

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ НА ОКЕАНИЧЕСКОМ ШЕЛЬФЕ

Владимир Николаевич КОТЕРОВ. Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. Вед. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук. E-mail: koterov@ccas.ru

Vladimir Nikolaevich KOTEROV. Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, leading researcher, PhD in math and physics. E-mail: koterov@ccas.ru

Юлия Сергеевна ЮРЕЗАНСКАЯ. Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН. Науч. сотр. E-mail: july@ccas.ru

Yulia Sergeevna YUREZANSKAYA. Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, researcher. E-mail: july@ccas.ru

Рассматривается задача моделирования переноса полидисперсных взвешенных веществ на океаническом шельфе в тех случаях, когда размер ареала их распространения значительно превышает глубину акватории. Разработана экономичная двумерная методика расчета, учитывающая особенности взаимодействия взвеси с дном, ее фракционный состав и вертикальное положение источника взвеси. Предложен воспроизводящий «закон 4/3» Ричардсона стохастический метод дискретных облаков, сочетающий достоинства стохастического метода дискретных частиц и метода дискретных облаков. Метод тестирован путем сравнения результатов расчетов с точным решением модельной задачи о рассеянии шлейфа загрязнения, порождаемого непрерывно действующим точечным источником взвеси.

Suspended polydisperse substance dispersion in a water body is simulated in the case when the spread area is considerably larger than the depth of the water body. The efficient two-dimensional methods is developed taking into account interactions between bottom and substance, substance faction index and vertical source position. Stochastic discrete clouds method is suggested taking into consideration «4/3 law». This method combines the advantages of stochastic discrete particles method and discrete clouds method. Stochastic discrete clouds method is tested by the comparison calculation results and analytical solution for the model problem of pollutant dispersion from time-continuous point source.

Ключевые слова: численные методы, уравнение переноса и диффузии, шельф, взвешенные вещества, турбулентное перемешивание, стохастические методы.

Key words: numerical methods, advection and diffusion equation, shelf, suspended substance, turbulent mixing, stochastic methods.

В последнее время увеличился выброс взвешенных веществ (ВзВ) в прибрежные морские воды в связи с активной хозяйственной деятельностью на океаническом шельфе. Для оценки ущерба, наносимого окружающей среде подобными антропогенными воздействиями, необходимо уметь предсказывать концентрации взвеси, возникающие в акватории в результате этих выбросов.

Вдали от источника (в дальней зоне) ВзВ можно рассматривать как примесь, динамически не влияющую на фоновое поле скорости жидкости, т. е. как пассивную примесь. Справедлив также принцип суперпозиции: распространение этой примеси можно представить в виде движения совокупности отдельных невзаимодействующих «облаков», порождаемых мгновенными точечными монодис-

перными источниками загрязнения, а полную концентрацию взвеси C в произвольной точке акватории вычислить как сумму концентраций пассивной примеси в отдельных облаках, включающих данную точку в рассматриваемый момент времени.

Пространственно-временное распространение пассивной примеси в дальней зоне может быть описано на основе уравнения переноса и диффузии. При этом во многих представляющих интерес для практики случаях использование трехмерного численного моделирования переноса ВзВ, по меньшей мере, неоправданно или затруднительно, так как размер ареала распространения взвеси существенно превышает глубину акватории; количество различных фракций вещества велико; скорости осадения этих фракций могут различаться на много по-

рядков; а значения концентраций в контрольных створах, надежный расчет которых должна обеспечить численная модель, также на много порядков отличаются от концентрации взвеси у источника загрязнения. Кроме того, процесс горизонтального турбулентного рассеивания ВЗВ обнаруживает существенную зависимость скорости диффузии от размера диффундирующего объекта (так называемый «закон 4/3» Ричардсона).

