

ISBN 5-201-09873-8

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
им. А.А. Дородницына

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ
И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ



МОСКВА

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А.ДОРОДНИЦЫНА

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И
СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А.ДОРОДНИЦЫНА РАН
МОСКВА 2007

О т в е т с т в е н н ы е р е д а к т о р ы

академик РАН В. В. Румянцев, доктор физ.-матем. наук
С. Я. Степанов, канд. физ.-матем. наук А. А. Буров

В сборник включены статьи по динамике твердого и деформируемого тел и тела в жидкости, контактными задачам теории упругости, динамике мобильных роботов и колесных пар рельсовых транспортных средств и по движению механических систем при наличии сухого трения, вопросам теплопроводности и акустических колебаний эллипсоида.

Рецензенты: Ю.Н. Павловский,
П.С. Красильников

Научное издание

©Вычислительный центр им. А.А.Дородницына
Российской академии наук, 2007

ОБ “ОГРАНИЧЕННОЙ” ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О
ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ
ЖИДКОСТИ

А. А. Буров

Рассматривается задача о движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости в “ограниченной постановке”: в инерционные параметры системы вводится малый параметр таким образом, что он присутствует в качестве множителя как в правых, так и в левых частях некоторых из уравнений движения. Исследуется динамика возникающих предельных объектов, выписываются уравнения движения и их первые интегралы. В некоторых случаях изучаются условия существования и устойчивости установившихся движений, рассматривается вопрос о частичном разделении движений и об условиях существования дополнительных первых интегралов.

В [1] (см. также [2]) был предложен систематический подход к формулировке и исследованию основных свойств предельных задач динамики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и динамики твердого тела в идеальной несжимаемой покоящейся на бесконечности жидкости. Этот подход был развит в [3], где параметр, характеризующий размеры тела, введен способом, отличающимся от способа [1]. Это позволило [4,5] исследовать более широкий класс задач динамики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и выявить качественно новые динамические свойства.

Ключевые слова: уравнения Кирхгоффа, движение тела в жидкости, ограниченная задача, интегрируемость.

1. Общие уравнения движения. Рассмотрим движение твердого тела в идеальной несжимаемой покоящейся на бесконечности жидкости. Пусть $Ox_1x_2x_3$ - связанная с телом подвижная система координат, начало которой совпадает с центром масс тела O . Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in R^3(\boldsymbol{\omega})$ - вектор угловой скорости тела, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in R^3(\mathbf{v})$ вектор скорости точки O . Тогда движение твердого тела в жидкости описывается уравнениями Кирхгоффа – Клебша (см., например [5])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega}, \quad L = L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь L - линейно-квадратичная функция компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{v} , определенная кинетической энергией тела и жидкости. Квадратичная составляющая этой функции положительно определена по компонентам векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{v} . Линейные слагаемые обращаются в нуль, если поверхность тела односвязна.

С помощью преобразования Лежандра по компонентам \mathbf{v} введем новые переменные

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.2)$$

В силу невырожденности линейной по \mathbf{v} системы (1.2) она допускает единственное решение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}). \quad (1.3)$$

Тогда с помощью функции Рауса

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}) &= [L - (\mathbf{p}, \mathbf{v})]_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{p})} = \\ &= ((\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + 2(\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}) + (\mathbf{C}\mathbf{p}, \mathbf{p})) / 2 + (\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{L}, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.5)$$

Форма тела и тензоры \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{K} , \mathbf{L} предполагаются постоянными.

Система (1.5) аналогична уравнениям Эйлера - Пуассона из динамики твердого тела с неподвижной точкой. Помимо интеграла энергии - Пенлеве - Якоби

$$\mathcal{J}_0 = \left(\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\omega} \right) - R = h \quad (1.6)$$

она допускает аналоги интеграла площадей и геометрического интеграла

$$\mathcal{J}_1 = \left(\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \mathbf{p} \right) = p_\psi, \quad \mathcal{J}_2 = (\mathbf{p}, \mathbf{p}) = p^2. \quad (1.7)$$

Будем считать для определенности, что $p > 0$. Заметим, что вторая подсистема в (1.5) выражает неизменность вектора количества движения \mathbf{p} в абсолютном пространстве.

Выбором связанной с телом системы координат можно привести тензор \mathbf{A} к диагональному виду $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Будем для простоты считать, что в этих осях тензоры \mathbf{B} и \mathbf{C} также приводятся к диагональному виду (ср., например, [9]): $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)$. Иными словами, функцию (1.4) можно записать как

$$R = \sum [A_1 \omega_1^2 + 2B_1 \omega_1 p_1 + C_1 p_1^2] / 2 + \sum [K_1 \omega_1 + L_1 p_1] \quad (1.8)$$

Здесь и далее суммирование предполагается по циклической перестановке индексов (1,2,3). В этом случае первая подсистема уравнений (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + B_1 \dot{p}_1 = & (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + K_2 \omega_3 - K_3 \omega_2 + \\ & + (B_2 - B_3) (p_2 \omega_3 + p_3 \omega_2) + \\ & + p_3 L_2 - p_2 L_3 + (C_2 - C_3) p_3 p_2. \quad (1, 2, 3) \end{aligned}$$

