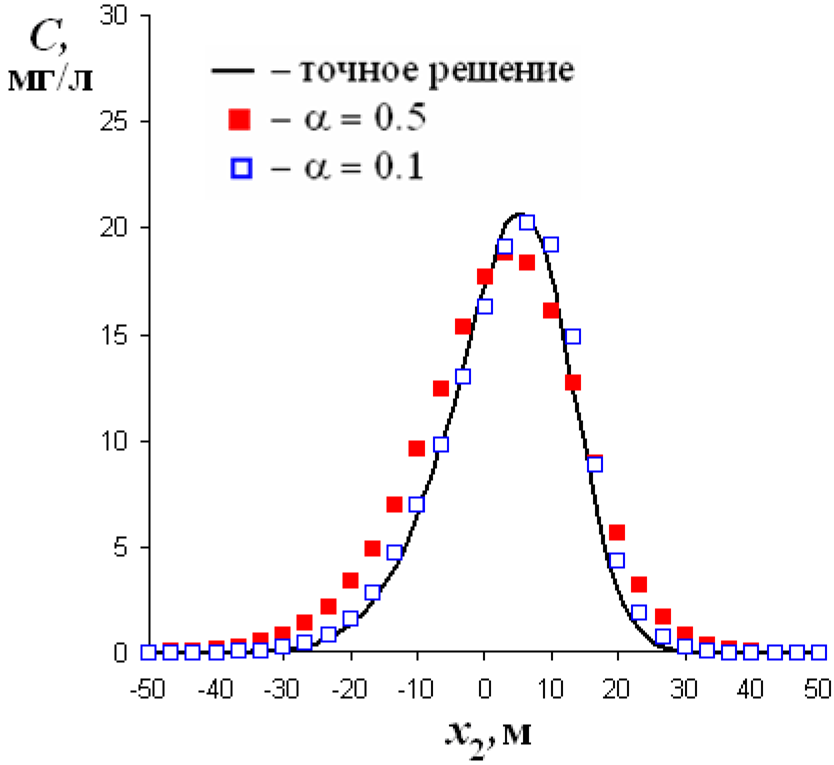


а)

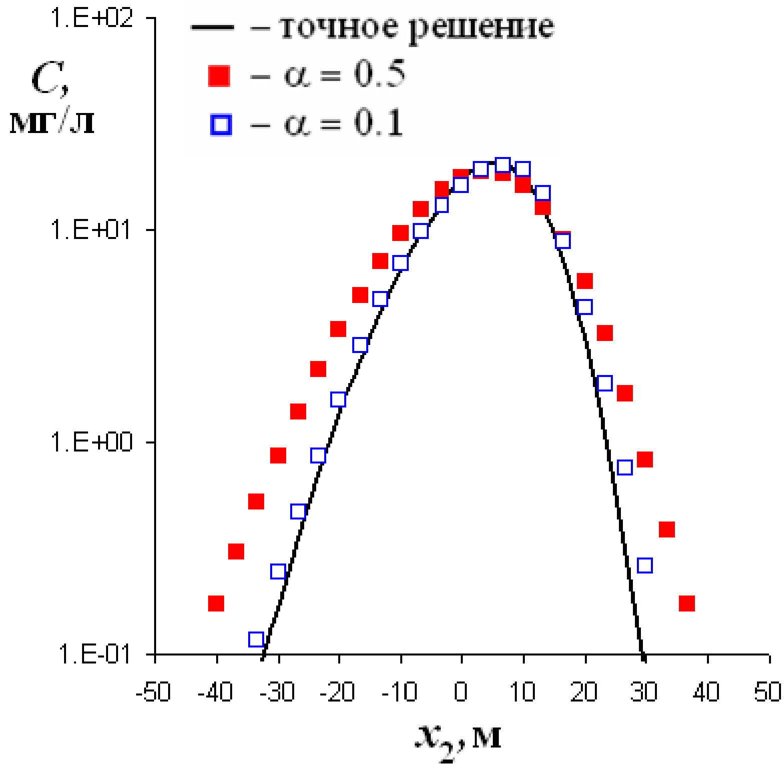


б)

Рис. 3.7.3. Поток с горизонтальным сдвигом скорости. Распределение концентрации в сечении А–А в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах

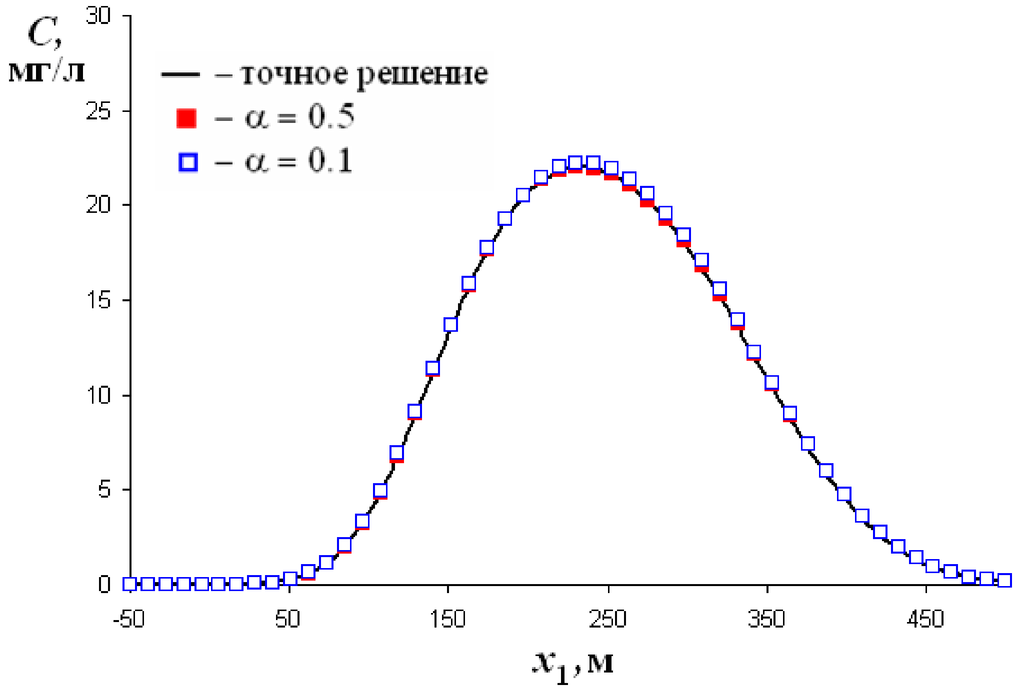


а)

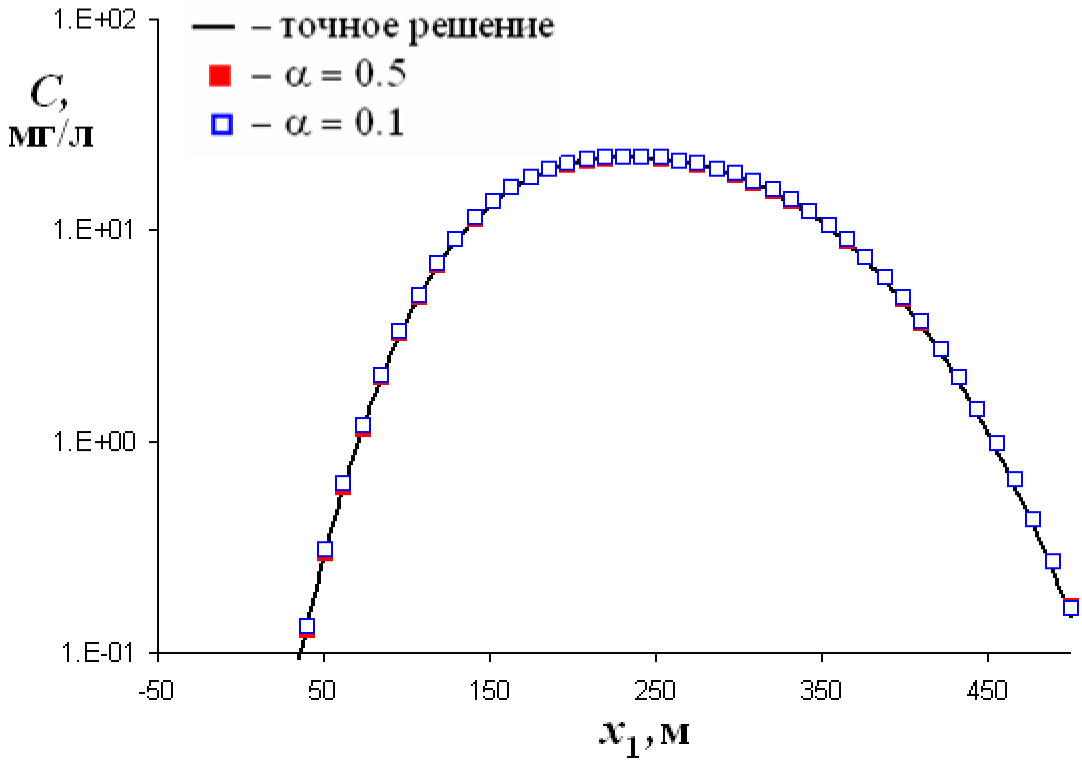


б)

Рис. 3.7.4. То же, что на Рис. 3.7.3, но в сечении Б–Б

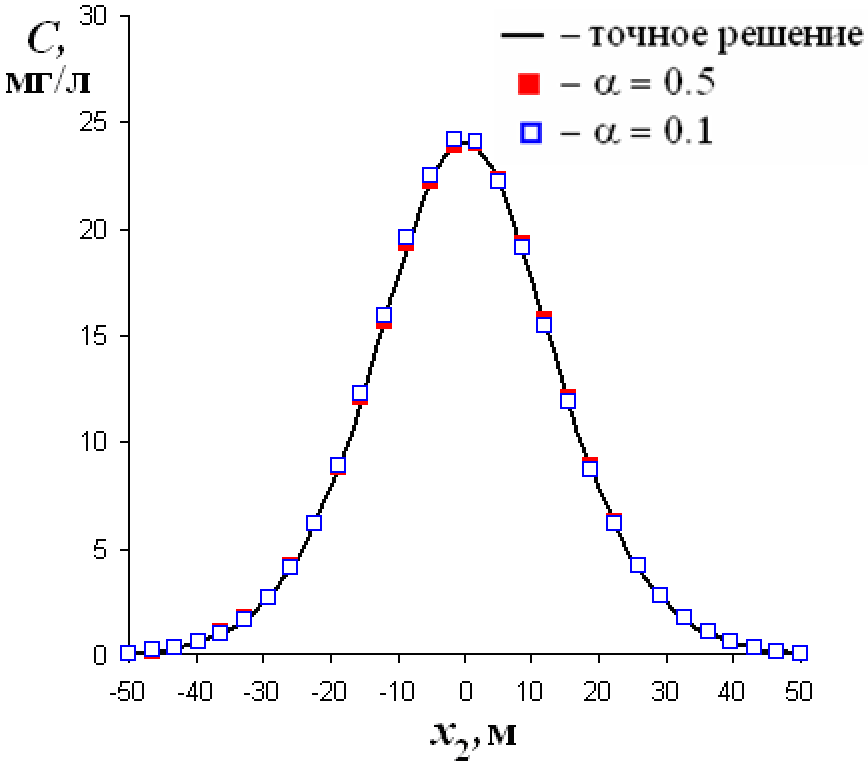


б)

