PACS 89.65.-s

© 2009 г. М. А. Горелов, канд. физ.-мат. наук,
А.Ф.Кононенко, д-р физ.-мат. наук
(Вычислительный центр РАН, Москва)

ИГРЫ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ СИТУАЦИЯМИ. МОДЕЛИ С НЕЖЕСТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Систематизированы и проиллюстрированы способы моделирования конфликтных ситуаций, в которых возможности каждой из сторон могут зависеть от действий партнеров. Рассмотрены конфликты, в которых нарушение ограничений возможно, но нежелательно для одного или нескольких игроков.

1. Введение

Данная статья является непосредственным продолжением [1]. Рассматриваются ситуации, в которых имеются ограничения, связывающие выбор управлений двух или более игроков. В [1] отмечалось, что игры с запрещенными ситуациями появляются на некотором этапе моделирования как неполностью сформулированная модель. Мы анализируем накопленный опыт окончательной формализации такого рода моделей.

Ограничения, связывающие управления игроков, можно с некоторой степенью условности разделить на два класса. Бывают ограничения, которые невозможно нарушить «физически», а встречаются и такие, нарушить которые, в принципе, можно, но нежелательно. В качестве иллюстративного примера можно рассмотреть несколько предприятий, стоящих на берегу озера, которые пользуются водой из озера и сбрасывают в него отходы производства. Имеются ограничения двух типов. Взять из озера больше воды, чем в нем имеется, нельзя. Сбрасывать в озеро отходы можно неограниченно, но если суммарные сбросы превысят некий предел, то нарушится экологическое равновесие и жизнь на берегу озера станет невозможной.

Данный пример достаточно характерен в трех отношениях. Во-первых, он показывает, что жесткие ограничения чаще всего связаны с наличием дефицитных ресурсов, а нежесткие описывают некие условия гомеостазиса рассматриваемой системы. А во-вторых, на практике часто оказывается так, что параметры жестких ограничений известны гораздо лучше, чем параметры нежестких. Наконец, в-третьих, жесткие ограничения носят обычно качественный характер: они могут быть либо выполнены, либо нет. Нежесткие ограничения чаще бывают количественными, т. е. имеет значение величина, на которую ограничение нарушено (от нее может зависеть, например, штраф за превышение объемов сброса отходов).

Способы моделирования ограничений первого типа рассмотрены в предыдущей работе. Рассмотрению систем с ограничениями второго типа посвящена данная статья.

Напомним некоторые понятия и обозначения. Пусть имеется n игроков, множество которых обозначим через $N = \{1, ..., n\}$. Игрок $i \in N$ выбирает свои управления (стратегии) u^i из множества U^i и стремится максимизировать значение функции $g^i : \prod_{i=1}^{n} U^i \to \mathbb{R}$ (как обычно, $\prod_{i=1}^{n} U^i = U^1 \times U^2 \times ... \times U^n$ обозначает декартово произведение множеств). Игрой в нормальной форме будем называть набор $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$. Множество $\prod_{i=1}^{n} U^i$ всех исходов игры $(u^1, u^2, ..., u^n)$ будем в дальнейшем обозначать буквой U без индексов, а элементы этого множества – соответствующей строчной буквой u.

Семейство всех игр в нормальной форме будем обозначать через $\mathcal{NG}$.

Ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$ называется такой набор $u \in U$, что

$$g^i(u) = \max_{v^i \in U^i} g^i \left(u \left\| v^i \right. \right), \; i = 1, ..., n.$$

Здесь и далее символом $(u \| v^i)$ обозначается результат подстановки в ситуацию $u = (u^1, ..., u^n)$ стратегии v^i, т. е. такая ситуация $w = (w^1, ..., w^n)$, что

$$w^j = \begin{cases} v^i, & \text{если } j = i, \\ u^j, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

По аналогии с игрой в нормальной форме описанием введено формальное понятие игры с запрещенными ситуациями: $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$. Здесь, как и прежде, $N = \{1, ..., n\}$ – множество игроков, U^i — множество управлений i-го игрока, а $g^i : \prod_{j=1}^{n} U^j \to \mathbb{R}$ — его функция выигрыша. Символом X^i обозначено подмножество множества всех ситуаций $U = \prod_{j=1}^{n} U^j$, где $i = 1, \ldots, n$. Будем считать, что игрок $i \in N$ отвечает за выполнение ограничения $u \in X^i$ в том смысле, что нарушение этого ограничения для него по каким-то причинам нежелательно. Множество U^i описывает возможности i-го игрока. Множество X^i наряду с функцией g^i описывает, скорее, его желания.

Класс наборов вида $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$ обозначим через $\mathcal{RG}$.