Часто используемые на практике двумерные (усредненные по глубине) модели не всегда являются приемлемыми, так как в них не учитываются особенности вертикального турбулентного обмена, крайне существенного для частиц взвеси малой гидравлической крупности W_j (j — номер фракции), а также нет возможности учета особенностей взаимодействия отлагающихся частиц с дном акватории и учета влияния на процесс конкретного вертикального положения рассматриваемого источника загрязнения.

В настоящей работе для случая мгновенного точечного источника полидисперсной взвеси предлагается свободная от указанных недостатков методика усреднения трехмерного уравнения переноса и диффузии ВЗВ в акватории с медленно меняющейся глубиной. Она основана на введении понятия зависящей от времени эффективной гидравлической крупности полидисперсной взвеси, учитывающей вертикальный турбулентный обмен и дифференциальный характер осаждения отдельных фракций. Усредненная по глубине концентрация взвеси затем находится путем решения двумерного уравнения переноса и диффузии, в котором коэффициент горизонтального турбулентного обмена является функцией времени*. Для численного интегрирования этого уравнения предлагается бессеточный стохастический метод дискретных облаков, сочетающий достоинства стохастического метода дискретных частиц [2] и метода дискретных облаков [3]. Предложенный метод обеспечивает надёжный расчёт концентрации взвеси на больших расстояниях от источника, где эти концентрации малы.

Эффективная гидравлическая крупность полидисперсной взвеси

Примем следующие допущения.

1. Глубина акватории H «меняется медленно»:

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x_i} \right| \ll 1, \quad i = 1, 2,$$

* При мгновенном точечном источнике эта зависимость эквивалентна зависимости коэффициента диффузии от размера диффундирующего облака [1].

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — горизонтальные декартовы координаты.

2. Коэффициент вертикальной турбулентной диффузии K_z представим в виде $K_z = u_* H(\mathbf{x}) K(\xi)$, $\xi = z/H$, где постоянная u_* — характерная скорость вертикальной диффузии; ξ — безразмерная координата z , направленная вертикально вниз; $K(\xi)$ — безразмерный коэффициент вертикальной турбулентной диффузии.

3. Компоненты горизонтальной скорости $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ не зависят от вертикальной координаты z .

4. Зависимости компонент J_i^j горизонтального турбулентного потока фракции j взвеси от распределения ее концентрации C^j даются линейными операторами, не зависящими от вертикальной координаты z и от номера фракции: $J_i^j = \bar{J}_i [C^j]$.

Используя сделанные допущения, трёхмерное уравнение для определения динамики изменения концентрации j -й фракции взвеси G^j , порождаемой мгновенным точечным источником единичной массы, действующим в момент времени $t = 0$ в точке $\mathbf{x} = 0$, можно записать в следующей консервативной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H(\mathbf{x})G^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ H(\mathbf{x})(\bar{u}_i(\mathbf{x}, t)G^j + \bar{J}_i [G^j]) \} = \\ & = -u_* \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\varepsilon_j G^j - K(\xi) \frac{\partial G^j}{\partial \xi} \right]; \quad \varepsilon_j = \frac{W_j}{u_*}; \\ & G^j = \frac{m_j}{H(0)} \delta(\mathbf{x}) \delta(\xi - \xi_0) \quad \text{при } t = 0; \\ & \varepsilon_j G^j - K(\xi) \frac{\partial G^j}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \quad (\text{на поверхности}); \\ & \varepsilon_j G^j - K(\xi) \frac{\partial G^j}{\partial \xi} = \varepsilon_j \beta_j G^j \quad \text{при } \xi = 1 \quad (\text{на дне}). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t — время; δ — дельта-функция; ξ_0 — безразмерная вертикальная координата источника взвеси; β_j — безразмерный коэффициент адсорбции дна (случай $\beta_j = \infty$ соответствует полностью адсорбирующему дну, при $\beta_j = 0$ поток взвеси к дну отсутствует); m_j — начальная массовая доля j -й фракции взвеси ($\sum_j m_j = 1$).