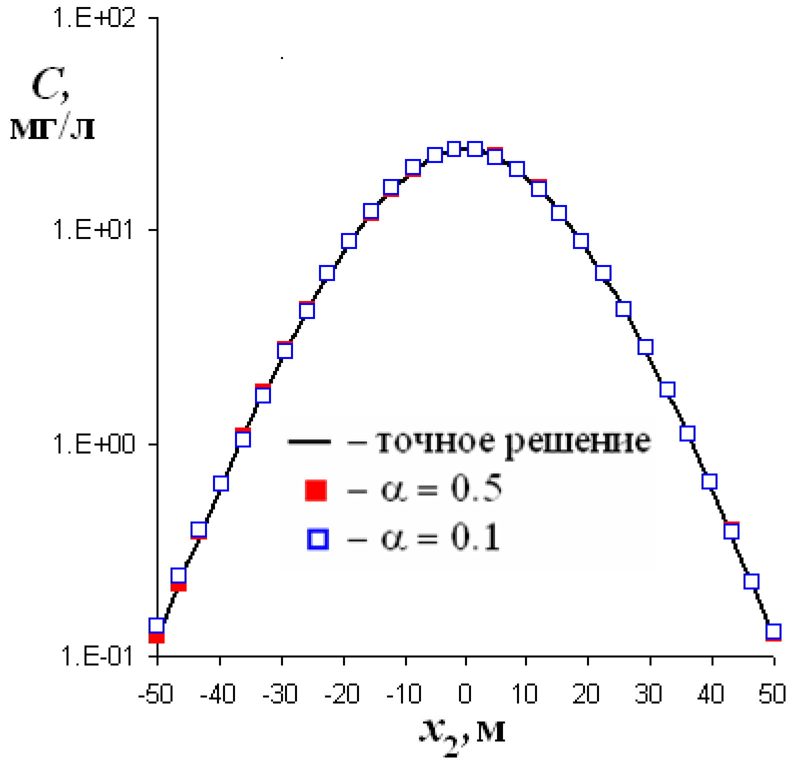


б)

Рис. 3.7.5. Поток с вертикальным сдвигом скорости. Распределение концентрации в сечении А–А в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах



а)



б)

Рис. 3.7.6. То же, что на Рис. 3.7.5, но в сечении Б–Б

В заключение приведём пример модельного расчёта осаждения в однородном потоке шлейфа реальной полидисперсной взвеси, дисперсный состав которой представлен в табл. 2.6.1. Точное решение в этом случае даётся интегралом (3.6.8) со следующей функцией мгновенного точечного источника:

$$G(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2\pi H\sigma^2(t)}\exp\left[-\frac{(x_1-Ut)^2+x_2{}^2}{2\sigma^2(t)}\right]\exp\left[-\int_0^t\frac{W(t')}{H}dt'\right]$$

На Рис. 3.7.7 это точное решение сравнивается для момента времени $t = 1$ час с расчётами, выполненными с помощью тестируемого метода. Использовался метод дискретных облаков ($\alpha = 1$) при общем количестве облаков $N = 10^3$. Рассматривался случай полностью адсорбирующего дна ($\beta_j = \infty$) и случай отсутствия диффузионных потоков взвеси к дну ($\beta_j = 1$).

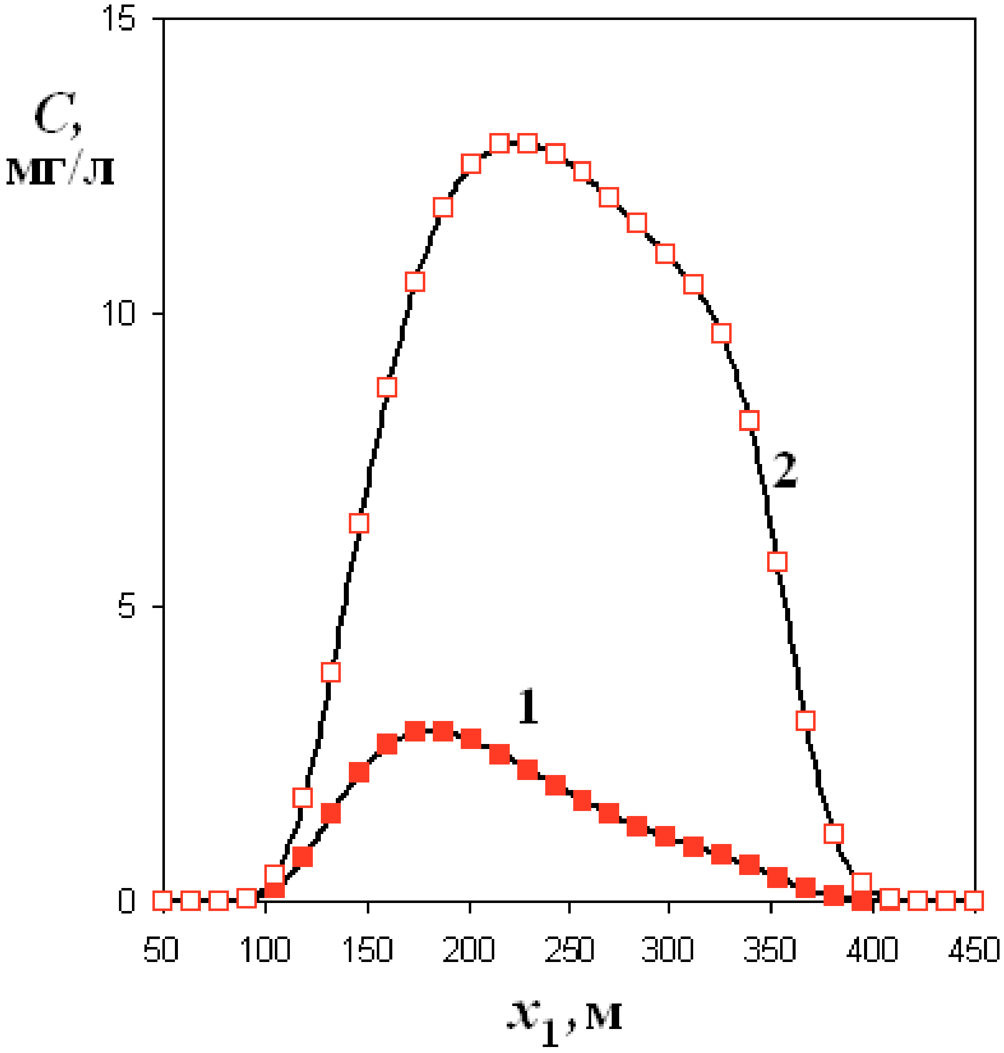


Рис. 3.7.7. Распределение концентрации ВзВ в сечении А–А (см. Рис. 3.6.1б). Сплошные кривые – точное решение, 1 – $\beta_j = \infty$, 2 – $\beta_j = 1$

Глава 4. Расчёт дампинга грунта в Азовском море

В данной главе приводятся результаты применения разработанной методики для моделирования распространения ВзВ в акватории Азовского моря при утилизации (дампинге) грунта, изъятого при проведении дноуглубительных работ в порту Темрюк. Исходные данные для расчётов несколько упрощены, но выбраны таким образом, чтобы они в общих чертах соответствовали реально проводимым в рассматриваемом регионе работам, гидрометеорологическим условиям и характеристикам утилизируемых донных отложений.

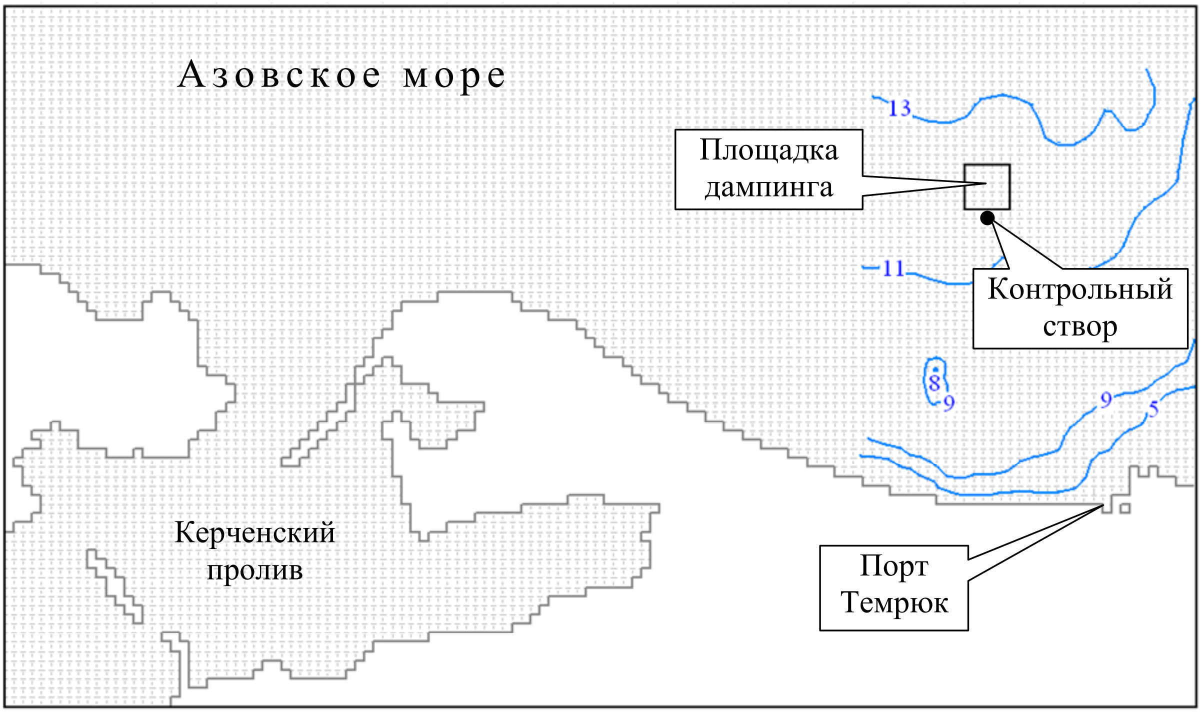


Рис. 4.1.1. Положение площадки дампинга

Целью работы является демонстрация на конкретном примере работоспособности предложенной методики моделирования переноса ВзВ, а также проведение методических расчётов, направленных на выявление степени достоверности получаемых результатов.

4.1. Объект моделирования и сценарий дампинга

Порт Темрюк расположен в южной части Темрюкского залива Азовского моря. Природные условия в районе порта Темрюк определяют высокий уровень заносимости его судоходных каналов, которые поэтому требуют периодического ремонтного восстановления. Примерно половина изымаемого при дноуглубительных работах грунта может в процессе проведения работ складироваться в море на площадке дампинга размером 3×3 км^2 (глубина ≈ 12 м), расположенной на подходе к порту с северо-запада (Рис. 4.1.1).

Таблица 4.1.1

№ фракции	Диапазон диаметров частиц, мм	Массовая доля фракции, %	Гидравлическая крупность, м/с
1	2.0 – 0.1	14.0	1.6E-1
2	0.1 – 0.05	36.0	4.5E-3
3	0.05 – 0.01	46.0	7.7E-4
4	0.01 – 0.005	2.8	4.9E-5
5	0.005 – 0.0001	1.2	5.6E-6

В настоящей работе при моделировании процесса дампинга предполагалось, что вывоз грунта на площадку захоронения осуществляется самоотвозными шаландами (баржами) грузоподъёмностью $M_0 = 265$ т. Момент начала дампинга – 4001 час, отсчитываемый от начала года (соответствует 16 июня). Момент окончания дампинга – 4202 час (25 июня). Считалось, что каждый час на площадке разгружается одна баржа. Положение 201 точки разгрузки барж на площадке дампинга задавалось с использованием случайной величины, равномерного распределённой по обеим координатам. Вывозимый на площадку дампинга грунт – ил с гранулометрическим составом, представленным в табл. 4.1.1. Его минеральная плотность $\rho_0 = 2650$ кг/м^3, а пористость отложений, образующихся на дне, $\varepsilon_0 = 0.5$.