Игры с запрещенными ситуациями появляются на некотором этапе моделирования как некоторый промежуточный результат, «предмодель». В [1] описаны три способа построения замкнутых моделей на основе таких «предмоделей». Приведем еще несколько таких способов.

2. Штрафные функции

Штрафные функции хорошо известны как инструмент приближенного численного решения задач оптимизации. Но, кроме того, они могут быть инструментом построения адекватных моделей в задачах с ограничениями, особенно в тех случаях, когда ограничения носят количественный характер. Основная идея предельно проста: игре с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$ ставят в соответствие игру в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, h^1, ..., h^n \rangle$ с функциями выигрыша вида $h^i(u) = g^i(u) - p^i(u)$, где штрафная функция p^i принимает «маленькие» значения, если ограничение $u \in X^i$ выполняется, и имеет «большие» значения в противном случае.

Обратим внимание на одно обстоятельство. Пусть в игре с запрещенными ситуациями Δ принимает участие два игрока, исходно с противоположными интересами:

$g^1(u) = -g^2(u)$. Тогда равенство $h^1(u) = -h^2(u)$ будет выполняться лишь в тривиальном случае $X^1 \cap X^2 = \emptyset$, т. е. игра Γ получится существенно неантагонистической. На самом деле, тот же эффект имеет место и при других способах учета наличия связывающих ограничений. По этой причине, как указывалось в [1, 2], не приходится рассчитывать на появление в теории игр с запрещенными ситуациями результатов, аналогичных классическим теоремам теории антагонистических игр (например, о связи минимакса и максимина).

В зависимости от моделируемой системы, штрафные функции могут иметь различную структуру. Можно выделить три типа штрафных функций, часто встречающихся в разного рода моделях.

а) Функции с бесконечным штрафом. В этом случае штрафная функция p^i имеет вид

$$p^i(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in X^i, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Символом ∞ в подобных моделях удобно обозначать просто положительное число P, настолько большое, что любая ситуация, удовлетворяющая рассматривамому ограничению, заведомо предпочтительнее любой ситуации, это ограничение нарушающей (чаще всего можно потребовать выполнения неравенства $\min\limits_{u \in U} g^i(u) > -P$).

б) Разрывные функции с конечным штрафом. В этом случае штрафная функция p^i имеет вид

$$p^i(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in X^i, \\ P & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где P – некоторое положительное число, делающее целесообразным нарушение рассматриваемого ограничения, по крайней мере, в тех случаях, когда партнеры отвечающего за него игрока выбирают уж очень не выгодные для него управления.

в) Непрерывные штрафные функции, например вида

$$p^i(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in X^i, \\ P\varphi^i(u) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

когда ограничение задается множеством вида $X^i = \{u \in U : \varphi^i(u) \leqslant 0\}$ (здесь P – некоторая положительная константа).

Разницу между случаями а) и б) можно понять уже на примере спортивных игр. В волейболе любое нарушение правил карается очком, т. е. команда-нарушитель получает минимальный выигрыш, который только возможен. В баскетболе нарушение карается выполнением штрафных бросков, что, конечно же, является наказанием, но иногда на такое наказание выгодно пойти. Даже некоторые теоретические схемы игры в баскетбол (особенно в эндшпиле) предполагают умышленное нарушение правил. В волейбольном матче умышленные нарушения попросту бессмысленны.

Несмотря на указанную интерпретацию символа ∞, различие между случаями а) и б) носит не количественный, а качественный характер. Во-первых, в случае а) обычно проще исследование полученной модели и решение соответствующей задачи. А во-вторых, в случае а) исследователь операции при моделировании может не знать точного значения константы P, обозначающей бесконечность, достаточно лишь информации о том, что она велика.

Модели со штрафными функциями типа а) детально изучались, например, в [3, 4]. Отметим, кстати, что многие классические модели можно рассматривать как игры с запрещенными ситуациями и штрафными функциями типа а). Например, кочующая из учебника в учебник модель «Семейный спор», описываемая в [5] матрицами выигрыша $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, может рассматриваться как игра с ограничениями типа $(u^1, u^2) \in \{u \in U : u^1 = u^2\}$ и штрафной функцией с бесконечным штрафом.

В качестве первой иллюстрации рассмотрим пример дуополии Курно, подробно обсуждавшийся в [1], но с другими интерпретациями.