Согласно принципу суперпозиции, например в случае начинающего действовать в момент $t = 0$ непрерывного точечного источника ВЗВ, усредненная по глубине концентрация взвеси \bar{C} определяется интегралом

$$\begin{aligned} \bar{C}(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \dot{M}(t_0) \bar{G}(\mathbf{x}, t - t_0) dt_0; \\ \bar{G}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=0}^N \int_0^1 G^j(\mathbf{x}, t, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

в котором \dot{M} — мощность источника, кг/с; N — количество фракций взвеси.

В [4] путем разложения решения (1) по собственным функциям «оператора осаждения и вертикальной диффузии» (правая часть (1)) показано, что для функции \bar{G} имеет место следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H \bar{G}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ H (\bar{u}_i \bar{G} + \bar{J}_i [\bar{G}]) \} + W(t) \bar{G} &= 0; \\ \bar{G} &= \frac{\delta(\mathbf{x})}{H(0)} \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь не зависящая ни от скорости течения $\bar{\mathbf{u}}$, ни от компонент \bar{J}_i горизонтального диффузионного потока функция $W(t)$ может быть названа «эффективной гидравлической крупностью полидисперсной взвеси». Ее можно отыскивать путем интегрирования следующей совокупности одномерных эволюционных задач, усреднением их решений по координате ξ , суммированием результатов по номерам фракций j и вычислением логарифмической производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\varepsilon_j \mu^j - K(\xi) \frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} \right] &= 0; \\ \mu^j &= m_j \delta(\xi - \xi_0) \text{ при } t = 0; \\ \varepsilon_j \mu^j - K(\xi) \frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} &= 0 \text{ при } \xi = 0; \\ \varepsilon_j \mu^j - K(\xi) \frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} &= \varepsilon_j \beta_j \mu^j \text{ при } \xi = 1; \\ \bar{\mu} &= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \mu^j d\xi; \quad W(\tau(t)) = -u_* \frac{d \ln \bar{\mu}}{d\tau}; \\ \tau(t) &= u_* \int_0^t H_0^{-1}(t') dt'. \end{aligned} \quad (4)$$

В последней формуле $H_0(t)$ — текущая глубина акватории в центре облака ВЗВ. При постоянной

глубине акватории уравнения (3), (4) дают точное решение задачи расчета \bar{G} . При медленно меняющейся глубине они представляют собой приближение, справедливое до тех пор, пока характерная ширина облака ВЗВ не превысит пространственный масштаб изменения глубины акватории. Функция $W(\tau)$ не зависит от траектории движения облака ВЗВ, но зависит от вертикального положения источника, от начального дисперсного состава взвеси и от характера ее взаимодействия с дном.

Горизонтальное турбулентное рассеяние

Если принять, что горизонтальная турбулентность является изотропной и положить в (3) $\bar{J}_i = -K^T(t) \partial \bar{G} / \partial x_i$, где $K^T(t)$ — коэффициент горизонтального турбулентного обмена, то, например, в случае однородного и постоянного по глубине потока, движущегося со скоростью U , решением (3) будет выражение

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi H \sigma^2(t)} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{(x_1 - Ut)^2 + x_2^2}{2\sigma^2(t)} - \int_0^t \frac{W(t')}{H} dt' \right]; \quad \frac{d\sigma^2}{dt} = 2K^T(t), \end{aligned}$$

где $\sigma^2(t)$ — дисперсия распределения вещества примеси; $l(t) = 2\sigma(t)$ определяет характерный размер облака загрязнения.

Зависимость K^T от времени в данном случае эквивалентна зависимости коэффициента турбулентного обмена от размера диффундирующего облака. Действительно, пусть $\sigma^2(t) = A_n t^n$; A_n , $n = \text{const}$.