Если положить

$$A_1 = a_2 + a_3, \quad B_1 = b_2 + b_3, \quad (1, 2, 3)$$

то уравнения движения можно представить в виде

$$\begin{aligned} & (a_2 + a_3)\dot{\omega}_1 + (b_2 + b_3)\dot{p}_1 = (a_3 - a_2)\omega_2\omega_3 + \\ & = (a_3 - a_2)\omega_2\omega_3 + K_2\omega_3 - K_3\omega_2 + (b_3 - b_2)(p_2\omega_3 + p_3\omega_2) \\ & \quad + p_3L_2 - p_2L_3 + (C_2 - C_3)p_3p_2, \quad (1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\dot{p}_1 = p_2\omega_3 - p_3\omega_2, \quad (1, 2, 3) \quad (1.10)$$

При этом интегралы (1.6), (1.7) уравнений (1.9), (1.10) примут вид

$$\mathcal{J}_0 = \sum [(a_2 + a_3)\omega_1^2 - (C_1p_1^2 + 2L_1p_1)] / 2 = h, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{J}_1 = \sum [(a_2 + a_3)\omega_1p_1 + B_1p_1^2 + K_1p_1] = p_\psi. \quad (1.12)$$

Для полной интегрируемости уравнений (1.5), как известно, недостает одного дополнительного интеграла. Заметим, что уравнения (1.5) при соответствующем выборе параметров описывают как движение тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки, так и движение тела в жидкости, и оказываются вполне интегрируемыми при значениях параметров, отвечающих известным случаям интегрируемости этих двух задач.

2. Предельный переход. Предположим теперь, что “длина” тела много больше его “ширины” и “толщины”, и тело вытянуто вдоль своей третьей оси. Чтобы это формализовать, введем параметр $\varepsilon \neq 0$ так, что

$$\begin{aligned} a_i & \mapsto \varepsilon a_i, & b_i & \mapsto \varepsilon b_i, & i & = 1, 2, \\ C_i & \mapsto C + \varepsilon c_i, & i & = 1, 2, \\ K_i & \mapsto \varepsilon K_i, & L_i & \mapsto \varepsilon L_i, & i & = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тогда уравнения (1.9) примут вид

$$\begin{aligned} (\varepsilon a_2 + a_3)\dot{\omega}_1 + (\varepsilon b_2 + b_3)\dot{p}_1 &= (a_3 - \varepsilon a_2)\omega_2\omega_3 + \\ &+ (b_3 - \varepsilon b_2)(p_2\omega_3 + p_3\omega_2) + (C + \varepsilon c_2 - C_3)p_2p_3 + \\ &+ (\varepsilon K_2\omega_3 - K_3\omega_2) + (\varepsilon L_2p_3 - L_3p_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (a_3 + \varepsilon a_1)\dot{\omega}_2 + (b_3 + \varepsilon b_1)\dot{p}_2 &= (\varepsilon a_1 - a_3)\omega_3\omega_1 + \\ &+ (\varepsilon b_1 - b_3)(p_3\omega_1 + p_1\omega_3) + (C_3 - C - \varepsilon c_1)p_3p_1 + \\ &+ (K_3\omega_1 - \varepsilon K_1\omega_3) + (L_3p_1 - \varepsilon L_1p_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(a_1 + a_2)\dot{\omega}_3 + \varepsilon(b_1 + b_2)\dot{p}_3 &= \varepsilon(a_2 - a_1)\omega_1\omega_2 + \\ &+ \varepsilon(b_2 - b_1)(p_1\omega_2 + p_2\omega_1) + \varepsilon(c_2 - c_1)p_1p_2 + \\ &+ \varepsilon(K_1\omega_2 - K_2\omega_1) + \varepsilon(L_1p_2 - L_2p_1). \end{aligned}$$

После сокращения на ε левой и правой частей уравнения (2.3) и выполнения предельного перехода $\varepsilon \mapsto 0$ в полученном уравнении, равно как и в уравнениях (2.2) и (2.3), система (2.2) – (2.3) запишется как

$$\begin{aligned} a_3\dot{\omega}_1 + b_3\dot{p}_1 &= a_3\omega_2\omega_3 + b_3(p_2\omega_3 + p_3\omega_2) + \\ &+ (C - C_3)p_2p_3 - K_3\omega_2 - L_3p_2, \\ a_3\dot{\omega}_2 + b_3\dot{p}_2 &= -a_3\omega_3\omega_1 - b_3(p_3\omega_1 + p_1\omega_3) + \\ &+ (C_3 - C)p_3p_1 + K_3\omega_1 + L_3p_1, \\ (a_1 + a_2)\dot{\omega}_3 + (b_1 + b_2)\dot{p}_3 &= (a_2 - a_1)\omega_1\omega_2 + (c_2 - c_1)p_1p_2 \\ &+ (b_2 - b_1)(p_1\omega_2 + p_2\omega_1) + \\ &+ (K_1\omega_2 - K_2\omega_1) + (L_1p_2 - L_2p_1) \end{aligned}$$

или с учетом уравнений (1.10)

$$\begin{aligned} a_3\dot{\omega}_1 &= a_3\omega_2\omega_3 + 2b_3p_3\omega_2 + (C - C_3)p_2p_3 - K_3\omega_2 - L_3p_2, \\ a_3\dot{\omega}_2 - a_3\omega_3\omega_1 - 2b_3p_3\omega_1 &+ (C_3 - C)p_3p_1 + K_3\omega_1 + L_3p_1, \quad (2.3) \\ (a_1 + a_2)\dot{\omega}_3 &= (a_2 - a_1)\omega_1\omega_2 + 2(b_2p_2\omega_1 - b_1p_1\omega_2) + \\ &+ (c_2 - c_1)p_1p_2 + K_1\omega_2 - K_2\omega_1 + L_1p_2 - L_2p_1. \end{aligned}$$