Пример 1. Пусть имеются две фирмы, продающие на рынке производимый ими продукт. Предположим, что цена на данный продукт $p(u^1, u^2) = 1 - \frac{1}{2}(u^1 + u^2)$, складывающаяся на рынке, линейно убывает с ростом суммарного предложения. Будем считать, что фирмы могут управлять выбором объемов производимой продукции u^i из множеств $U^i = [0, 1]$ и стремятся к увеличению своих доходов, равных $g^i(u^1, u^2) = \left(1 - \frac{1}{2}(u^1 + u^2)\right) u^i,\ i = 1, 2$ (издержками на производство продукта в данной модели пренебрегаем). Теперь допустим, что обе фирмы пользуются общим ресурсом, объем которого ограничен, так что должны выполняться условия $u^i \in X^i,\ i = 1, 2$, где $X^1 = X^2 = \{(u^1, u^2) :\ u^1 + u^2 \leqslant 1\}$ (предполагается, что затраты ресурса пропорциональны количеству производимого продукта). Эта система описывается игрой с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle \{1, 2\}, U^1, U^2, X^1, X^2, g^1, g^2 \rangle$. Будем исходить из того, что оптимальными являются те ситуации, отклоняться от которых в одиночку не выгодно ни одному из игроков.

Рассмотрим две интерпретации этой модели.

1. Предположим, что игроки – это два цеха одного предприятия, выпускающие одинаковую продукцию и работающие на самоокупаемости. Допустим, что множества $X^1 = X^2 = \{(u^1, u^2) :\ u^1 + u^2 \leqslant 1\}$ описывают ограничение по вредным выбросам в атмосферу, за нарушение которых экологические службы налагают штраф в размере $2P$. Если этот штраф раскладывается на игроков поровну, то придем как раз к модели со штрафными функциями, описанными выше. В зависимости от величины константы P будем иметь дело с вариантом а) или б). Кстати говоря, именно неизвестность исследователю операций механизма дележа штрафа может быть в данном случае причиной появления «предмодели». Если будем считать, что игроки делают свои выборы одновременно, не имея информации о выборе партнера, и стремятся к равновесным по Нэшу ситуациям, получим традиционную для теории игр модель, правда, с разрывными функциями выигрыша.

Найти ситуации равновесия в такой игре можно непосредственно из определения. При $P \geqslant \frac{1}{8}$ множество ситуаций равновесия представляет собой отрезок $\{(u^1, u^2) : 0 \leqslant u^1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant u^2 \leqslant 1,\ u^1 + u^2 = 1\}$ (в данном примере выполнение неравенства $P \geqslant \frac{1}{8}$ как раз и означает, что штраф бесконечный). При $\frac{1}{18} < P < \frac{1}{8}$ множество ситуаций равновесия есть $\left\{(u^1, u^2) : 0 \leqslant u^1 \leqslant 2\sqrt{2P},\ 0 \leqslant u^2 \leqslant 2\sqrt{2P},\ u^1 + u^2 = 1\right\}$. При $\frac{1}{32} \leqslant P \leqslant \frac{1}{18}$ множество ситуаций равновесия состоит из отрезка $\left\{(u^1, u^2) : 0 \leqslant u^1 \leqslant 2\sqrt{2P},\ 0 \leqslant u^2 \leqslant 2\sqrt{2P},\ u^1 + u^2 = 1\right\}$ и еще одной ситуации $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, а при $0 < P < \frac{1}{32}$ имеется одна ситуация равновесия $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2. Предположим опять, что игроки – это два цеха одного предприятия, но нера-

венство $u^1 + u^2 \leqslant 1$ описывает теперь ограничение по общим финансовым ресурсам, имеющимся в наличии у предприятия. Дополнительные деньги можно взять взаймы, но за каждый взятый рубль кредитору придется вернуть сумму $1 + 2P$. Такая ситуация описывается игрой в нормальной форме $\langle \{1,2\}, U^1, U^2, H^1, H^2 \rangle$, где $H^i(u) = g^i(u) - p^i(u)$, а

$$p^i(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u^1 + u^2 \leqslant 1, \\ (u^1 + u^2 - 1)\,P \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если предположить, как и в предыдущем варианте, что игроки принимают решение одновременно и стремятся к выбору ситуаций равновесия по Нэшу, то получим традиционную модель с непрерывными функциями выигрыша.

Если процент за кредит мал, так что $P < \frac{1}{4}$, то в этой игре имеется единственная ситуация равновесия $\left(\frac{2}{3}(1-P), \frac{2}{3}(1-P)\right)$, в которой ограничение $u^1 + u^2 \leqslant 1$ нарушается. При больших процентах за кредит, соответствующих значениям $P \geqslant \frac{1}{4}$, нарушение этого ограничения становится невыгодным, и равновесным становятся все ситуации из множества $\{(u^1, u^2) : \; 0 \leqslant u^1 \leqslant 1, \; 0 \leqslant u^2 \leqslant 1, \; u^1 + u^2 = 1\}$.

Штрафными функциями с бесконечным штрафом иногда пользуются и в случаях, когда нарушение ограничений физически невозможно. Однако этим приемом следует пользоваться аккуратно.