Каждый отдельный эпизод дампинга моделировался мгновенным распределённым источником ВзВ. Считалось, что каждый такой источник одновременно «генерирует» N_p облаков ($N_p \geq 1$). Начальная концентрация минеральной взвеси в отдельном облаке задавалась в виде

$$C_0 = \frac{1}{N_p}\begin{cases} \dfrac{M_0}{2\pi(z_2 - z_1)\sigma'_{10}\sigma'_{20}}\exp\left(-\dfrac{x_1'^2}{2\sigma_{10}'^2} - \dfrac{x_2'^2}{2\sigma_{20}'^2}\right), & z_1 \leq z \leq z_2, \\ 0, \quad z < z_1, \quad z > z_2, \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

где вертикальная координата z отсчитывается от свободной поверхности, $z_1 = 1$ м, $z_2 = 3$ м, локальные координаты x_1' и x_2' отсчитываются от точки дампинга по направлению течения воды и в перпендикулярном направлении. Величины $\sigma'_{10} = 5\,\text{м}$ и $\sigma'_{20} = 2.5\,\text{м}$ (половины примерных размеров трюма баржи)[13)].

4.2. Гидрологические условия

Для получения количественных характеристик течения воды в рассматриваемом районе использовалась следующая система уравнений “мелкой воды” [51]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial hu_2}{\partial x_2} = 0, \qquad h = H + \eta,$$

$$\frac{\partial hu_1}{\partial t} + \frac{\partial hu_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial hu_1u_2}{\partial x_2} - fhu_2 =$$

$$= -\frac{\partial g\,h^2/2}{\partial x_1} + gh\frac{\partial H}{\partial x_1} + A\left(\frac{\partial^2 hu_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 hu_1}{\partial x_2^2}\right) + \tau_1^0 + \tau_1,$$

[13] Выше рассматривались, в основном, мгновенные точечные источники взвеси. Все результаты легко обобщаются на случай (4.4.1)

$$\frac{\partial hu_2}{\partial t}+\frac{\partial hu_1u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial hu_2^2}{\partial x_2}+fhu_1=$$

$$=-\frac{\partial g\,h^2/2}{\partial x_2}+gh\frac{\partial H}{\partial x_2}+A\left(\frac{\partial^2 hu_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 hu_2}{\partial x_2^2}\right)+\tau_2^0+\tau_2.$$

Здесь t – время, x_1 и x_2 – декартовы координаты точки $\mathbf{x}$, измеряемые в восточном и северном направлениях; u_1 и u_2 – соответствующие компоненты скорости течения $\mathbf{u}$; $f=2\Omega\sin\varphi$ – параметр Кориолиса (Ω – угловая скорость вращения Земли, φ – широта места); H и η – глубина акватории и возмущение уровня свободной поверхности; g – ускорение свободного падения; A – эффективный коэффициент горизонтального турбулентного обмена импульсом; τ_1^0 и τ_2^0 – ветровые напряжения на свободной поверхности, τ_1 и τ_2 – напряжения трения на дне акватории, для задания которых обычно используется закон квадратичного трения: $\tau_i=-\alpha|\mathbf{u}|u_i,\ i=1,2$ (α – коэффициент трения).

В качестве причины, вызывающей движения воды, могут выступать условия на открытых границах, где при проведении расчётов должны использоваться данные о течениях и уровне моря, в том числе ряды наблюдений. Ещё одной вынуждающей силой, особенно важной для расчёта течений во внутренних морях, в которых приливные явления невелики, могут быть ветровые напряжения:

$$\tau_1^0=\left|\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{0}}\right|\cos\theta,\quad \tau_2^0=\left|\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{0}}\right|\sin\theta,\quad \left|\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{0}}\right|=\left(\rho_a/\rho_w\right)C_dV_{10}^2, \qquad (4.2.1)$$

где ρ_a и ρ_w – плотность воздуха и воды, соответственно, V_{10} – скорость ветра на уровне 10 м над свободной поверхностью, θ – угол между осью x_1 системы координат и направлением ветра, а коэффициент трения C_d согласно одной из моделей ветровых напряжений на поверхности воды может быть определён следующим образом [51]:

$$C_d = \begin{cases} 1.1 \cdot 10^{-3}, & V_{10} \le 6 \text{ м/с}, \\ (0.72 + 0.063 \cdot V_{10}) \cdot 10^{-3}, & V_{10} > 6 \text{ м/с}. \end{cases}$$

При расчёте поля течений применялась сетка, полностью охватывающая Азовское море с Керченским проливом и имеющая открытую границу в Чёрном море (площадь ячейки сетки 600×600 м^2, размер области 393×227 ячеек). Для вычисления ветровых напряжений (4.2.1) использовался соответствующий летнему периоду 2005 г ряд скоростей ветра из архива реанализа NCEP/NCAR [52] за 2005 год, имеющий пространственное разрешение 2.5 градуса[14)].

[14)] http://www.esrl.noaa.gov/psd/data/gridded/data.ncep.reanalysis.html.

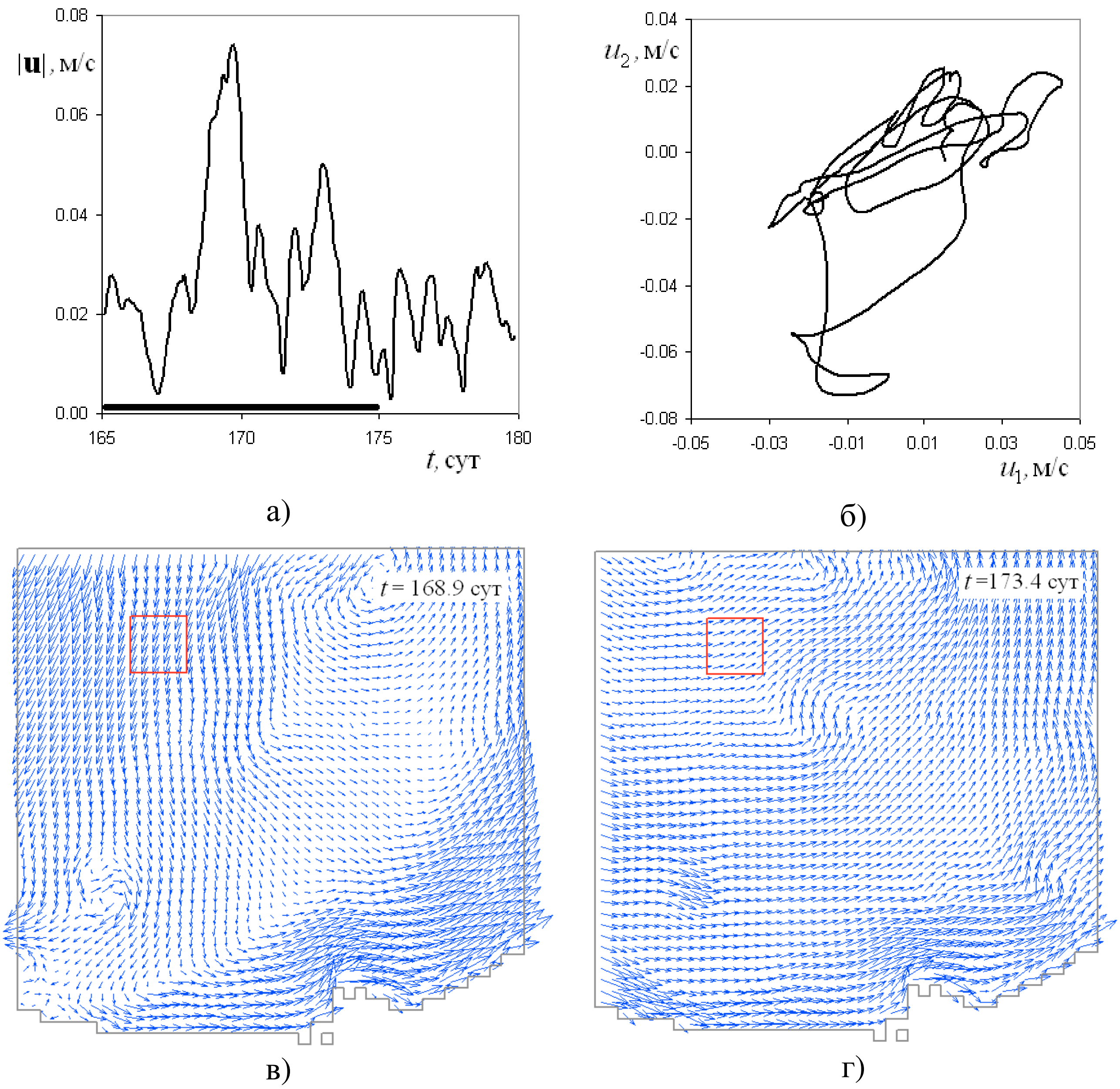


Рис. 4.2.1. Иллюстрации к расчётам поля скорости течения.
Время отсчитывается от начала года. Жирная черта отмечает интервал времени, в течение которого осуществлялся дампинг

Результаты расчётов[15)] иллюстрирует Рис. 4.2.1. На Рис. 4.2.1а приведены расчётные значения модуля скорости течения в центре площадки дампинга (интервал времени, в течение которого проводится вывоз грунта, показан жирной линией). На Рис. 4.2.1б для той же точки представлен годограф скорости течения. На Рис. 4.2.1в и Рис. 4.2.1г для двух моментов времени приведены мгновенные векторные поля скорости. Данные расчёты использовались при моделировании переноса ВзВ. При этом для получения значений скорости течения в произвольной точке акватории и в произвольный момент времени применялись билинейная аппроксимация по пространству и линейная аппроксимация по времени.

В связи с отсутствием данных о структуре горизонтальной турбулентности, характерной для рассматриваемого региона, в расчётах, результаты которых приводятся далее, использовалась «стандартная эмпирическая модель», согласно которой горизонтальная турбулентная дисперсия ВзВ в облаке, порождаемом в момент времени t_0 мгновенным точечным источником примеси, изменяется по закону $\sigma^2(t) = A_3\,(t - t_0)^3$, $A_3 = 8\cdot 10^{-9}$ м^2/с^3 (см. п. 3.2) Параметр γ в выражении $K_D = \gamma H|\mathbf{u}|$ для коэффициента продольной дисперсии (см. п. 3.3) в расчётах принимал значения от 1 до 10 (согласно [5] для Северного моря $\gamma = 0.45$).

Характерная скорость вертикальной турбулентной диффузии принималась равной $k_* = 2.5\cdot 10^{-3}$ м/с (средний по глубине коэффициент вертикального турбулентного обмена $\overline{K}_z = 7.5\cdot 10^{-3}$ м^2/с). Рассматривались два случая:

1) дно в окрестности площадки дампинга полностью адсорбирует ВзВ,

2) на дне отсутствуют диффузионный поток взвеси.

Первый случай может реализоваться, если дно в рассматриваемом регионе покрыто достаточно густой растительностью. Второй случай является моделью ситуации, при которой на чистом дне уже присутствует слой рыхлых мелкодисперсных отложений.