Тогда $K^T(t) = 0,5nA_n t^{n-1}$ и

$$K^T(l) = B_\omega l^\omega; \quad \omega = \frac{2(n-1)}{n}; \quad B_\omega = \frac{n}{2(3n-2)/n} A_n^{1/n}.$$

Если $n = 3$, то $\omega = 4/3$. Это так называемый «закон 4/3» Ричардсона [5].

Зависимость $\sigma^2(t)$, являющаяся характеристикой горизонтального турбулентного рассеяния ВЗВ в конкретном регионе, может быть получена в опытах с диффузией пятен трассеров [1]. Результаты подобных экспериментов систематизированы в [6]. Согласно этим данным при средних условиях, существующих в океане, для масштабов l из диапазона $10-10^3$ м показатель $n = 3$, а $A_n = 8 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}^3$.

Эффект сдвига

Сделанное выше допущение 3 о независимости горизонтальной скорости потока \mathbf{u} от вертикальной координаты z , по-видимому, является наиболее уязвимым, так как в реальности из-за наличия придонного пограничного слоя величина \mathbf{u} всегда меняется от практически нулевых значений у дна до конечных значений у поверхности акватории. Известно (см., например, [7], [8]), что в подобном случае значительный вертикальный градиент (сдвиг) горизонтальных компонент скорости потока приводит к существенному изменению законов рассеяния примеси, интенсифицируя перенос взвеси в направлении скорости усредненного по глубине течения. На океаническом шельфе величина этого эффекта должна, прежде всего, зависеть от вертикального сдвига горизонтальной скорости потока, т. е. от глубины H , и от скорости потока на поверхности акватории, которая по порядку величины совпадает с усредненной по глубине скоростью $|\bar{\mathbf{u}}|$. Простейшая модель заключается в добавлении к горизонтальным компонентам турбулентного потока взвеси дополнительного диффузионного члена, действующего в направлении вектора скорости усредненного по глубине течения. Коэффициент этой продольной дисперсии определяется выражением $K^D = \gamma H |\bar{\mathbf{u}}|$. В нем характеризующий рассматриваемый регион безразмерный фактор γ зависит от нормированного на свое среднее значение вертикального распределения горизонтальной скорости потока и от безразмерного распределения коэффициента вертикальной диффузии ($\gamma \approx 0,45$ для Северного моря [8]).

Стохастический метод дискретных облаков

На практике для моделирования рассеяния ВзВ обычно используются два вычислительных подхода, а именно метод дискретных облаков и стохастический метод дискретных частиц. Первый метод использует приближенное представление распределения концентрации взвеси в отдельном облаке, возникающем в результате действия мгновенного точечного источника, гауссовой функцией. Положение центра \mathbf{x}_0 этой функции прослеживается с помощью уравнения $d\mathbf{x}_0/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$. Второй метод основан на рассмотрении ансамбля точечных «блуждающих частиц», каждой из которых приписывают определенную массу загрязняющего вещества. Так как с течением времени размеры облаков сильно увеличиваются, то метод дискретных облаков неприменим в случае сильно неоднородных

полей скорости \mathbf{u} , содержащих области возвратных течений и/или застойные зоны. Метод дискретных частиц свободен от этого недостатка. Однако по причине стохастической природы метода для достижения приемлемой точности расчета на больших расстояниях от источника загрязнения, где концентрация взвеси мала, требуется очень большое количество дискретных частиц.

Опишем основные моменты вычислительной методики, совмещающей, как нам представляется, достоинства метода дискретных облаков и стохастического метода дискретных частиц.