В самом деле, вернемся к интерпретации модели «Дуополия Курно», рассмотренной в [1]. Напомним, что там предполагалось, что общее ограничение описывает дефицит некоторого ресурса (хранилищ для зерна), при этом второй игрок, делая свой выбор, знает уже сделанный выбор партнера. Попробуем описать эту ситуацию с помощью штрафных функций. Отбросим связывающие ограничения $u \in X^i$, модифицировав критерии игроков с помощью штрафных функций. Получим игру $\Gamma^{\mathrm{IV}} = \langle \{1,2\}, U^1, \Omega^2, F^1, F^2 \rangle$, где Ω^2 множество всех функций $\omega^2 : U^1 \to U^2$, функции F^i определяются условиями $F^i(u^1, \omega^2) = g^i(u^1, \omega^2(u^1)) - p^i(u^1, \omega^2(u^1))$, а штрафные функции p^i заданы в виде а), т. е. как

$$p^i(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u^1 + u^2 \leqslant 1, \\ \;\infty \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Можно убедиться, что в множество ситуаций равновесия в игре Γ^{IV} входят все пары (u_0^1, ω_0^2) вида:

$$\omega^2(u^1) = \begin{cases} u_0^2, \text{ если } u^1 = u_0^1, \\ 1 \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

для которых выполняется равенство $u_0^1 + u_0^2 = 1$. Поскольку модель, в которой ограничения описаны явно, и модель со штрафной функцией дают разные множества оптимальных решений, адекватной может быть не более одной из них. Вопрос о том, является ли одна из этих моделей адекватной, может решаться, разумеется, на основе неформального анализа моделируемой системы.

Применим тот же прием в случае взаимодействия государства и производителя зерна (другая интерпретация модели «Дуополия Курно» из [1]). Она отличается от предыдущей только информированностью игроков. А именно, теперь предполагается, что первый игрок – это государство, которое еще до начала сева принимает и обнародует правило импортных закупок зерна в зависимости от внутреннего производства, а второй игрок – это фирма производитель. Если использовать для моделирования этого конфликта штрафные функции, то получим игру, в которой будет очень много ситуаций равновесия. А именно, если $(u_0^1, u_0^1) \in X^1 = X^2$, то любая пара стратегий вида

$$v^1\left(u^2\right) = \begin{cases} u_0^1, \text{ если } u^2 = u_0^2, \\ 1 \text{ в противном случае}, \end{cases} \quad w^2(v^1) = \begin{cases} u_0^2, \text{ если } v^1(u_0^2) = u_0^1, \\ 1 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

будет ситуацией равновесия.

По сути, замена жесткого ограничения штрафной функцией открывает перед игроками возможность наказывать партнера за нарушение договора выходом за ограничения (кстати говоря, наказывая при этом и себя самого). Разумеется, это расширяет множество равновесных ситуаций.

Итак, в обоих случаях использование штрафных функций приводит к образованию большого числа «паразитных» решений, что делает модель неадекватной.

Непрерывные штрафные функции адекватно описывают ситуации, когда связывающие ограничения есть, но имеют нечеткий характер. Например, сейчас уже нет сомнений в том, что имеются ограничения на объемы вредных выбросов в окружающую среду. Однако вряд ли кто-то может четко сказать, что объемы выбросов, не превышающих некоторую конкретную величину, вполне приемлемы, а объемы, превышающие ее хотя бы на одну сотую долю процента, совершенно недопустимы. С помощью штрафных функций такие ситуации моделируются достаточно естественно.

Пример 2. Предположим, что имеется n стран. Пусть u^i обозначает объем производства в i-й стране. Этот объем может выбираться из множества $U^i = [0, a^i]$. Разумеется, качество жизни в данной стране определяется ее объемом производства. Но еще он определяется и экологической обстановкой, которую будем считать зависящей от суммарных выбросов вредных веществ. Предположим, что эти выбросы в каждой стране пропорциональны объему производства. Тогда систему можно описать игрой в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$, где $N = \{1, ..., n\}$, функции выигрыша имеют вид $g^i(u^1, ..., u^n) = f^i(u^i) - F(y)$, а $y = \sum\limits_{j=1}^{n} u^j$ – суммарный объем производства. Неотрицательная неубывающая функция F описывает снижение качества жизни за счет ухудшения экологической обстановки.