15) Расчёты выполнены В.В. Солбаковым

4.3. Результаты расчётов

В практических расчётах необходимое количество дискретных облаков может оказаться очень большим (10^5 и более). Поэтому для минимизации вычислительных затрат крайне важно определить критерий, при выполнении которого данное облако может быть удалено из списка обрабатываемых облаков. В настоящей работе облако считается полностью рассеявшимся, если в момент времени t_n для средней концентрации $\overline{C}$ взвеси в облаке выполняется условие

$$\overline{C}(t_n) = \frac{m(t_n)}{\sigma_C^2(t_n)\ H(\mathbf{x}_0(t_n))} < \frac{C_{\min}}{N_p}, \tag{4.3.1}$$

где N_p – количество облаков, генерируемых одновременно, а константа $C_{\min}$ должна быть подобрана таким образом, чтобы обеспечить удовлетворительную точность результатов расчётов, в том числе и в областях, где концентрации ВзВ малы и составляют величины порядка 1 мг/л. Априори ясно, что $C_{\min} \le 0.1$ мг/л.

Приведём вначале результаты методических расчётов, направленных на выявление допустимых шагов по времени Δt и константы $C_{\min}$ в (4.3.1). При проведении этих расчётов в окрестности площадки дампинга было выбрано несколько контрольных створов, в которых анализировалась динамика изменения расчётных концентраций ВзВ и её зависимость от величины указанных параметров. Пример такой зависимости в контрольном створе, расположенном на расстоянии 500 м от южной границы площадки дампинга (см. Рис. 4.1.1), показан на Рис. 4.3.1 в линейном и логарифмическом масштабе по оси ординат. В данном случае расчёты проводились с параметрами $\alpha = 1$, $N_p = 1$ (метод дискретных облаков) при $C_{\min} = 10^{-2}$ мг/л, $\Delta t = 3.6$ с (кривая 1), $C_{\min} = 10^{-3}$ мг/л, $\Delta t = 3.6$ с (кривая 2) и $C_{\min} = 10^{-2}$ мг/л, $\Delta t = 36$ с (кривая 3). Вывод, который можно сделать на основе анализа этих методических расчётов состоит в том, что для обеспечения приемлемой точности результата расчётов концентрации ВзВ со значениями вплоть до 0.1 мг/л достаточно ограничиться значениями $C_{\min} = 10^{-2}$ мг/л, $\Delta t = 36$ с.

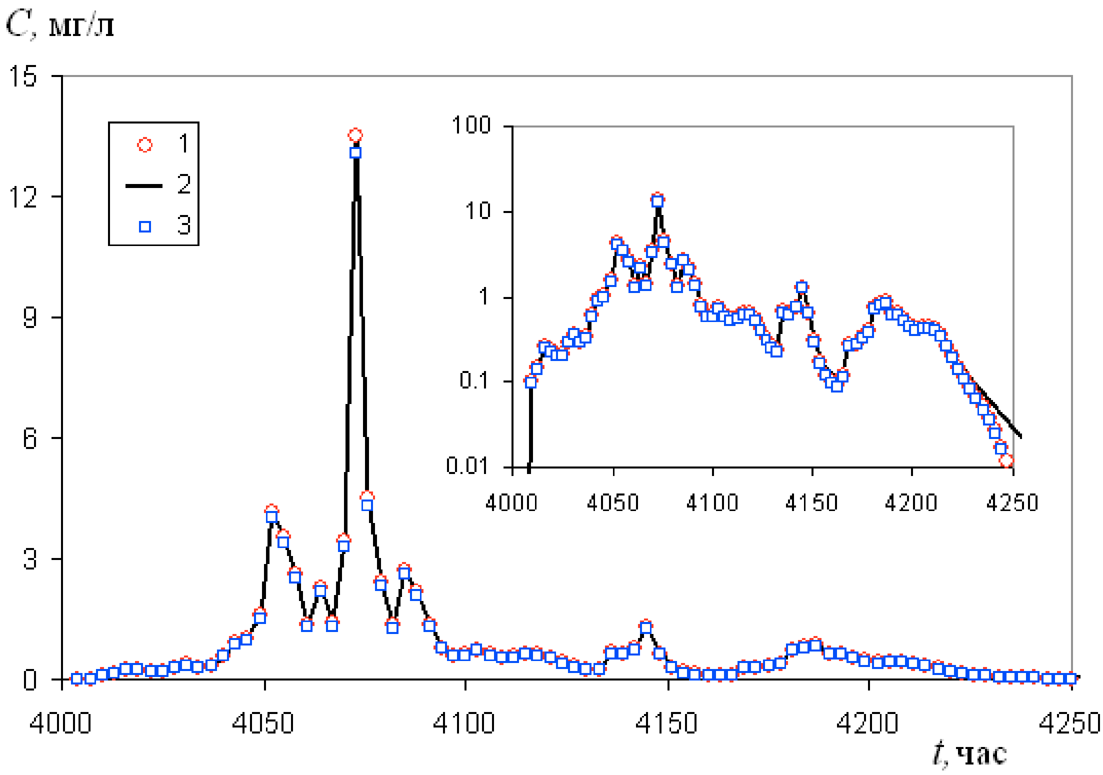


Рис. 4.3.1. Расчётная динамика изменения концентрации ВзВ в контрольном створе в зависимости от величин параметров $C_{\min}$ и Δt

Вторая серия расчётов была направлена на выявление влияния на результат величины пространственной неоднородности поля скорости течения воды. На Рис. 4.3.2 для значений $C_{\min} = 10^{-2}$ мг/л, $\Delta t = 36$ с приведено сравнение результатов расчётов методом дискретных облаков (кривая 1) и стохастическим методом при $\alpha = 0.3$ и $N_p = 1000$ (кривая 2). Практически полное совпадение результатов означает, что в рассматриваемых условиях пространственная однородность поля скорости оказывается достаточно высокой, так что без большой погрешности можно использовать экономичный метод дискретных облаков.

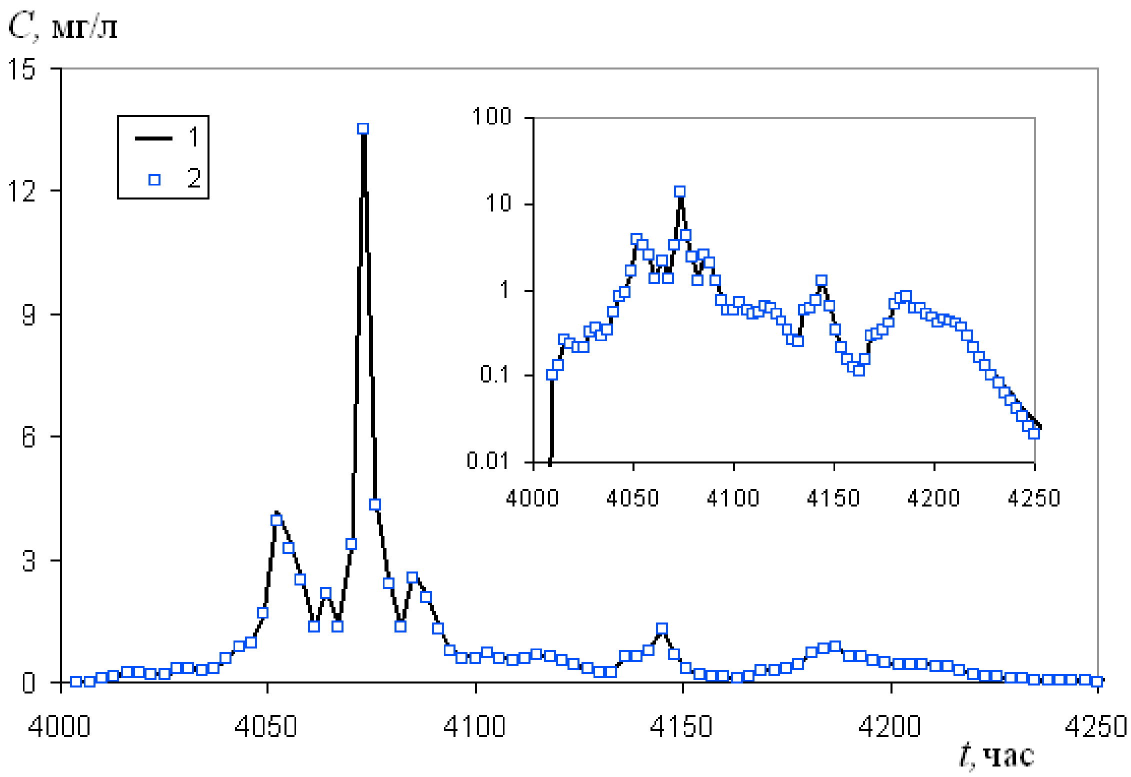


Рис. 4.3.2. Расчётная динамика изменения концентрации ВзВ в контрольном створе в зависимости от величины параметра α

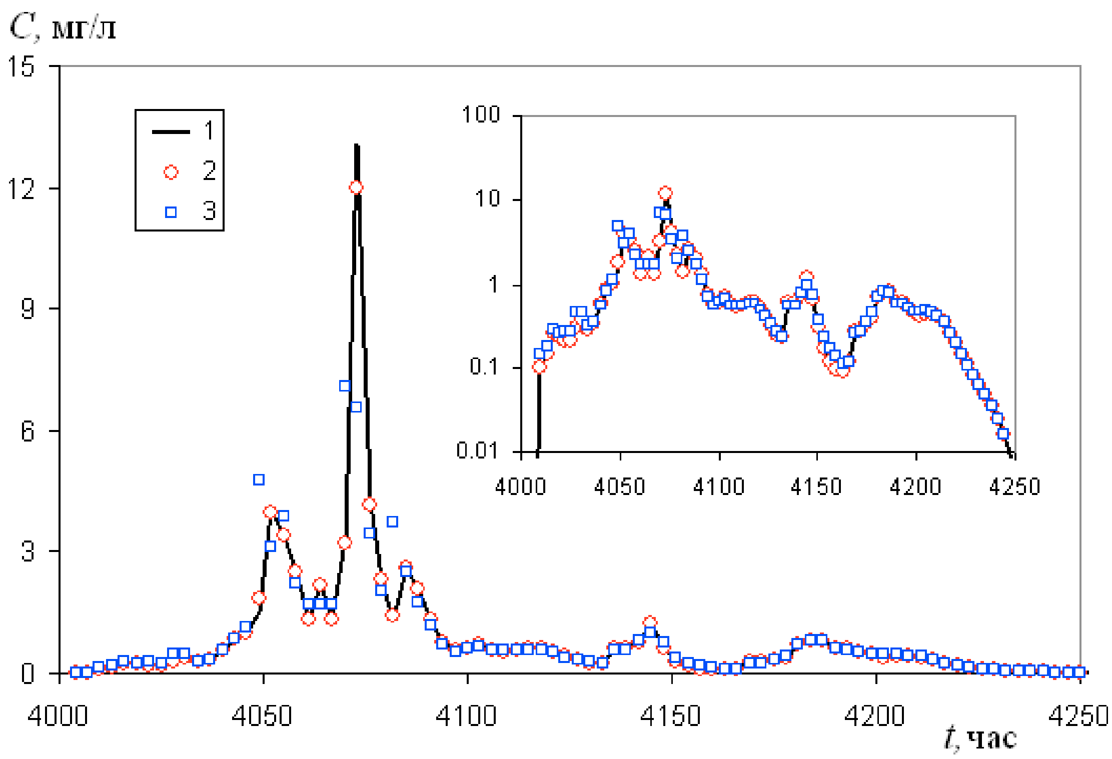


Рис. 4.3.3. Расчётная динамика изменения концентрации ВзВ в контрольном створе в зависимости от величины параметра продольной дисперсии γ

На Рис. 4.3.3 приведены результаты расчётов, выполненные для различных значений параметра продольной дисперсии $\gamma = 0$ (кривая 1), 0.45 (кривая 2) и 10 (кривая 3). Согласно этим расчётам влияние продольной дисперсии ВзВ на результат в рассматриваемом случае становится заметным лишь при нереально больших значениях параметра γ. Отсутствие влияния продольной дисперсии в данном случае обусловлено небольшими скоростями течений и малой глубиной акватории в районе дампинга.