Введение параметров ($i = 1, 2$)

$$\beta_i = b_i/(a_2 + a_1), \quad \varkappa_i = K_i/(a_2 + a_1), \quad \lambda_i = \Lambda_i/(a_2 + a_1),$$

$$\beta = b_3/a_3, \quad \mu = (C - C_3)/a_3, \quad \varkappa = K_3/a_3, \quad \lambda = L_3/a_3,$$

$$\alpha = (a_2 - a_1)/(a_2 + a_1), \quad \nu = (c_2 - c_1)/(a_2 + a_1)$$

при выполнении условий $a_3 \neq 0$ и $a_1 + a_2 \neq 0$ позволяет представить систему (2.5) как

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 + 2\beta p_3\omega_2 + \mu p_2 p_3 - \varkappa\omega_2 - \lambda p_2, \\ \dot{\omega}_2 &= -\omega_3\omega_1 - 2\beta p_3\omega_1 - \mu p_3 p_1 + \varkappa\omega_1 + \lambda p_1, \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha\omega_1\omega_2 + 2(\beta_2 p_2\omega_1 - \beta_1 p_1\omega_2) + \nu p_1 p_2 + \\ &\quad + (\varkappa_1\omega_2 - \varkappa_2\omega_1) + (\lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения (1.9) вместе с уравнениями Пуассона (1.10) полностью определяют движение в рассматриваемом приближении.

Аналогичный предельный переход в первых интегралах \mathcal{J}_0 и \mathcal{J}_1 позволяет представить их в виде

$$\mathcal{J}_0 = [(\omega_1^2 + \omega_2^2) - Cp^2 + \mu p_3^2] / 2 - \lambda p_3 = h', \quad (2.5)$$

$$\mathcal{J}_1 = (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2) + \beta (p_1^2 + p_2^2) + \varkappa p_3 = p'_\psi, \quad (2.6)$$

$$h = a_3 h', \quad p_\psi = a_3 p'_\psi.$$

В дальнейшем штрихи при постоянных первых интегралов отброшены.

При $\alpha = 0$ в случае односвязного твердого тела, обладающего тремя плоскостями симметрии, эти уравнения изучались ранее [1]. В дальнейшем без нарушения общности будем считать, что $\alpha \geq 0$.

Замечания. 1°. Если $\alpha = 0$, то у плавающего тела “ширина” и “толщина” примерно совпадают. Отличие параметра α от нуля

означает, что рассматривается “рыба”, у которой “ширина” существенно отличается от “толщины”. При этом отличие от нуля величин β , β_1 и β_2 указывает на то, что эта “рыба” изогнута так, что у нее нет плоскостей симметрии.

2°. Дивергенция правых частей уравнений (2.6) равна нулю. Поэтому эта система уравнений допускает инвариантную меру с единичной плотностью. *A priori* неизвестно, имеют ли эти уравнения структуру уравнений Эйлера - Пуанкаре - Четаева.

3. Некоторые случаи существования дополнительных первых интегралов. Для уравнений (2.6), (1.10) можно указать некоторые случаи существования дополнительных первых интегралов.

1°. “СЛУЧАЙ ЖУКОВСКОГО – ВОЛЬТЕРРА”. Пусть в рассматриваемых уравнениях все коэффициенты за исключением, быть может, α , \varkappa_1 , \varkappa_2 , \varkappa_3 равны нулю. В этом случае уравнения (2.6) отделяются от уравнений Пуассона, и их можно рассмотреть независимо от последних. Функции

$$\mathcal{J}_0 = (\omega_1^2 + \omega_2^2) / 2 = h, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{J}_3 = (\alpha\omega_2^2 + \omega_3^2) / 2 - \varkappa_1\omega_1 - \varkappa_2\omega_2 - \varkappa_3\omega_3 = g, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{J}'_3 = (\alpha\omega_1^2 - \omega_3^2) / 2 + \varkappa_1\omega_1 + \varkappa_2\omega_2 + \varkappa_3\omega_3 = g \quad (3.3)$$

— первые интегралы уравнений движения; любые две из них функционально независимы и позволяют проинтегрировать уравнения движения.

В силу соотношения (3.1) поверхности уровня интеграла \mathcal{J}_0 в пространстве $R^3(\omega)$ — круговые цилиндры, ось которых совпадает с третьей осью ПСК. В силу соотношения (3.2) поверхности уровня интеграла \mathcal{J}_3 при $\varkappa_1 \neq 0$ — параболоиды и при $\varkappa_1 = 0$ — цилиндры, оси которых проходят через точку $(0, \varkappa_2/\alpha, \varkappa_3)$ и параллельны первой оси ПСК. В силу соотношения (3.3) поверхность уровня интеграла \mathcal{J}'_3 — также параболоид при $\varkappa_2 \neq 0$ и цилиндр при $\varkappa_2 = 0$, оси которых проходят через точку $(\varkappa_1\alpha, 0, \varkappa_3)$ и параллельны второй оси ПСК.