Представим распределение загрязняющей взвеси в акватории совокупностью дискретных облаков, порождаемых действием мгновенных точечных источников. Каждое облако будем характеризовать моментом его возникновения t_0 , координатами центра облака $\mathbf{x}_0(t)$, массой взвеси $m(t)$ и дисперсией распределения вещества $\sigma_C^2(t)$. Распределение взвеси в облаке опишем гауссовой функцией. Значение полной концентрации взвеси в произвольной точке акватории будем отыскивать путем суммирования концентраций взвеси в отдельных облаках. Примем, что центры $\mathbf{x}_0(t)$ испытывают дискретные случайные блуждания с дисперсией $\sigma_X^2(t)$, переходя на каждом временном шаге $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ из положения \mathbf{x}_0^n в положение \mathbf{x}_0^{n+1} по закону

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{0i}^{n+1} &= \mathbf{x}_{0i}^n + u_i(\mathbf{x}_0^n, t_n) \Delta t_n + \\ &+ N(\sigma_X^2(t_{n+1}) - \sigma_X^2(t_n)) + N(2K_n^D \Delta t_n) \cdot s_i^n; \\ K_n^D &= \gamma H |\mathbf{u}(\mathbf{x}_0^n, t_n)|; \\ s_1 &= \cos \varphi(\mathbf{x}_0^n, t_n); s_2 = \sin \varphi(\mathbf{x}_0^n, t_n). \end{aligned}$$

Здесь $N(D)$ — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 0 и дисперсией D ; φ — угол наклона вектора скорости потока к оси x_1 системы координат.

Изменение массы взвеси в облаке будем рассчитывать с помощью соотношения

$$m(t_{n+1}) = m(t_n) \exp \left\{ \frac{-[W(t_{n+1} - t_0) + W(t_n - t_0)] \Delta t_n}{H(\mathbf{x}_0^{n+1}) + H(\mathbf{x}_0^n)} \right\}.$$

Дисперсию распределения вещества в облаке $\sigma_C^2(t)$ и дисперсию случайных блужданий центра облака $\sigma_X^2(t)$ свяжем с дисперсией $\sigma^2(t)$, характеризующей спектр горизонтальных турбулентных пульсаций потока, формулами

$$\sigma_C^2(t) = \alpha \cdot \sigma^2(t - t_0); \quad \sigma_X^2(t) = (1 - \alpha) \cdot \sigma^2(t - t_0),$$

в которых $0 \leq \alpha \leq 1$ — настроечный параметр алгоритма (случай $\alpha = 1$ соответствует методу дискретных облаков, а случай $\alpha = 0$ — стохастическому методу дискретных частиц). Можно ожидать, что если поле скорости \mathbf{u} близко к однородному, то использование параметра α , близкого к единице, будет наиболее экономичным (в смысле минимизации требуемого количества дискретных облаков). Напротив, при сильно неоднородных полях, содержащих области возвратного течения и/или циркуляционные зоны, потребуются расчеты с малыми значениями параметра α . При заданном поле скорости \mathbf{u} проверка достоверности получаемых в результате расчетов результатов может проводиться путем сравнения решений, получаемых при последовательном уменьшении этого параметра.

Результаты тестовых расчётов

С целью тестирования предложенного алгоритма рассмотрим задачу расчета переноса примеси в потоке со сдвигом скорости, предполагая, что поток движется параллельно оси x_1 системы координат. В соответствии с рассматриваемой моделью при $H = \text{const}$ распределение концентрации взвеси в облаке, возникающем в результате действия в момент времени $t = 0$ мгновенного точечного источника единичной массы, описывается следующим уравнением (см. (3)):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} + U(1 + \alpha x_2) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_1} + \frac{W(t)}{H} \bar{G} = \\ & = \left[K^T(t) + \gamma H U |1 + \alpha x_2| \right] \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x_1^2} + K^T(t) \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x_2^2}; \quad (5) \\ & \bar{G} = \delta(\mathbf{x})/H \text{ при } t = 0. \end{aligned}$$

Здесь параметры a и γ задают величины горизонтального и вертикального сдвига скорости.