Наконец, на Рис. 4.3.4, 4.3.5 представлены расчётные поля максимально достигнутых концентраций (то есть концентраций, хотя бы однократно достигнутых в данной точке акватории в течение всего времени проведения работ), а на Рис. 4.3.6, 4.3.7 – поля увеличения толщины донных отложений. Вычисления проведены для случая полностью адсорбирующего дна (Рис. 4.3.4, 4.3.6) и при нулевых диффузионных потоках у дна (Рис. 4.3.5, 4.3.7). Видно, что в рассмотренном случае адсорбционные свойства дна существенно влияют на размеры ареала распространения мелкодисперсных ВзВ. В то же время, толщина донных отложений вплоть до значений 1 мм практически не зависит от этих свойств.

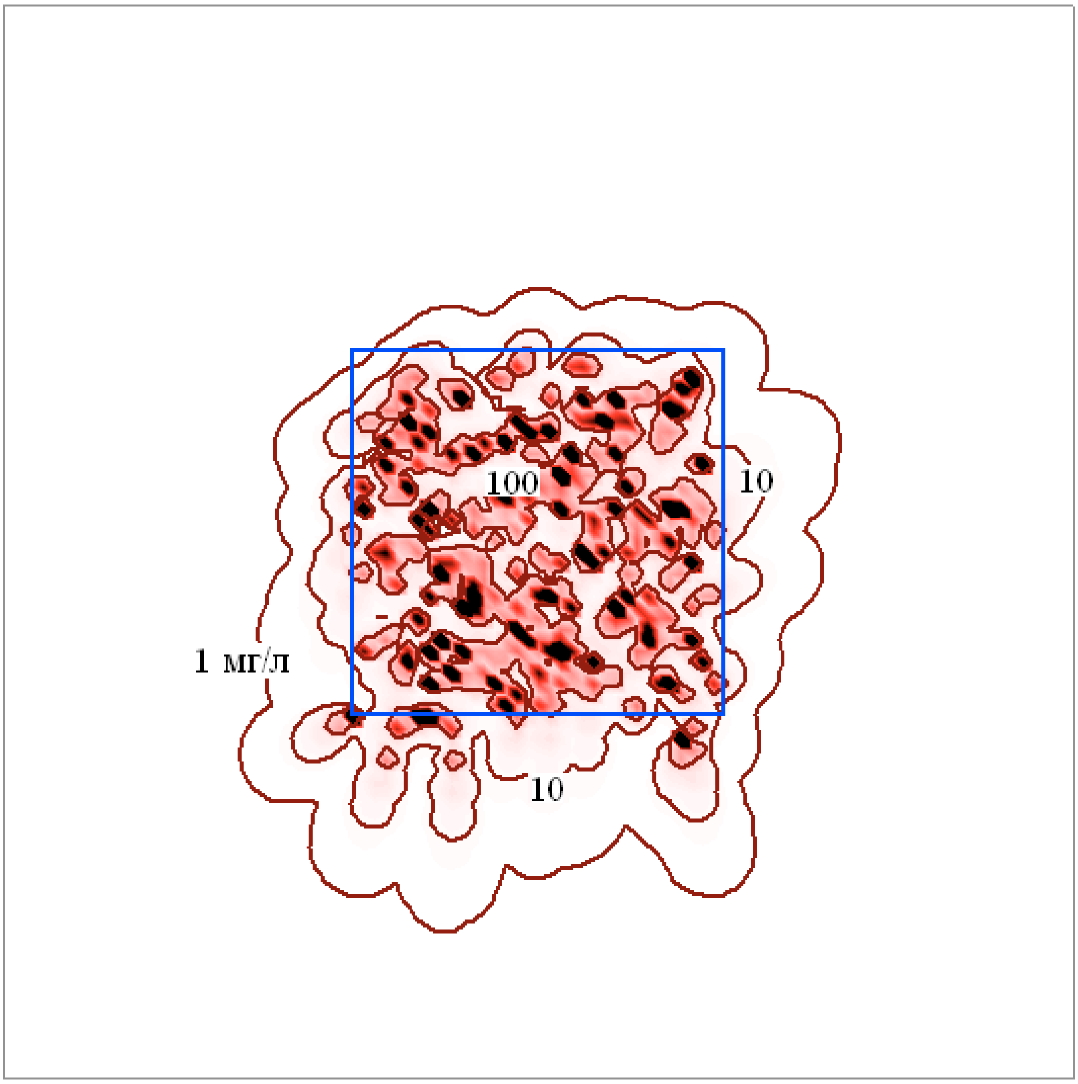


Рис. 4.3.4. Поле максимально достигнутых концентраций при полностью адсорбирующем дне

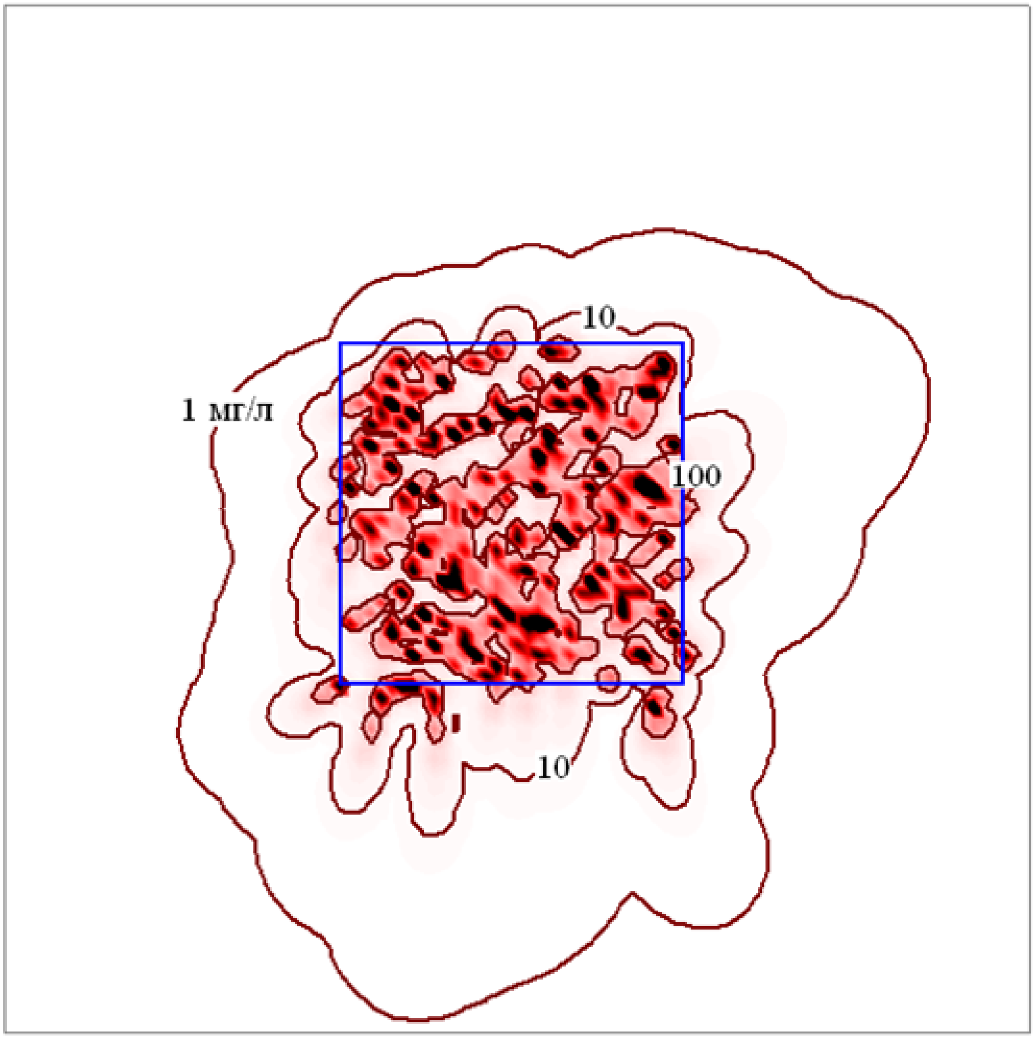


Рис. 4.3.5. Поле максимально достигнутых концентраций при частично адсорбирующем дне (на дне отсутствуют диффузионные потоки)

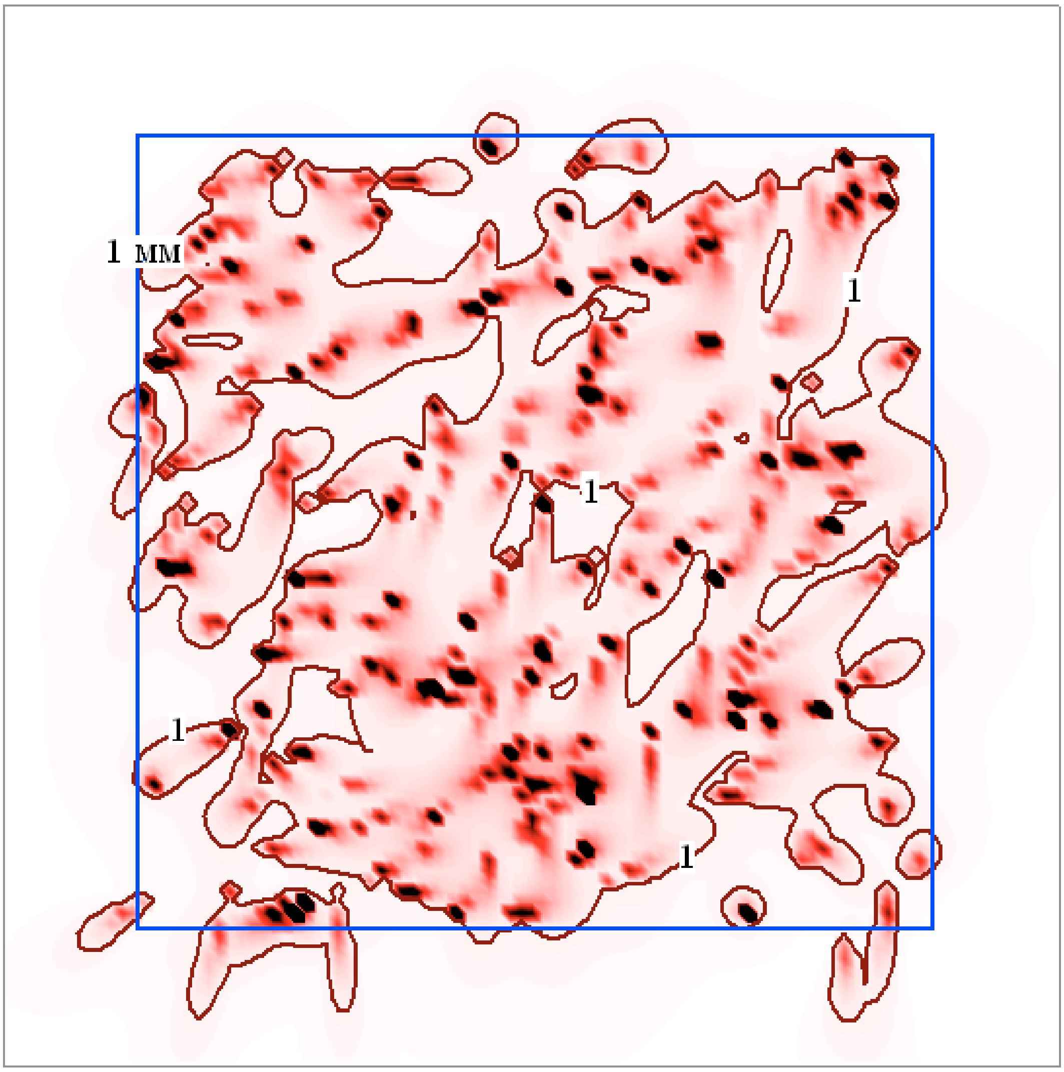


Рис. 4.3.6. Поле увеличения толщины донных отложений при полностью адсорбирующем дне