Взаимное расположение этих поверхностей существенно зависит от параметров. Так, например, при $\varkappa_2 = 0$ совместный уровень интегралов \mathcal{J}_0 и \mathcal{J}'_3 определяет инвариантные плоскости

$$\mathcal{J}^\sigma = \sigma \alpha^{1/2} \omega_1 + \omega_3 - \varkappa + \sigma \varkappa_1 \alpha^{-1/2}, \quad \sigma = \pm 1. \quad (3.4)$$

В “случае Жуковского - Вольтерра” уравнения движения могут быть проинтегрированы следующим образом. Зафиксируем уровень интеграла (3.1) и введем новую переменную φ такую, что

$$\omega_1 = (2h)^{1/2} \cos \varphi, \quad \omega_2 = (2h)^{1/2} \sin \varphi. \quad (3.5)$$

Дифференцирование этих соотношений по времени дает

$$\dot{\omega}_1 = -(2h)^{1/2} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{\omega}_2 = (2h)^{1/2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (3.6)$$

Подстановка соотношений (3.5), (3.6) в первые два уравнения движения показывает, что

$$\dot{\varphi} = \varkappa - \omega_3. \quad (3.7)$$

Дифференцирование соотношения (3.7) по времени и подстановка результата, равно как и соотношений (3.5), в третье уравнение движения, позволяет представить это уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} = -2\alpha h \sin \varphi \cos \varphi + (2h)^{1/2} (\varkappa_2 \cos \varphi - \varkappa_1 \sin \varphi). \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) можно рассматривать как уравнение Лагранжа с одной степенью свободы, обладающее “интегралом энергии”

$$H = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \alpha h \cos^2 \varphi - (2h)^{1/2} (\varkappa_1 \cos \varphi + \varkappa_2 \sin \varphi) = j \quad (3.9)$$

и интегрируемое в явном виде. Соотношения (3.7), (3.5) позволяют восстановить зависимость исходных переменных от времени.

2°. “СЛУЧАЙ КЛЕВША”. Как известно, в классическом случае интегрируемости Клебша движение (в используемых обозначениях) описывается уравнениями (1, 2, 3)

$$(a_2 + a_3)\dot{\omega}_1 = (a_3 - a_2)\omega_2\omega_3 - \nu(a_3 - a_2)p_2p_3 \quad (3.10)$$

совместно с уравнениями (1.10). В рамках ограниченной постановки уравнения (3.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 - \nu p_2 p_3, \\ \dot{\omega}_2 &= -\omega_3\omega_1 + \nu p_3 p_1, \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha\omega_1\omega_2 - \alpha\nu p_1 p_2. \end{aligned}$$

При этом интеграл энергии имеет вид

$$\mathcal{J}_0 = [(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \nu p_3^2] / 2 = h,$$

а дополнительный интеграл можно представить в виде

$$\mathcal{J}_3 = [(\alpha\omega_2^2 + \omega_3^2) - \nu\alpha p_1^2] / 2 = [(-\alpha\omega_1^2 + \omega_3^2) - \nu\alpha p_2^2] / 2.$$

3°. “СЛУЧАЙ СТЕКЛОВА - ЛЯПУНОВА - РУБАНОВСКОГО”. При выполнении условий

$$\beta_1 = -\alpha\beta, \quad \beta_2 = \alpha\beta, \quad \varkappa = \varkappa_2 = 0,$$

$$\lambda = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 2\beta\varkappa_1, \quad \mu = 0, \quad \nu = 4\alpha\beta^2$$

уравнения (2.4) - (2.5), дополненные уравнениями Пуассона, допускают дополнительный интеграл

$$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{2} (\alpha\omega_2^2 + \omega_3^2) - \varkappa\omega_1 - 2\alpha\beta\omega_1 p_1 - 2\alpha\beta^2 p_1^2 - 2\beta\varkappa_1 p_1,$$

аналогичный интегралу Ляпунова - Стеклова [6,7] при выполнении условия $\varkappa_1 = 0$ и интегралу Рубановского [8] – в случае, когда это условие не выполнено.

Замечание. Прямой подстановкой выражений (2.1) в условия существования интегралов Ковалевской и Горячева – Чаплыгина можно убедиться в том, что эти условия не выдерживают выполняемого предельного перехода и соответствующие дополнительные интегралы не существуют. “Случай Лагранжа” требует дополнительного рассмотрения.

4°. “СЛУЧАЙ ГЕССА”. Как и в классической задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, для ограниченной постановки наблюдается нерасщепление сепаратрис и связанное с ним существование линейных частных интегралов. Как известно [10], в задаче о движении тела в жидкости существование частного интеграла типа интеграла Гесса связано с наличием ненулевых внедиагональных компонент матрицы C . Так как этот случай, точнее, то, что получается из него после надлежащего предельного перехода, в настоящей работе не рассматривается, то ограничимся тем, что укажем аналог случая Сретенского в задаче о движении тяжелого гиростата. Дополнительные частные интегралы имеют вид (3.4) и существуют при выполнении условий

$$\begin{aligned} \beta = \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \\ \lambda_1 = \zeta \lambda \alpha^{1/2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \mu = \nu = 0 \end{aligned}$$

соответственно.

4. Интегрирование уравнений движения. В случае $\alpha = 0$ метод интегрирования уравнений движения (2.4) – (2.5), (1.10) был предложен ранее [1] (см. также [3, с.239-242]). Этим же методом можно воспользоваться и в случае, когда это условие не выполнено. В настоящей работе ограничимся доказательством отщепления уравнений, описывающих изменение угла нутации.