В предположении непрерывности функций f^i, $i = 1, ..., n$ и F в этой игре существует ситуация равновесия по Нэшу. Непосредственная проверка показывает, что таковой является любая точка глобального максимума функции

$$\Phi(u^1, ..., u^n) = \sum_{i=1}^{n} f^i(u^i) - F(y).$$

При некоторых дополнительных предположениях можно выяснить и структуру этих ситуаций. Допустим, что функции f^i, $i = 1, ..., n$ и F дифференцируемы и, кроме того, производные функций f^i, $i = 1, ..., n$ вблизи нуля очень велики. Тогда множество всех игроков разобьется на два класса: у игроков первого класса в точке равновесия будет $u^i = a^i$, а игроки второго класса не полностью используют свои мощности, т. е. для них $0 < u^i < a^i$. Необходимые условия максимума тогда выглядят следующим образом:

- для игроков первого класса выполняются равенства $u^i = a^i$ и неравенства $\dfrac{df^i}{du^i}(a^i) > \dfrac{dF}{dy}(y)$,
- а для игроков второго класса имеют место условия $\dfrac{df^i}{du^i}(u^i) = \dfrac{dF}{dy}(y)$.

Таким образом, использование штрафных функций позволило получить нетривиальные качественные выводы, допускающие достаточно естественную интерпретацию, не конкретизируя представлений о связывающих ограничениях.

3. Игры с векторными критериями

В математике часто используют следующий прием: подмножество $X^i \subset U$ задают с помощью некоторой функции $p^i : U \to \mathbb{R}$, например

$$p^i(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in X^i, \\ P & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если использовать этот прием для моделирования конфликтов со связывающими ограничениями, то из уже привычной игры с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$ получится игра с векторными критериями $\Lambda = \langle N, U^1, ..., U^n, -p^1, ..., -p^n, g^1, ..., g^n \rangle$, где нет связывающих ограничений, но интересы каждого из игроков описываются стремлением к максимизации сразу двух критериев g^i и $-p^i$. И получается ситуация, детально разобранная в [6]. Теперь, чтобы завершить построение модели, нужно определить свертки критериев для всех игроков.

В разделе 2, по сути, это и было сделано с использованием аддитивного способа свертки. Этот способ не является единственно возможным. Рассмотрим следующую модификацию примера 2, предложенную Н.Н. Моисеевым [7].

Пример 3. Вновь рассмотрим n стран, каждая из которых может управлять выбором объема производства u^i. Пусть экономический потенциал i-й страны таков, что ее выбор может осуществляться из множества $U^i = [0, a^i]$. Предположим, что качество жизни в каждой стране опредляется уровнем потребления и экологической обстановкой. Разумеется, уровень потребления $f^i(u^i)$ зависит от объема производства в рассматриваемой стране. А экологическая обстановка определяется суммарными выбросами в атмосферу. Если предположить, что объемы выбросов пропорциональны объемам производства, то экологическую ситуацию можно характеризовать функцией $F\left(\sum\limits_{j=1}^{n} u^j\right)$. Получаем игру с векторными критериями $\Lambda = \langle N, U^1, ..., U^n, F, ..., F, f^1, ..., f^n \rangle$. Если, как предлагается в [7], использовать свертку min, то придем к игре в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$, где функции выигрыша имеют вид

$$g^i(u^1, ..., u^n) = \min \left\{ \lambda^i f^i(u^i), \mu F\left(\sum_{j=1}^{n} u^j\right) \right\},$$

λ^i и μ – некоторые константы, характеризующие относительную важность экономических и экологических факторов для жителей i-й страны.

Естественно считать, что функции f^i, $i = 1, ..., n$ возрастают, а функция F убывает. Предположим вдобавок, что эти функции непрерывны, неотрицательны и $f^i(0) = 0$, $i = 1, ..., n$. Тогда, как показано в [8], в рассматриваемой игре существует единственная ситуация равновесия по Нэшу, структура которой описывается следующим образом. Все игроки разбиваются на два класса.

- Для игроков из первого класса выполняются условия $\lambda^i f^i(a^i) < \mu F\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u^i\right)$, $u^i = a^i$.
- Для игроков из второго класса имеют место равенства $\lambda^i f^i(u^i) = \mu F\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u^i\right)$.

Данная система равенств и неравенств однозначно определяет искомую ситуацию равновесия.

Подобные модели встречаются не редко. Например, в [7] в похожих терминах описано взаимодействие стран при угрозе ядерной войны, а в [9] построена модель механизмов реализации Киотсткого протокола. Исследованию таких игр посвящена так называемая теория Гермейера-Вателя [8] (наиболее сильные результаты и указания на первоисточники можно найти в [10]).

Можно представить себе и использование других сверток.

Пример 4. Пусть на мировом рынке взаимодействуют n стран, которые добровольно могут объединяться в международную организацию. Предположим, стратегии $u^i \in U^i$ описывают правила внешней торговли в i-й стране (таможенные пошлины, экспортные квоты и т. п.). Членство в этой организации предполагает выполнение некоторых обязательств, которые в общем случае можно моделировать с помощью условия $u \in X^i$. Пусть выигрыш страны в случае ее вхождения в организацию описывается функцией $f^i : U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $f^i(u) = -\infty$, если $u \notin X^i$. Если страна не входит в организацию, ее выигрыш описывается «штрафной» функцией $p^i : U \to \mathbb{R}$.