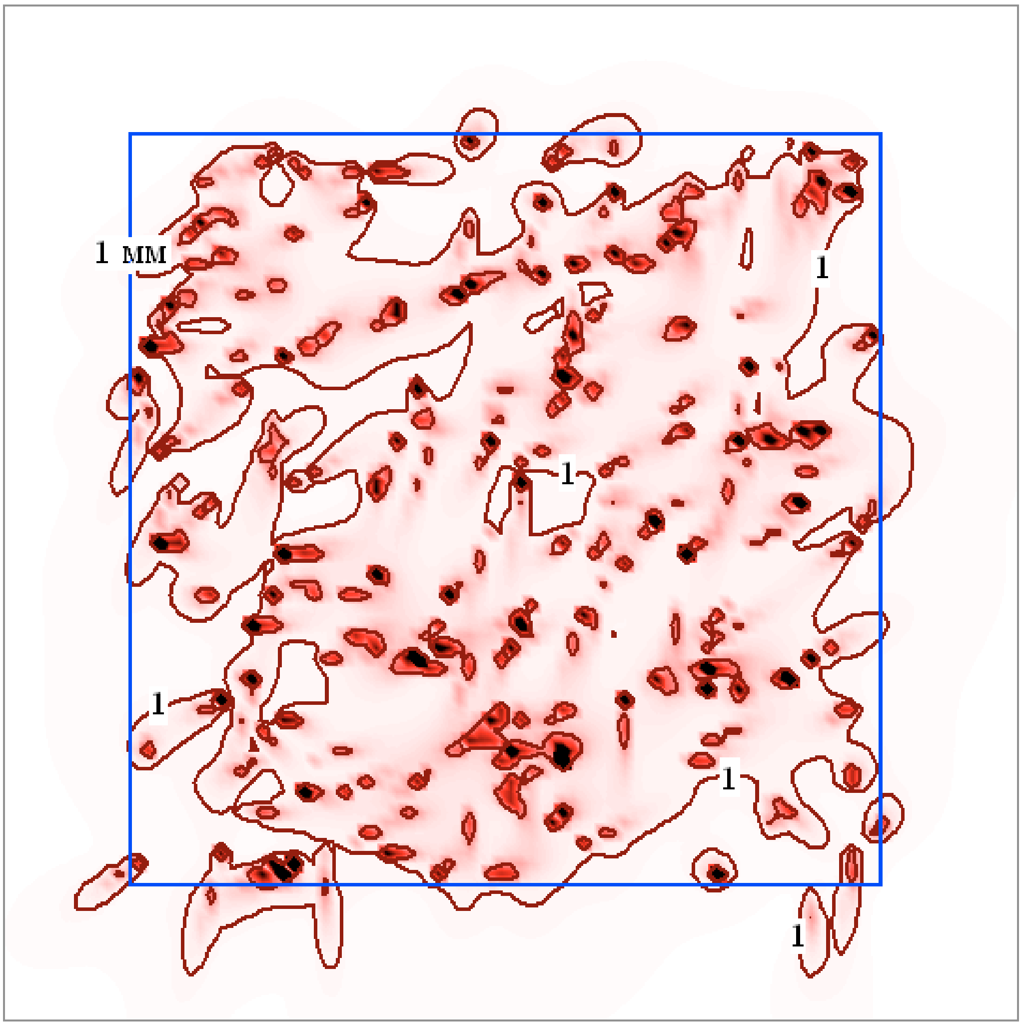


Рис. 4.3.7. Поле увеличения толщины донных отложений при частично адсорбирующем дне (на дне отсутствуют диффузионные потоки)

4.4. Характеристики скорости вычислительного процесса

Представленные в предыдущем разделе расчёты проводились с использованием персонального компьютера с процессором Pentium 4 (тактовая частота 2.4 ГГц). Операционная система Windows XP. Язык программирования Object Pascal, система программирования Delphi 6.

Оказалось, что если необходим расчёт динамики концентраций ВзВ только в нескольких контрольных створах, то вычислительные затраты незначительны. Например, расчёт варианта с параметрами $\alpha = 1$, $C_{\min} = 10^{-2}$ мг/л, $\Delta t = 36$ с, $N_p = 1$, которые, как показывают представленные выше методические расчёты, обеспечивают вполне приемлемую точность, занимал около $t_{\mathrm{CPU}} = 1$ с процессорного времени. При этом максимальное количество облаков, одновременно участвовавших в текущий момент времени в расчётах, составляло всего 18. Однако процессорное время существенно увеличивается, если в процессе расчёта необходимо вычислять поля концентрации ВзВ и донных отложений. Например, при использовании для расчёта этих полей сетки с размерами 100×100 ячеек необходимое процессорное время составило $t_{\mathrm{CPU}} \approx 11$ мин. Естественно, что с повышением степени стохастичности алгоритма (с уменьшением параметра α) необходимое процессорное время также увеличивается. Так для расчёта варианта $\alpha = 0.3$, $C_{\min} = 10^{-2}$ мг/л, $\Delta t = 36$ с, $N_p = 1000$ даже без вычисления полей концентраций и донных отложений потребовалось $t_{\mathrm{CPU}} \approx 54$ мин процессорного времени (максимальное количество облаков, одновременно участвовавших в расчёте, составляло около 71000). Тем не менее, такие величины представляются вполне приемлемыми для практических расчётов.

Таким образом, представленные в настоящей работе результаты вычислительных экспериментов демонстрируют работоспособность и достаточную экономичность разработанной методики моделирования переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Показано, что трёхмерная задача переноса и диффузии полидисперсных взвешенных веществ, порождаемых мгновенным точечным источником на океаническом шельфе, может быть сведена к интегрированию двумерного (осреднённого по глубине) уравнения для монодисперсной взвеси с зависящей от времени скоростью осаждения, которая определяется только фракционным составом исходного вещества, интенсивностью вертикального турбулентного обмена, адсорбционными свойствами дна, а также положением источника взвеси над дном акватории. Эта величина, названная эффективной гидравлической крупностью полидисперсной взвеси, может быть найдена путём интегрирования N одномерных эволюционных задач (N – количество фракций взвеси). Понятие эффективной гидравлической крупности полидисперсной взвеси, которая, в частности, учитывает процесс адсорбции взвешенных веществ дном водоёма, может быть полезным и при моделировании распространения протяжённых загрязнений в руслах рек, часто проводимом с использованием одномерных моделей.

2. Проанализированы особенности горизонтального турбулентного рассеяния протяжённых шлейфов взвешенных веществ, порождаемых действием непрерывных источников. Разработанный в диссертационной работе вычислительный подход позволяет при моделировании учитывать связанные со структурой горизонтальной океанической турбулентности специфические особенности переноса и рассеяния взвеси на шельфе окраинных и внутренних морей.

3. Предложен и опробован экономичный бессеточный стохастический метод дискретных облаков, сочетающий достоинства метода дискретных облаков и стохастического метода дискретных частиц. Разработанный метод, с

одной стороны, обеспечивает надёжный расчёт концентрации взвеси на больших расстояниях от источника, где эти концентрации малы, а с другой – позволяет проводить расчёты распространения загрязнений и в случае сильно неоднородных полей скорости потока, содержащих, например, области возвратного течения и/или циркуляционные зоны.

4. С помощью разработанных подходов решена конкретная задача ОВОС: оценён размер ареала распространения загрязняющей взвеси при дампинге грунта в Азовском море.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Краткое описание программного комплекса

Описанные в работе алгоритмы реализованы в виде комплекса из двух программных единиц, имеющих максимально простой, но достаточно удобный оконный пользовательский интерфейс:

- из программы Weff для расчёта эффективной гидравлической крупности полидисперсной взвеси,
- из программы Damping, реализующей алгоритм стохастического метода дискретных облаков.

Язык программирования Object Pascal, система программирования Delphi 6.

При расчёте эффективной гидравлической крупности (программа Weff) совокупность одномерных эволюционных задач (2.5.4) численно интегрируется с использованием неявной консервативной разностной схемы, разрешаемой методом прогонки. Данный быстрый алгоритм позволял использовать очень подробные разностные сетки (10000 ячеек и более).

Ниже на Рис. П. 1 показано главное окно программы Weff.

Пункт меню «Настройки» обеспечивает доступ к настроечному текстовому файлу Weff.set, в котором хранятся параметры для проведения расчёта. При обращении к этому пункту автоматически вызывается стандартный текстовый редактор Notepad ОС Windows, что позволяет легко редактировать настроечный файл (Рис. П. 2).

При обращении к пункту меню «Выполнить» запускается программа расчёта. Результат отображается в графическом окне и текстовой области. После окончания расчёта зависимость $W(\ln\tau)$ записывается в файл, имя которого указано в последней строке настроечного файла Weff.set (см. Рис. П. 2). Этот файл затем используется программой Damping