Заметим, что интеграл площадей \mathcal{J}_1 и одно из уравнений Пуассона составляют систему двух алгебраических уравнений

$$\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 = P, \quad \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 = \dot{p}_3. \quad (4.1)$$

Здесь и далее

$$P = p_\psi - \beta (p^2 - p_3^2) - \varkappa p_3.$$

Система (4.1) линейна относительно (ω_1, ω_2) , и ее решение имеет вид

$$\omega_1 = \frac{Pp_1 - p_2\dot{p}_3}{p_1^2 + p_2^2}, \quad \omega_2 = \frac{Pp_2 + p_1\dot{p}_3}{p_1^2 + p_2^2}. \quad (4.2)$$

Подставляя выражения (4.2) в интеграл энергии \mathcal{J}_0 , имеем

$$\frac{1}{2} \left[\frac{P^2 + \dot{p}_3^2}{p_1^2 + p_2^2} - Cp^2 + \mu p_3^2 \right] - \lambda p_3 = h.$$

С помощью интеграла \mathcal{J}_ε это уравнение можно представить в виде

$$\dot{p}_3^2 = 2(p^2 - p_3^2) [2(h + \lambda p_3) + Cp^2 - \mu p_3^2] - P^2, \quad (4.3)$$

замкнутом относительно p_3 . Правая часть уравнения (4.3) – многочлен по p_3 , степень которого в общем случае равна четырем. Уравнение (4.3) интегрируется в эллиптических функциях. Если выполнено условие

$$\mu = \beta^2/2, \quad (4.4)$$

то степень многочлена понижается до трех, но уравнение (4.3) по-прежнему интегрируется в эллиптических функциях. Если, наконец, выполнено еще одно условие

$$\lambda = \varkappa\beta/2, \quad (4.5)$$

то степень многочлена понижается до двух, а уравнение (4.3) интегрируется в элементарных функциях.

В общем случае коэффициенты выражения в правой части уравнения (4.3) довольно громоздкие. В частном случае $\beta = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ это уравнение имеет вид

$$\dot{p}_3^2 = 2p^2(2h + Cp_\psi) - p_\psi^2 - 2(2h + Cp_\psi)p_3^2. \quad (4.6)$$

При этом

$$p_3 = A \cos [\omega(t + \alpha)], \quad \dot{p}_3 = -A\omega \sin [\omega(t + \alpha)], \quad (4.7)$$

$$\omega = \sqrt{2(2h + Cp_\psi)}, \quad A = \sqrt{p^2 - \frac{p_\psi^2}{2(2h + Cp_\psi)}}.$$

Величины ω и A играют роль частоты колебаний и их амплитуды соответственно.

Вектор \mathbf{p} постоянен в абсолютном пространстве. Тогда, если углы собственного вращения и нутации φ и θ введены так, что

$$p_1 = p \sin \theta \sin \varphi, \quad p_2 = p \sin \theta \cos \varphi, \quad p_3 = p \cos \theta,$$

то уравнение (4.3), описывающее изменение угла нутации, отделяется от остальных уравнений движения. Это означает, что изменение угла нутации не зависит от изменения двух других углов, описывающих положение системы.

Обратим внимание на то обстоятельство, что связанное с неинтегрируемостью хаотическое движение развивается по углу собственного вращения, в то время как динамика по углам прецессии и нутации остается регулярной. За этим стоит разделение движений по углу нутации, с одной стороны, и по углам собственного вращения и прецессии, с другой, присущее именно ограниченной постановке рассматриваемой задачи.

5. Стационарные движения в “случае Жуковского - Вольтерра”. Наличие дополнительных интегралов позволяет исследовать более детально вопрос о существовании и устойчивости стационарных движений рассматриваемых систем. Покажем это на примере “случая Жуковского - Вольтера”.

Согласно методу Рауса, установившиеся движения соответствуют критическим точкам функции $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \lambda \mathcal{J}_3$, которые

определяются из уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \omega_1} = \omega_1 - \lambda \varkappa_1 = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \omega_2} = (1 + \lambda \alpha) \omega_2 - \lambda \varkappa_2 = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \omega_3} = \lambda(\omega_3 - \varkappa) = 0. \quad (5.3)$$

В силу уравнения (5.3) либо $\lambda = 0$, либо $\omega_3 = \varkappa$. Эти два соотношения и уравнения (5.1), (5.2) определяют три класса решений:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \lambda = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \forall; \\ \text{II. } & \lambda \neq -\alpha^{-1}, \quad \omega_1 = \lambda \varkappa_1, \quad \omega_2 = \frac{\lambda \varkappa_2}{1 + \lambda \alpha}, \quad \omega_3 = \varkappa; \\ \text{III. } & \lambda = -\alpha^{-1}, \quad \omega_1 = -\alpha^{-1} \varkappa_1, \quad \omega_2 = \forall, \quad \omega_3 = \varkappa. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Движения первого типа представляют перманентные вращения тела вокруг третьей оси с произвольной угловой скоростью. На движениях второго типа тело также совершает перманентные вращения, причем для всех этих вращений проекция угловой скорости на третью ось одна и та же. Исключая в соотношениях (5.4) параметр λ из выражений для ω_1 и ω_2 , находим для движений этого типа связь между проекциями вектора угловой скорости на вторую и третью оси

$$\omega_1 \omega_2 \alpha = \omega_1 \varkappa_2 - \omega_2 \varkappa_1. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) определяет гиперболу, расположенную в плоскости $\omega_3 = \varkappa$ пространства $R^3(\omega)$. Наконец, движения третьего типа существуют лишь при выполнении условия $\varkappa_2 = 0$.