При степенной зависимости K^T от времени задача (5) допускает аналитическое решение. С его помощью, используя принцип суперпозиции (2), можно построить решения, описывающие распределение концентрации взвеси в шлейфах загрязнения, порождаемых действием непрерывного точечного источника ВЗВ. Примеры таких решений в виде изолиний концентрации \bar{C} [мг/л] спустя $t = 1$ ч после начала действия источника консервативной ($W = 0$) взвеси при $H = 10$ м, $U = 0,1$ м/с, $\dot{M} = 1$ кг/с приведены на рис. 1.

Эти точные решения использовались для тестирования стохастического метода дискретных облаков. Некоторые результаты приведены на рис. 2 в виде графиков концентрации \bar{C} в сечениях А-А и Б-Б, показанных на рис. 2,б. Сплошные кривые — точное решение, зачерненные маркеры — расчет стохастическим методом дискретных облаков с параметром $\alpha = 0,5$, незачерненные маркеры — расчет с параметром $\alpha = 0,1$. Во всех расчетах количество дискретных облаков составляло $N_{\text{д.о}} = 10^5$.

В заключение приведем пример модельного расчета шлейфа реального полидисперсного ВЗВ («суглинка легкого песчанистого», [4]). Его эффективная гидравлическая крупность, рассчитанная для случая полностью адсорбирующего ($\beta_j = \infty$) и частично адсорбирующего ($\beta_j = 1$) дна (см. (4)), показана на рис. 3,а (фракции с гидравлической крупностью $W_j < 1$ мкм/с считались неосаждающимися). Расчетные распределения концентрации вдоль

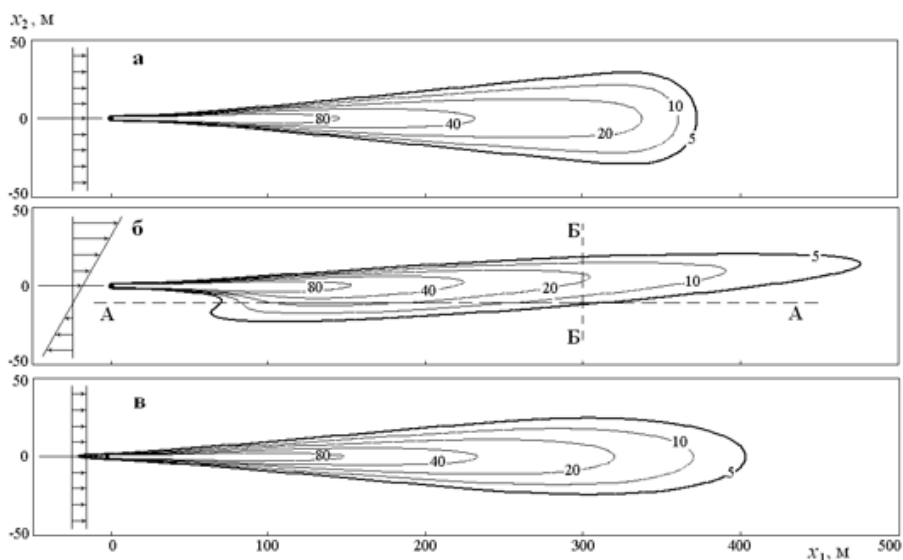


Рис. 1. $a = 0$ (а); $a = 0,1 \text{ м}^{-1}$ (б); $a = 0$ (в)