Поскольку членство в организации является правом, а не обязанностью, то вполне естественно моделировать данную систему с помощью игры в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$, в которой функции выигрыша определяются условиями $g^i(u) = \max\{f^i(u), p^i(u)\}$, так как, естественно, i-й игрок примет решение о вхождении в организацию, если от этого он не проиграет, т. е. $f^i(u) = \max\{f^i(u), p^i(u)\}$, и откажется от членства в противном случае.

Таким образом, и свертка «max» не выглядит слишком уж экзотичекой.

4. Новые принципы оптимальности

Рассмотренные выше приемы учета связанных ограничений неоднократно встречались в практике моделирования. В этом разделе описаны подходы, имеющие больше теоретическое значение.

Для того чтобы полностью формализовать задачу принятия решений в условиях конфликта, нужно указать, какие решения считаются «рациональными». В случае игр со связанными ограничениями это означает, что каждой игре Δ из класса $\mathcal{RG}$ надо поставить в соответствие множество оптимальных ситуаций $S(\Delta)$. Выше это отображение S строилось следующим образом. Задавалось отображение T из класса $\mathcal{RG}$ игр со связанными ограничениями в класс $\mathcal{NG}$ игр в нормальной форме, и искомый принцип оптимальности определялся как композиция отображения T и отображения NE, которое каждой игре в нормальной форме Γ ставит в соответствие множество ситуаций равновесия по Нэшу $NE(\Gamma)$. В качестве «вспомогательного» класса моделей может использоваться не класс $\mathcal{NG}$, а какой-то другой (например, класс позиционных игр), и в качестве «базового» принципа оптимальности может использоваться другой известный принцип оптимальности.

Разумеется, можно пойти по другому пути, определив принцип оптимальности T непосредственно, не прибегая к построению вспомогательной модели. Такой подход используется, например, в [2]. Единственное требование к этому принципу оптимальности состоит в том, чтобы полученная модель адекватно описывала моделируемую систему, а единственный критерий адекватности – практика.

Если же отвлечься от конкретной предметной области, то простор для фантазии при изобретении новых принципов оптимальности будет весьма большим. Пожалуй, единственное ограничение накладывает принцип соответствия, который в данном случае может конкретизироваться следующим образом. В классе $\mathcal{RG}$ имеются модели, для которых очевидно, какие ситуации являются оптимальными. Например, этот класс включает такие модели $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$, для которых множество U^i состоит из одной точки при любом $i = 2, ..., n$. Понятно, что в таком случае оптимальной следует считать точку максимума функции g^1 на множестве X^1, по крайней мере, если она одна. И всякий «разумный» принцип оптимальности должен давать тот же результат.

Обычно новый принцип оптимальности строят по аналогии с одним из «классических». Например, в [11] предложено следующее обобщение понятия равновесия по Нэшу. Скажем, что ситуация u является ситуацией равновесия в игре $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$, если $u \in \bigcap_{i=1}^{n} X^i$ и для любого $i \in N$ и любой стратегии v^i, удовлетворяющей условию $(u \,\|v^i) \in X^i$, выполняется неравенство $g^i\,(u \,\|v^i) \leqslant g^i(u)$. Содержательно это означает, что игрок, рассматривая возможность отклонения, учитывает только «свое» ограничение. Выполнение всех остальных ограничений обеспечивается не тем, что этот игрок как-то ограничен, а тем, что ему нарушать их просто не выгодно.

Заметим, что принцип равновесия по Нэшу можно модифицировать другими способами. Например, можно предполагать, что неравенство $g^i\,(u \,\|v^i) \leqslant g^i(u)$ выполняется лишь для тех стратегий v^i, которые удовлетворяют условию $(u \,\|v^i) \in \bigcap_{i=1}^{n} X^i$, т. е. отклоняющийся игрок берет на себя ответственность за выполнение всех ограничений. Оба эти обобщения проходят проверку принципом соответствия. Какой из них лучше, может решить только практика.

Можно попробовать усилить принцип соответствия. Для игр в нормальной форме сколько-нибудь широкое признание получило весьма ограниченное число принципов оптимальности: индивидуальная рациональность, оптимальность по Парето, дележ, равновесие по Нэшу, сильное равновесие, принцип максимального гарантированного результата, $\alpha-$, $\beta-$, и $\gamma-$ ядра. Этот список можно расширять, но, видимо, не сильно. Попытки предложить новый принцип оптимальности не прекращаются, но новые концепции, действительно расширяющие область применимости теоретико-игровых моделей, не появлялись уже достаточно давно. Это позволяет сделать естественнонаучную гипотезу о том, что все «разумные» принципы оптимальности включены в подобный список.