Для исследования устойчивости выпишем выражение для второй вариации функции \mathcal{J} , имеющей вид

$$2\delta^2 \mathcal{J} = \delta \omega_1^2 + (1 + \lambda \alpha) \delta \omega_2^2 + \lambda \delta \omega_3^2. \quad (5.6)$$

Перманентное вращение устойчиво, если ограничение второй вариации (5.6) на линейное многообразиие

$$\delta\mathcal{J}_3 = \{\delta\omega : -\varkappa_1\delta\omega_1 + (\alpha\omega_2 - \varkappa_2)\delta\omega_2 + (\omega_3 - \varkappa)\delta\omega_3\} = 0 \quad (5.7)$$

знакоопределенно.

Для движений первого типа линейное многообразиие и вторая вариация имеют вид

$$(\omega_3 - \varkappa)\delta\omega_3 = \varkappa_1\delta\omega_1 + \varkappa_2\delta\omega_2, \quad 2\delta^2\mathcal{J} = \delta\omega_1^2 + \delta\omega_2^2. \quad (5.8)$$

Если $\omega_3 \neq \varkappa$, то в силу первого соотношения (5.8) переменные $\delta\omega_1$ и $\delta\omega_2$ независимы, ограничение второй вариации на линейное многообразиие задается вторым соотношением (5.8) и вращения вокруг третьей оси устойчивы. Если же $\omega_3 = \varkappa$, то переменные $\delta\omega_1$ и $\delta\omega_2$ в силу первого соотношения (5.8) зависимы, ограничение второй вариации функции Рауса на линейное многообразиие оказывается постоянно положительным и сделать вывод об устойчивости такого вращения в рамках применяемого подхода невозможно.

Для движений второго типа линейное многообразиие представимо в виде

$$\varkappa_1\delta\omega_1 = (\alpha\omega_2 - \varkappa_2)\delta\omega_2$$

или в виде

$$\delta\omega_2 = -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}(1 + \lambda\alpha)\delta\omega_1.$$

Ограничение второй вариации (5.6) на это многообразиие записывается как

$$2\delta^2\mathcal{J} = \left[1 + (1 + \lambda\alpha)^3 \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_2^2}\right] \delta\omega_1^2 + \lambda\delta\omega_3^2. \quad (5.9)$$

Таким образом, вращение второго типа устойчиво, если

$$\lambda \left[1 + (1 + \lambda\alpha)^3 \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_2^2}\right] > 0, \quad (5.10)$$

и неустойчиво, если

$$\lambda \left[1 + (1 + \lambda\alpha)^3 \frac{\mathfrak{a}_1^2}{\mathfrak{a}_2^2} \right] < 0. \quad (5.11)$$

Иными словами, решения второго типа меняют свойство устойчивости при $\lambda^* = 0$ и при $\lambda^{**} = -\alpha^{-1} [1 + (\mathfrak{a}_2/\mathfrak{a}_1)^{2/3}]$.

Для движений третьего типа линейное многообразие и вторая вариация записываются как

$$\mathfrak{a}_1 \delta\omega_1 = \alpha \omega_2 \delta\omega_2, \quad (5.12)$$

$$2\delta^2 \mathcal{J} = \delta\omega_1^2 + \lambda \delta\omega_3^2. \quad (5.13)$$

При выполнении условия $\omega_2 \neq 0$ переменные $\delta\omega_1$ и $\delta\omega_3$ независимы и рассматриваемое движение неустойчиво, так как по предположению $\alpha > 0$, а $\lambda = -\alpha^{-1} < 0$. Если $\omega_2 = 0$, то в силу (5.12) выполнено равенство $\delta\omega_1 = 0$ и функция (5.13) не дает возможности сделать вывод об устойчивости движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Ведущих научных школ (НШ 6667.2006.1), Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00454-а, 06-01-90505-БНТСа), Университетских факультетов Божией Матери Мира (Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix), Намюр, Бельгия, а также Института механики Венского Технического Университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Неинтегрируемость общей задачи о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. II. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1986. No.1. С.39 – 44.
2. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета. 1995. 432 с.

3. *Burov, A.A. On duality, complementarity and "restrictness" in the rigid body dynamics // Prepublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1994. No.3. 12 P.*
4. *Буров А.А. Об ограниченных задачах в механике твердого тела // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ им. А.А.Дородницына РАН, 2002. С. 43 - 53.*
5. *Буров А.А. Об ограниченной постановке задачи о движении тяжелого твердого тела // ПММ, 2004. Т. 68. Вып.6. С.958 - 963.*
6. *Ляпунов А.М. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // Сообщения Харьковского математического общества. II серия. 1893. Т. IV. No. 1 и 2. С.81 - 85.*
7. *Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости // Харьков: Изд-во Харьк. Имп. ун-та, 1893. 234 с.*
8. *Рубановский В.Н. Новые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Вестник МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1968. No.2. С.99 - 106.*
9. *Ляпунов А.М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Сообщения Харьковского математического общества. II серия. 1888. Т. I. No. 1 и 2. С.7-60.*
10. *Чаплыгин С.А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости // Собр. соч. Т.1. М.-Л.:ГИТТЛ, 1948. С.194 - 311.*