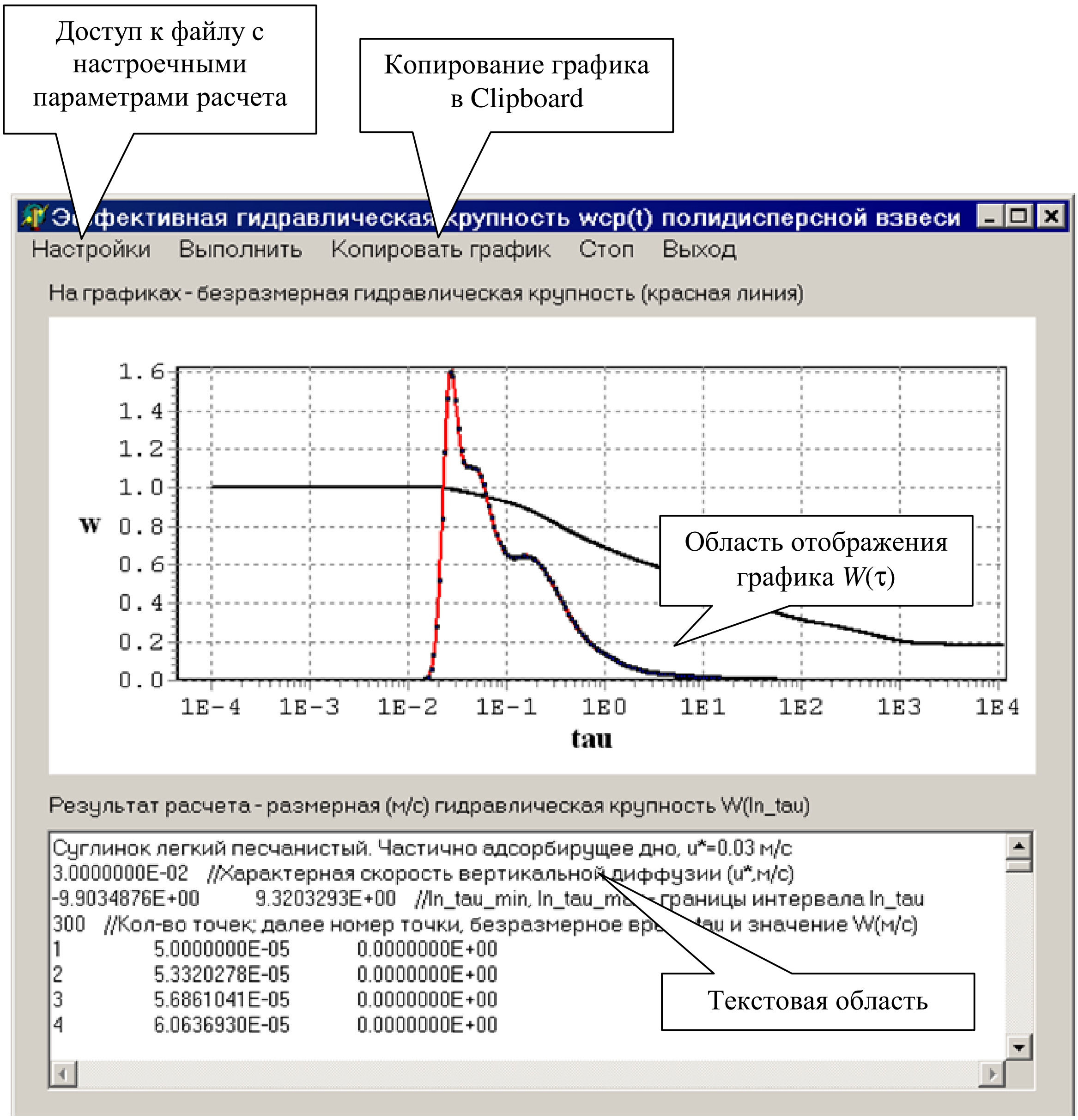
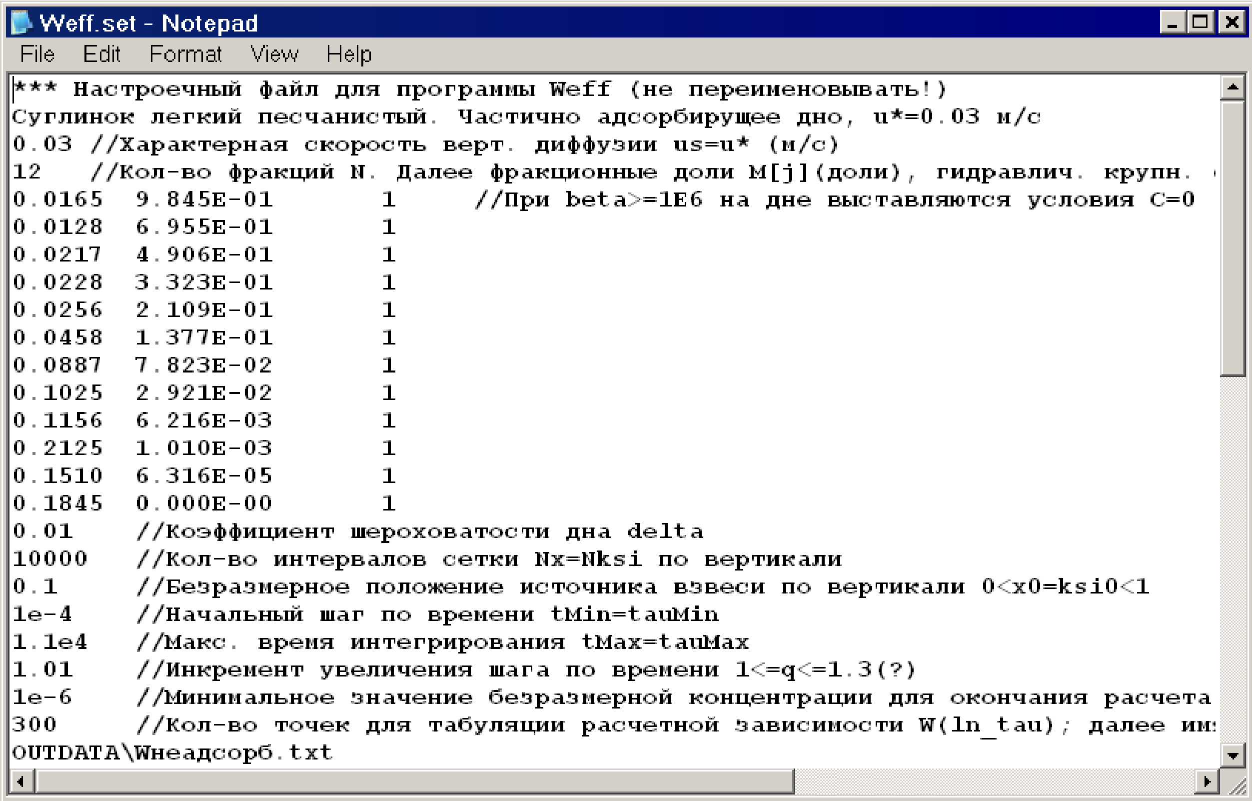


Рис. П. 1. Главное окно программы Weff



```
Weff.set - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
*** Настроечный файл для программы Weff (не переименовывать!)
Суглинок легкий песчанистый. Частично адсорбирущее дно, u*=0.03 м/с
0.03 //Характерная скорость верт. диффузии us=u* (м/с)
12   //Кол-во фракций N. Далее фракционные доли M[j](доли), гидравлич. крупн.
0.0165  9.845E-01       1      //При beta>=1E6 на дне выставляются условия C=0
0.0128  6.955E-01       1
0.0217  4.906E-01       1
0.0228  3.323E-01       1
0.0256  2.109E-01       1
0.0458  1.377E-01       1
0.0887  7.823E-02       1
0.1025  2.921E-02       1
0.1156  6.216E-03       1
0.2125  1.010E-03       1
0.1510  6.316E-05       1
0.1845  0.000E-00       1
0.01    //Коэффициент шероховатости дна delta
10000   //Кол-во интервалов сетки Nx=Nksi по вертикали
0.1     //Безразмерное положение источника взвеси по вертикали 0<x0=ksi0<1
1e-4    //Начальный шаг по времени tMin=tauMin
1.1e4   //Макс. время интегрирования tMax=tauMax
1.01    //Инкремент увеличения шага по времени 1<=q<=1.3(?)
1e-6    //Минимальное значение безразмерной концентрации для окончания расчета
300     //Кол-во точек для табуляции расчетной зависимости W(ln_tau); далее им:
OUTDATA\Wнеадсорб.txt
```

Рис. П. 2. Настроечный файл Weff.set программы Weff

Главное окно программы Damping показано на Рис. П. 4

Пункт меню «Настройки» позволяет с помощью редактора Notepad изменять содержимое текстового настроечного файла Damping.set (Рис. П. 4).

При обращении к пункту меню «Загрузить» происходит загрузка в программу информации об орографии дна, полях скорости течения, эффективной гидравлической крупности ВзВ и о сценарии дампинга (положение точек дампинга, моменты времени осуществления дампинга и т.д.). Загрузка осуществляется из файлов, имена которых указываются в настроечном файле Damping.set (Рис. П. 4). После окончания загрузки контрольная информация (в данном случае динамика изменения модуля скорости в центре площадки дампинга) отображается в графической области 1.

После выполнения загрузки исходной информации становится доступным пункт меню «Начать расчёт», запускающий процесс моделирования распространения ВзВ в результате дампинга. Текущее положение дискретных облаков и их размер (σ_C) могут интерактивно отображаться в графической области 2 (Рис. П. 4). Таймер показывает время ЦП, прошедшее с момента начала расчёта. Динамика изменения концентрации ВзВ записывается в текстовую область МЕМО. Эта информация также может быть сохранена в текстовом файле (пункт меню «Сохранить МЕМО»), имя которого указано в настроечном файле Dumping.set.