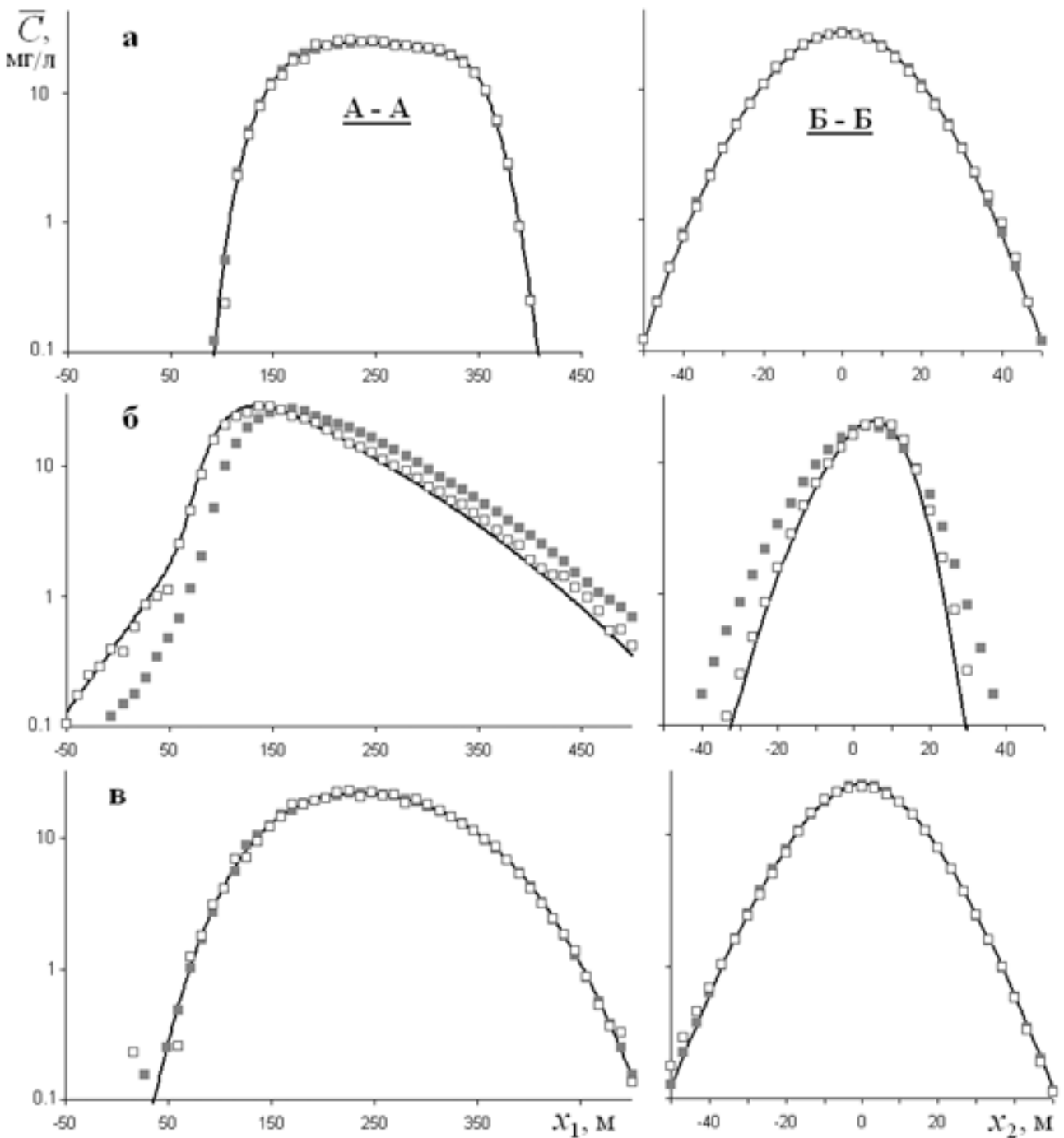


Рис. 2. $a = 0$ (а); $a = 0,1 \text{ м}^{-1}$ (б); $a = 0$ (в)

линии А-А (рис. 1) показаны на рис. 3,б (сплошные кривые — точное решение, маркеры — расчет тестируемым методом при $\alpha = 1$ и количестве дискретных облаков $N_{\text{до}} = 1000$). Поток предполагался полностью однородным ($a = 0, \gamma = 0$).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 08-07-00118, № 08-01-00435) и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Библиографический список

1. *Озмидов Р.В.* Диффузия примесей в океане. — Л.: Гидрометеиздат, 1986.
2. *Архипов Б.В., Котеров В.Н., Солбаков В.В., Шапочкин Д.А., Юрезанская Ю.С.* О численном моделировании распространения загрязняющих веществ и нефтяных разливов стохастическим методом дискретных частиц // Вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. №2. С. 288-301.