ДИНАМИКА С ЛАГРАНЖЕВОЙ И ЭЙЛЕРОВОЙ
ТОЧЕК ЗРЕНИЯ. ПРОДОЛЖЕНИЕ:
НЕТРАНЗИТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ ГРУПП *

Д. П. Шеваллье

Введение. Описание динамики систем, конфигурационное пространство которых \mathbb{S} - главное однородное пространство, с точки зрения дифференциально - геометрических аспектов эйлеровой и лагранжевой механики было дано в публикации [1]. В ней шла речь о свободном, транзитивном и дифференцируемом действии группы Ли \mathbb{G} на пространстве \mathbb{S} . Вместе с тем, транзитивность действия группы представляет собой достаточно ограничительное условие, прежде всего с точки зрения практического применения в механике твердых тел или обобщенных твердых тел.

В настоящей статье рассматривается случай, когда действие группы свободно, дифференцируемо, но не транзитивно. Точнее, мы рассмотрим случай, когда конфигурационное пространство является главным расслоенным пространством группы Ли. Этим условием предполагается, что действие свободно, дифференцируемо и, более того, является собственным. Последнее условие предусматривает существование структуры многообразия в пространстве орбит, что проверяется на конкретных примерах. Область приложений при этом становится гораздо более широкой и включает в себя, например, все свободно движущиеся в пространстве деформируемые механические системы с конечным числом степеней свободы, а также более аккуратную картину динамики аффинно-деформируемых тел, чем

* Перевод с английского А.А.Бурова

представленная в [2–3] (см. также [4]). Однако техника дифференциальной геометрии при этом оказывается более сложной.

Уравнения Пуанкаре – Четаева для транзитивных действий были выписаны Н.Г.Четаевым [5] и В.В.Румянцевым [6] для нетранзитивных действий (см. также [7] относительно приложения связностей и групп голономий к системам, свободным в пространстве, и [8], где при рассмотрении механического примера были заложены основы развитой в настоящей работе теории).

Далее в разд. 1 в качестве геометрической основы вводятся главные расслоенные пространства (fiber bundles) со связностью, указывается их отношение к кинематике механических систем. В разделе 2 в неголономных переменных и при наличии связей из вариационного принципа типа принципа Гамильтона, выводятся уравнения динамики для консервативных и неконсервативных систем. Ограничения на вариации выводятся из анализа, основанного на картановской структуре для кривизны связности. В разд. 3 рассматриваются лагранжианы стандартного вида и выполняется анализ динамических уравнения Пуанкаре – Четаева с точки зрения дифференциальной геометрии и теории связности. Наконец, делаются некоторые замечания относительно математической формы этих уравнений и роли кривизны динамической связности для динамики свободных систем в пространстве. Выражения для динамической связности и ее кривизны даны в приложении.

Ключевые слова: лагранжева динамика, эйлерова динамика, нетранзитивное действие группы.

1. Конфигурационное пространство и кинематика системы. Пусть \mathbb{G} – группа Ли с единицей e , \mathfrak{g} – ее алгебра Ли, Ad и Ad^* – присоединенное и коприсоединенное представления \mathbb{G} в \mathfrak{g} и \mathfrak{g}^* (см. [1, разд. 2]). Предположим, что $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{G})$ – главный расслоенный пучок со структурой группы \mathbb{G} и проекцией $\pi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{X}$.

В отличие от обычного представления в теории главного расслоенного пространства (см. [10]) для лучшего согласования с основаниями механики предполагается, что \mathbb{G} свободно действует *слева* на \mathbb{S} . Главная связность, задаваемая формой связности ω на \mathbb{S} , определена на этом расслоенном пространстве.

С точки зрения механики интерпретация такова:

- \mathbb{S} – конфигурационное пространство системы, быть может, системы многих тел или деформируемого тела, \mathbb{G} – группа перемещений системы как “твёрдого целого”,
- \mathbb{X} – “пространство форм” системы; две конфигурации s_1 и s_2 соответствуют одной и той же форме $x \in \mathbb{X}$, если существует (единственным образом определенное) перемещение системы как твёрдого целого $g \in \mathbb{G}$, такое что $g.s_1 = s_2$ или, что эквивалентно, если $\pi(s_1) = \pi(s_2) = x$. Когда мы будем говорить о “замороженной системе”, мы будем понимать под этим то обстоятельство, что система осуществляет только твёрдотельные движения, так что конфигурация принадлежит слою из этого расслоения.
- ω определена в соответствии с некоторой кинематической или динамической величиной $\omega(\dot{s}) \in \mathfrak{g}$, зависящей от скорости системы (см., например, разд. 3).

С точки зрения дифференциальной геометрии $T\mathbb{S}$ и $T_s\mathbb{S}$ обозначают касательное расслоение \mathbb{S} и касательное векторное пространство к \mathbb{S} в s , $o(\mathbf{v})$ обозначает начало касательного вектора $\mathbf{v} \in T\mathbb{S}$ (тогда $o(\mathbf{v}) = s$, если $\mathbf{v} \in T_s\mathbb{S}$). Действие \mathbb{G} на \mathbb{S} – дифференцируемое отображение $\mathbb{G} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, обозначенное как $(g, s) \mapsto g.s$. Для практических вычислений мы будем использовать частные отображения $L_g: s \mapsto g.s$ из \mathbb{S} на \mathbb{S} для фиксированного $g \in \mathbb{G}$, а для фиксированного $s \in \mathbb{S}$ – орбитальное отображение $\sigma_s: g \mapsto g.s$ из \mathbb{G} в \mathbb{S} . В настоящем случае σ_s –

инъективное отображение, и его область отображения $\pi^{-1}(x)$, такова что $x = \pi(s)$, где s принадлежит расслоению (орбита s).