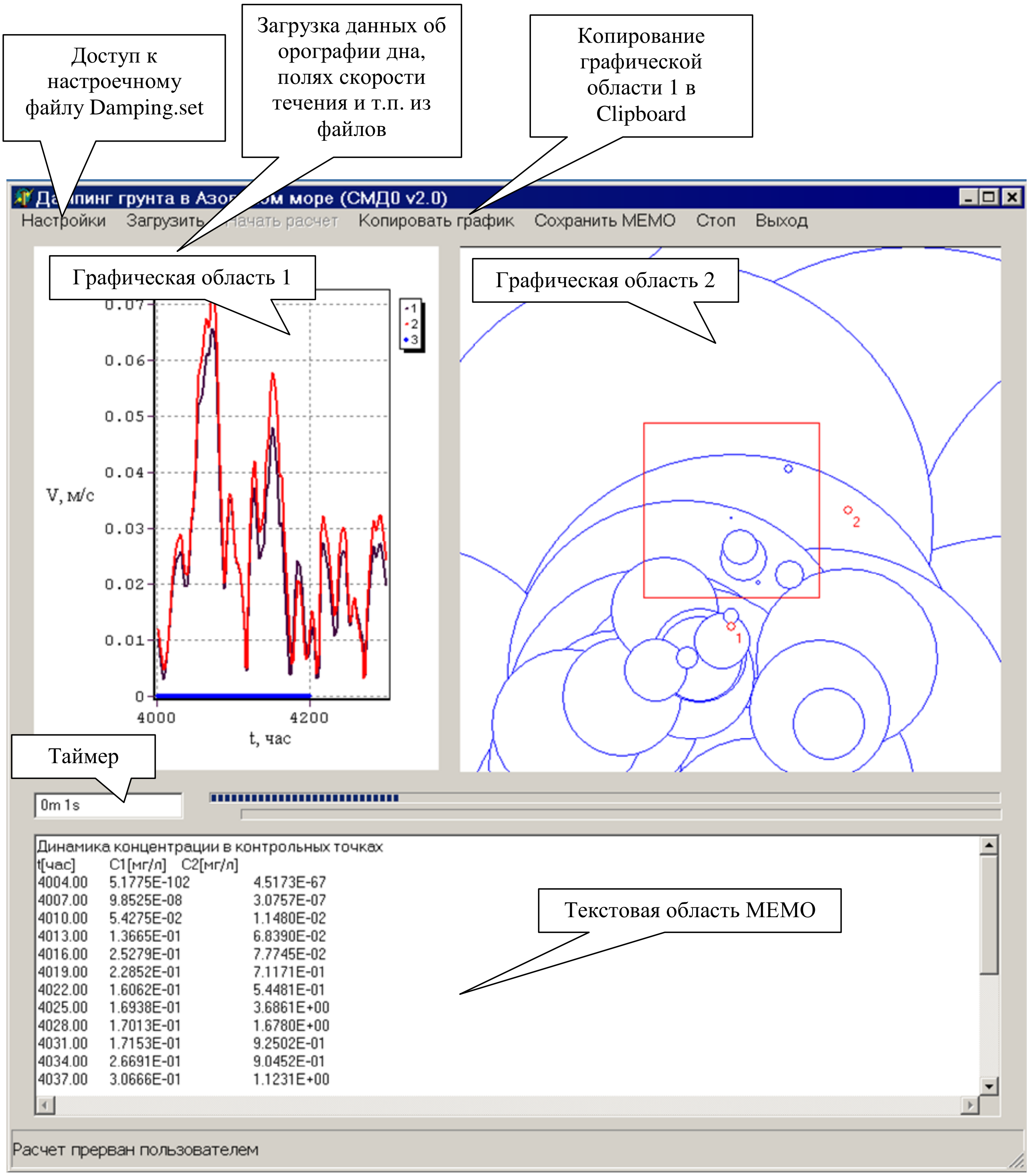


Рис. П 3. Главное окно программы Damping

```
Damping.set - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
*** Настроечный файл для программы Damping (не переименовывать!).
*** Строки *** - комментарии (не удалять!). Структуру записей не менять!
Дампинг в Азовском море
3       8e-9                 //n, An[м2/с3] - параметры горизонтальной турбулентно
0                            //gamma -параметр продольной дисперсии
6       265000               //s0[м], mt[кг] - размер источника и масса грунта в о
0.8                          //ksi - параметр стохастичности (0<ksi<=1 ; ksi=1 - м
1e-5                         //Cmin[мг/л] - параметр, определяющий минимальную сре
0.5     2650                 //epsS, roS[кг/м3] - пористость и минеральная плотнос
1       301         101      //NP, NN, NM.   NP*NN*NM<=1e7 (?!)
*** Далее имена файлов
*** WFile(гидр.крупность)
INDATA\W10надс.txt
*** HFile(глубины)
INDATA\H_45x45.oro
*** VFile(скорости)
INDATA\V_45x45.txt
SFile(сценарий)
INDATA\S_201.txt
*** MemoFile(для записи из MEMO)
OUTDATA\memo.txt
*** Res2DFile(для записи расчетных полей)
OUTDATA\Fields_надс_03.3d
*** Далее служебные и управляющие параметры
7500  19900       //x1[м], y1[м] - контрольная точка N1 (центр области дампинга
9500  21900       //x2[м], y2[м] - контрольная точка N2 (центр расчетной област
100   100         //NFx,NFy - кол-во узлов сетки для расчетных полей
3000              //DF[м] - величина расширения области расчетных полей по срав
3                 //TMEMO - интервал времени между записями в MEMO (в единицах
1     1     0     //sw1,sw2,sw3 - оключить расчет поля концентраций(1), донных
```

Рис. П. 4. Настроечный файл Damping.set программы Damping

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климонтович Ю.Л.* Нелинейное броуновское движение // Успехи физических наук. 1994. Т.164. №8. С. 811-844.
2. *Lebedev V.V., Turitsyn K.S.* Passive scalar evolution in peripheral regions // Phys. Rev. 2004. №69. P.036301.1-036301.11.
3. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
4. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965; Ч. 2. М.: Наука, 1967.
5. *Ниуль Ж.* Модели дисперсии пассивных субстанций. В кн. Моделирование морских систем. Пер. с англ. под ред. Айзатуллина Т. А. и др. Л.: Гидрометеоиздат, 1978.
6. *Richardson L.F.* Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbor graph // Proc. Roy. Soc. 1926. Ser. A. V. 110. N. 756. P. 709-720.
7. *Окубо А., Озмидов Р.В.* Эмпирическая зависимость коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии в океане от масштаба явления // Физика атмосферы и океана. 1970. Т. 6. №5. С. 534-536.
8. *Озмидов Р.В.* Диффузия примесей в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1986.
9. *Luyten P.J., Deleersnijder E., Ozer J., Ruddick K.G.* Presentation of a family of turbulence closure models for stratified shallow water flows and preliminary applications to the Rhine outflow region // Continental Shelf Research. 1996. V.16. N.1. P.101-130.
10. *Wolanski E., Asaeda T., Tanaka A., Deleersnijder E.* Three-dimensional island wakes in the field, laboratory experiments and numerical models // Continental Shelf Research. 1996. V. 16. N.11. P. 1437-1452.
11. *Blaise S., Deleersnijder E., White L., Remacle J-F.* Influence of the turbulence closure scheme on the finite-element simulation of the upwelling in the wake of shallow-water island // Continental Shelf Research. 2007. V. 27. P. 2329-2345.

12. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф.* Методы математического моделирования окружающей среды. М.: Наука, 2000.
13. *Winterwerp J.C.* A simple model for turbulence induced flocculation of cohesive sediment // J. of Hydraulic Research. 1997. V.36.N.3. P.309-326.
14. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987.
15. *Bao-Shi-Shiau, Jia-Jung-Juang.* Numerical Study on the Far Field Diffusion of Ocean Dumping for Liquid Wast // Proceedings of the Eighth (1998) International Offshore and Polar Engineering Conference. Canada. May 24-29. 1998.
16. *Архипов Б.В., Котеров В.Н., Солбаков В.В., Шапочкин Д.А., Юрезанская Ю.С.* О численном моделировании распространения загрязняющих веществ и нефтяных разливов стохастическим методом дискретных частиц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. №2. С. 288-301.
17. *Arkhipov B., Koterov V., Solbakov V., Shapochkin D., Yurezanskaya Y.* Numerical Modeling of Pollutant Dispersion and Oil Spreading by the Stochastic Discrete Particles Method // Studies in Applied Mathematics. 2008. V. 120. N.1. P. 87-104.
18. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
19. *Архипов Б.В., Котеров В.Н., Солбаков В.В., Шапочкин Д.А.* Моделирование турбулентного рассеивания загрязняющих веществ в морской среде // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ РАН, 2005.
20. *Okubo A.* Horizontal diffusion from an instantaneous point source due to oceanic turbulence // Chesapeake Bay Institute Techn. Rep. N. 32. The Johns Hopkins University, 1962.
21. *Okubo A.* A new set of oceanic diffusion diagrams // Chesapeake Bay Institute Techn. Rep. N. 38. The Johns Hopkins University, 1968.
22. *Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океаническая турбулентность. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

23. *Озмидов Р.В.* О некоторых особенностях энергетического спектра океанической турбулентности // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161. №4. С.828-831.
24. *Озмидов Р.В.* О зависимости коэффициента горизонтального турбулентного обмена в океане от масштаба явления // Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4. №11. С. 1224-1225.
25. *Foxworthy J. F., Tibby R. B., Barsom G. M.* Dispersion of a surface waste field in the sea // Water Pollut. Control Fed. 1966. V. 38. P. 1170-1193.
26. *Murthy C. R.* Horizontal diffusion characteristics in Lake Ontario // Phys. Oceanogr. 1976. V. 6. P. 76-84.
27. *Новиков Е.А.* О турбулентной диффузии в потоке с поперечным градиентом скорости // Прикладная математика и механика. 1958. Т. 12. Вып. 3. С. 412-414.
28. *Nihoul J. C. J.* Shear effect diffusion in shallow open seas // Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. 1972. 41e année. No 9-10. P. 521-526.
29. *Архипов Б.В., Котеров В.Н., Кочерова А.С., Солбаков В.В., Хубларян Г.М.* Расчёт распространения взвешенных веществ в прибрежной области моря // Водные ресурсы. 2004. Т. 31. №1. С. 1-8.
30. *Кочергин В.П. , Боровиков А.Г.* Трёхмерная численная модель распространения примеси в прибрежной зоне глубокого водоёма // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т.16. №7. С.729-737.
31. *Зайцев О.В., Зайцева Т.В.* Моделирование переноса примеси в прибрежной зоне методом Монте-Карло // Тр. ДВНИИ. 1984. Вып. 131. С.50-61.
32. *Коротенко К.А., Лелявин С.Н.* Расчёт переноса примеси в море методом блуждающих частиц // Океанология. 1990. Т.30. Вып. 5. С.930-936.
33. *Кочергин И.Е., Севастьянов А.В., Фёдоров Э.В.* Численное моделирование динамики распространения взвешенных веществ в открытом океане // Тр. ДВНИГМИ. 1992. Вып. 137. С.215-218.

34. *Дмитриев Н.В., Двуреченская Е.А.* Численный анализ переноса примеси для верхних турбулентных слоёв морей и океанов // Метеорология и гидрология.1994. №12. С.53-62.
35. *Пухтяр Л.Д., Осипов Ю.С.* Турбулентные характеристики прибрежной зоны моря // Труды ГОИН. 1981. Вып. 158. С.35.
36. *Богдановский А.А., Кочергин И.Е.* Параметризация характеристик перемешивания для типичных условий северо-восточного шельфа Сахалина // В сб. Гидрометеорологические процессы на шельфе: оценка воздействия на морскую среду. – Владивосток: Дальнаука, 1998 (Труды ДВНИГМИ. 1998).
37. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1971.
38. *Durbin P.A.* A stochastic model of two-particle dispersion and concentration fluctuations in homogeneous turbulence // J. Fluid Mech. 1980. V. 100. P. 279–302.
39. *Kaplan H., Dinar N.* A three dimensional stochastic model for concentration fluctuation statistics in isotropic homogeneous turbulence // J. Comput. Phys. 1987. V. 79. P. 317-335.
40. *Thomson D.J.* A stochastic model for the motion of particle pairs in isotropic high-Reynolds-number turbulencez, and its application to the problem of concentration variance // J. Fluid Mech. 1990. V. 210. P. 113-153.
41. *Borgas M.S., Sawford B.L.* A family of stochastic models for two-particle dispersion in isotropic homogeneous stationary turbulence // J. Fluid Mech. 1994. V. 279. P.69–99.
42. *Kurbanmuradov O.A., Orslag S.A., Sabelfeld K.K., Yeung P.K.* Analysis of relative dispersion of two particles by Lagrangian stochastic models and DNS methods // Monte Carlo Methods Appl. 2001. V.7. N.3–4. P. 245–264.
43. *De Baas A.F.* Some properties of the Langevin Model for dispersion. PhD Dissertation, Delft University of Echnology. 1988.

44. *Zouari N., Babiano A.* Derivation of the relative dispersion law in the inverse energy cascade of two – dimensional turbulence // Physica D. 1994. V.76. P. 318-328.
45. *Elliott F.W., Majda A.J.* Pair dispersion over an inertial range spanning many decades // Physics of Fluids. 1996. V. 8. N.4. P.1052-1060.
46. *Elliott F.W., Horntrop D.J., Majda A.J.* Monte Carlo methods for turbulent tracers with long range and fractal random velocity fields. // 1997. Chaos. V.7. N.1. P.39-48.
47. *Sokolov I.M, Blumen A., Klafter J.* Drude approach to anomalous diffusion: Application to Richardson dispersion in turbulent flows // Europhysics Letters. 1999. V. 47. N.2. P.152-157.
48. *Sabelfeld K.K., Kurbanmuradov P.O.* O Two-particle stochastic Eulerian-Lagrangian models of turbulent dispersion // Mathematics and Computers in Simulation. 1998. V. 47. N.2-5. P. 429-440.
49. *Коротенко К.А.* Моделирование турбулентного переноса вещества в приповерхностном слое океана. // Океанология. 1992. Т.32 №.1 С.13-21.
50. Справочник по специальным функциям. Под ред. *М. Абрамовица* и И. *Стиган*. Пер. с англ. под ред. *В.А. Диткина* и *Л.Н. Кармазинной*. М.: Наука, 1979.
51. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т.2. М.: Мир, 1986.
52. *Kalnay E., Kanamitsu M., Kistler R. et al.* The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // Bull. Amer. Meteor. Soc. 1996. V. 77. № 3. P. 437-470.