Не исключено, что за этой гипотезой стоит какой-то фундаментальный факт, но пока даже трудно представить, в каких терминах он мог бы быть сформулирован. Можно сослаться, пожалуй, только на аналогию с теорией особенностей. К примеру, можно вообразить бесчисленное множество способов эволюции динамической системы. На практике же наблюдается лишь небольшое число качественно различных вариантов. Согласно теории особенностей это происходит потому, что все прочие способы, во-первых, неустойчивы по отношению к малым вариациям параметров системы, а во-вторых, не типичны. Возможно, и в нашем случае имеет место что-то подобное.

Если же принять эту гипотезу, то принцип соответствия может быть усилен следующим образом. Каждой игре в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$ можно естественным образом поставить в соответствие игру с запрещенными ситуациями $Q(\Gamma) = \langle N, U^1, ..., U^n, U, ..., U, g^1, ..., g^n \rangle$. Тогда композиция этого отображения с вновь предлагаемым принципом оптимальности должна совпадать с одним из принципов оптимальности из рассматриваемого списка.

Подобную проверку полезно проводить и в том случае, когда, предлагая новый принцип оптимальности, руководствуются теми же содержательными соображениями, что и при определении одного из уже известных.

Классические принципы оптимальности, такие как принцип равновесия по Нэшу, определенным образом согласованы с внутренней структурой классов игр, на которых они определены. Например, чем больше информированность игроков, тем шире множество ситуаций равновесия по Нэшу в том смысле, что если игра Γ_* является квазиинформационным расширением игры Γ, то существует естественное вложение множетсва ситуаций равновесия в игре Γ в множество ситуаций равновесия в игре Γ_*, которое, вообще говоря, не является сюръективным. Весьма желательно, чтобы тем же свойством обладали отображения, о которых говорится двумя абзацами выше. Это требование может быть формально описано в терминах теории категорий, о чем можно прочесть в [12] или [13].

Кроме того, игры с запрещенными ситуациями и новые принципы оптимальности могут возникать при агрегировании более сложных моделей. Следующий пример показывает, как довольно экзотический принцип оптимальности появляется при исследовании модели с вполне традиционным приципом равновесия по Нэшу.

Пример 5. Рассмотрим игру, заимствованную из [14] (с другой интерпретацией). Пусть имеется n покупателей и две сети продуктовых магазинов. Каждый из покупателей вправе решать, в какой фирме совершать покупки. Предположим, что при этом он ориентируется на такие показатели, как уровень цен и внимание продавцов. Естественно считать, что чем больше наплыв покупателей, тем выше хозяева магазина могут поднять цены и тем меньше внимания достанется каждому клиенту. Эта ситуация описывается игрой n лиц в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$, в которой $N = \{1, ..., n\}$, $U^i = \{1, 2\}$, а

$$g^i(u) = \begin{cases} h^1\left(2n - \sum\limits_{k=1}^{n} u^k\right), \text{ если } u^i = 1, \\ h^2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u^k - n\right), \text{ если } u^i = 2, \end{cases}$$

где $h^j(k)$ означает удовлетворение покупателя от покупки в j-й фирме при условии, что она обслуживает k клиентов ($j = 1, 2$).

Если функции h^j убывают и находятся в общем положении (множества их значений не пересекаются), то в данной игре имеется единственная с точностью до симметрии ситуация равновесия по Нэшу.

Можно агрегировать эту игру. Рассмотрим игру двух лиц (владельцев фирм, которые сами решают, кого из клиентов обслуживать) с запрещенными ситуациями $\Delta = \left\langle \{1, 2\}, V^1, V^2, X^1, X^2, f^1, f^2 \right\rangle$, в которой $V^1 = V^2 = \{1, ..., n\}$,

$$X^1 = X^2 = \left\{ \left(v^1, v^2\right) : \ v^1 \in V^1,\ v^2 \in V^2,\ v^1 + v^2 = n \right\},$$

а $f^1(v^1, v^2) = h^1(v^1)$, $f^2(v^1, v^2) = h^2(v^2)$ (при этом считаем, что владельцы фирм заинтересованы, главным образом, в том, чтобы их клиенты были довольны). Оптимальными будем считать те ситуации, которые принадлежат множеству X^1 и доставляют максимум функции

$$H\left(v^1, v^2\right) = \min\left\{ f^1(v^1, v^2), f^2(v^1, v^2) \right\}.$$

Такая модель хороша тем, что множество ситуаций равновесия по Нэшу в игре Γ есть прообраз множества оптимальных исходов в игре с запрещенными ситуациями Δ при отображении $M : U \to V^1 \times V^2$, определенном условиями

$$M(u) = \left(2n - \sum_{i=1}^{n} u^i, \sum_{i=1}^{n} u^i - n \right).$$

В самом деле, непосредственно проверяется, что в обеих моделях оптимальными будут те и только те решения, при которых степени удовлетворенности всех покупателей почти совпадают.