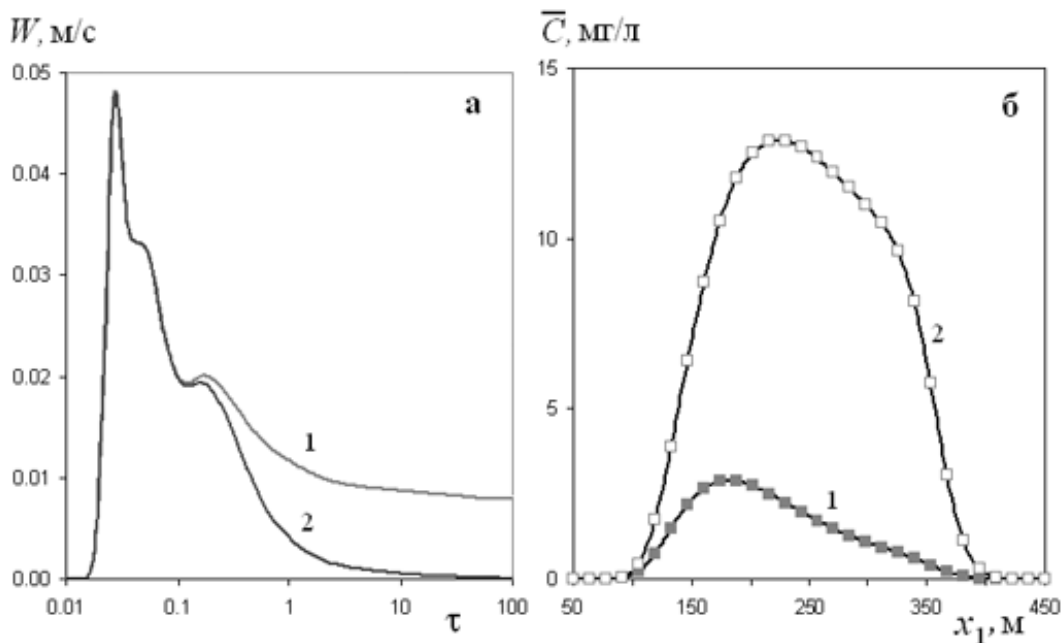


Рис. 3. $\beta_j = \infty$ (1), $\beta_j = 1$ (2)

3. *Архипов Б.В., Котеров В.Н., Кочерова А.С., Солбаков В.В., Хубларян Г.М.* Расчет распространения взвешенных веществ в прибрежной области моря // Водные ресурсы. 2004. Т. 31. №1. С. 1-8.

4. *Котеров В.Н., Юрезанская Ю.С.* Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе. Эффективная гидравлическая крупность полидисперсной взвеси // Вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. №7. С. 1306-1318.

5. *Richardson L.F.* Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbor graph // Proc. Roy. Soc. 1926. Ser. A. V. 110. N. 756. P. 709-720.

6. *Окубо А., Озмидов Р.В.* Эмпирическая зависимость коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии в океане от масштаба явления // Физика атмосферы и океана. 1970. Т. 6. №5. С. 534-536.

7. *Bowden K.F.* Horizontal mixing in the sea due to shearing current // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. Pt. 2. P. 83-95.

8. *Ницль Ж.* Модели дисперсии пассивных субстанций // Моделирование морских систем / Пер. с англ.; Под ред. Т. А. Айзатуллина и др. — Л.: Гидрометеиздат, 1978.

Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН

Сдано в набор 11.12.09. Подписано в печать 30.12.09.
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15,34. Уч.-изд. л. 16,5. Тираж 160 экз.
Заказ 4411/358.

Издательство МАИ-ПРИНТ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993