Заметим, кстати, что в силу теоремы Ю.Б. Гермейера [6] этот принцип оптимальности находит одну из оптимальных по Парето точек, т. е. его можно рассматривать как уточнение принципа Парето.

В подобных терминах может моделироваться поведение жителей мегаполиса, делающих выбор между личным и общественным транспортом, и некоторые другие ситуации.

Отметим, что описанная в [1] модель дележа квот на вылов рыбы получается такой именно в процессе агрегирования. Потери от нарушения ограничения могут быть только в будущем, и модель получится такой, как описано в [1], если агрегировать по времени динамическую модель.

5. Заключение

Весьма вероятно, что предложенный выше и в [1] список подходов к моделированию конфликтов со связывающими ограничениями является полным. Во всяком случае, способов моделирования, которые достаточно естественным образом не сводились бы к рассмотренным схемам, авторам на сегодняшний день не известно. Но даже если это не так, опыт моделирования, суммированный в этом списке, может оказаться полезным, так как четкое понимание того, почему каждый из перечисленных способов не подходит при моделировании конкретной системы, безусловно, способно прояснить ситуацию.

Рассмотренные нами примеры носят чисто иллюстративный характер, но почти все способы учета связывающих ограничений, использованные в этих примерах, встречались в серьезных прикладных исследованиях.

Надеемся, что приведенные примеры достаточно выпукло демонстрируют возможности применения описанных способов на практике. Выбор этих примеров диктовался в основном форматом работы. Основными критериями при их отборе были простота и наглядность. Разумеется, говорить об адекватности этих моделей каким-то конкретным системам можно лишь весьма условно.

Разобранные примеры были взяты из экономики и экологии. Но схожие проблемы возникают и во многих других областях:

1. В коллективной психологии. Нет сомнения, что во многих случаях важную роль играют ограничения морально-этического характера. Это отмечалось еще в [3], хотя приемлемых способов учета этих ограничений в моделях до сих пор не видно.

2. В политике. Например, члены парламента могут иметь разные цели, но не все они могут считать возможным доводить ситуацию до роспуска парламента.

3. В технике. Известен конфликт, возникающий при конструировании боевых самолетов между разными группами инженеров: специалистами по аэродинамике, по прочности, по вооружению и т. д.

4. В медицине. Если одного больного лечат от разных болезней несколько врачей, то у каждого из них свои цели, но одно общее ограничение всегда есть – пациент должен остаться живым.

5. В межэтнических и межконфессиональных отношениях. Известно, какие проблемы возникли, когда в Крыму к тысячелетию крещения Руси воздвигли крест на горе, возвышающейся над мечетью.

6. В биологии. Иногда приемлем телеологический способ моделирования биологических систем, например приписыванием животным цели выжить. В таком случае щуки данного озера «заинтересованы» в том, чтобы караси в этом озере совсем-то уж не вымерли.

Этот перечень может быть продолжен. Но общие методологические принципы моделирования пока остаются неизменными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Игры с запрещенными ситуациями. Модели с мягкими ограничениями // АиТ. (В печати).

2. *Токарев В.В.* Гарантированные результаты в играх с запрещенными ситуациями // АиТ. 2009. №6. С. 123–140.

3. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

4. *Новикова Н.М.* Игры двух и терх лиц со связанными ограничениями при фиксированном порядке ходов // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1976. Т. 16. № 2. С. 325 – 339.

5. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.

6. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

7. *Моисеев Н.Н., Александров В.В., Тарко А.М.* Человек и биосфера. М.: Наука, 1985.

8. *Гермейер Ю.Б., Ватель И.А.* Игры с иерархическим вектором интересов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974. №3. С. 54-69.

9. *Кононенко А.Ф., Шевченко В.В.* Теоретико-игровые модели механизмов реализации Киотского протокола // Сб. тр. IV Междунар. конф. по проблемам управления. М.: ИПУ, 2008. ISBN-978-5-91450-026-6.

10. *Кукушкин Н.С., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р. Моисеев Н.Н.* Устойчивые компромиссы в играх со структурированными функциями выигрыша // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1985. Т. 25. № 12. С. 1761 – 1776.

11. *Токарев В.В.* Особенности равновесий в играх с запрещенными ситуациями // АиТ. 2009. №7. С. 127–138.

12. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.

13. *Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Информационные аспекты принятия решений в условиях конфликта. М.: ВЦ РАН, 1994.

14. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.