- С помощью касательного отображения L_g действие элемента g может быть поднято до отображения

$$L_g^T : \mathbf{v} \mapsto g \cdot \mathbf{v} = L_g^T(\mathbf{v})$$

из $T\mathbb{S}$ в себя (отображение $T_s\mathbb{S}$ на $T_{g \cdot s}\mathbb{S}$ с помощью линейного изоморфизма).

- Для $\mathbf{u} \in \mathfrak{g} = T_e\mathbb{G}$ положим $\mathbf{u} \cdot s = \sigma_s^T(\mathbf{u})$. Операция $\mathfrak{g} \times \mathbb{S} \rightarrow T\mathbb{S}$ - инфинитезимальное действие \mathbb{G} на \mathbb{S} . Часто употребляемое альтернативное определение таково:

$$\mathbf{u} \cdot s = \left[\frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{u}) \cdot s \right]_{t=0}.$$

Согласно нашим предположениям

1. Для любого $x \in \mathbb{X}$ существует открытая окрестность \mathcal{O} элемента x и диффеоморфизм $\Psi : \mathcal{O} \times \mathbb{G} \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O})$, такие что $\pi\Psi(x, g) = x$ и $L_h\Psi(x, g) = \Psi(x, hg)$ для $x \in \mathcal{O}$, $g, h \in \mathbb{G}$ (локальная тривиальность расслоения).
2. ω – \mathfrak{g} -значная дифференциальная 1-форма на \mathbb{S} , такая что (для левого действия)

$$\begin{cases} \omega(L_g^T(\mathbf{v})) = \text{Ad } g \cdot \omega(\mathbf{v}) \text{ для } \mathbf{v} \in T\mathbb{S}, g \in \mathbb{G}, \\ \omega(\sigma_s^T(\mathbf{u})) = \mathbf{u} \text{ для } \mathbf{u} \in \mathfrak{g}, s \in \mathbb{S}. \end{cases} \quad (1.1)$$

(в более компактных обозначениях : $\omega(g \cdot \mathbf{v}) = \text{Ad } g \cdot \omega(\mathbf{v})$ and $\omega(\mathbf{u} \cdot s) = \mathbf{u}$).

Напомним, что касательный вектор $\mathbf{v} \in T\mathbb{S}$ называется вертикальным, если $\pi^T(\mathbf{v}) = 0$; вертикальные касательные векторы в точке s – это векторы вида $\mathbf{u} \cdot s$ с $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$. По отношению к

связности вектор \mathbf{v} горизонтален, если $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) = 0$. Тогда любой вектор $\mathbf{v} \in T\mathbb{S}$ может быть разложен на единственным образом определенные вертикальную и горизонтальную компоненты:

$$\text{vert}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \cdot s, \quad \text{hor}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \cdot s.$$

$$\text{vert}(L_g^T(\mathbf{v})) = L_g^T(\text{vert}(\mathbf{v})), \quad \text{hor}(L_g^T(\mathbf{v})) = L_g^T(\text{hor}(\mathbf{v})) \quad \text{для } g \in \mathbb{G}.$$

Если даны $x \in \mathbb{X}$ и $s \in \mathbb{S}$, такие что $\pi(s) = x$, то для каждого касательного вектора w из \mathbb{X} в x существует единственный касательный вектор $\mathbf{w} = \text{Lift}(s, w)$ из \mathbb{S} – *горизонтальное поднятие w в s* – такой что

$$\mathbf{w} \text{ горизонтален и } o(\mathbf{w}) = s, \quad \pi^T(\mathbf{w}) = w.$$

Отображение поднятия $: \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \rightarrow T\mathbb{S}$, ассоциированное с главной связностью в главном расслоенном пространстве, дифференцируемо и эквивариантно: $\text{Lift}(g.s, w) = L_g^T(\text{Lift}(s, w))$.

В группе \mathbb{G} мы также обозначим L_h и R_h левые и правые трансляции h :

$$L_h(g) = hg, \quad R_h(g) = gh.$$

Как и на каждой группе Ли \mathbb{G} , левая и правая формы Маурера – Картана – \mathfrak{g} -значные дифференциальные формы ϑ_r и ϑ_ℓ – определены как

$$\vartheta_r(\mathbf{x}) = R_{g^{-1}}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.g^{-1}, \quad \vartheta_\ell(\mathbf{x}) = L_{g^{-1}}^T(\mathbf{x}) = g^{-1}.\mathbf{x} \quad \text{если } \mathbf{x} \in T_g\mathbb{G}.$$

Формы ϑ_r и ϑ_ℓ инвариантны относительно правых и левых трансляций соответственно и $\vartheta_r(L_g^T(\mathbf{x})) = \text{Ad } g.\vartheta_r(\mathbf{x})$, $\vartheta_\ell(R_g^T(\mathbf{x})) = \text{Ad } g^{-1}.\vartheta_\ell(\mathbf{x})$ для $g \in \mathbb{G}$, $\mathbf{x} \in T\mathbb{G}$. (Об иных свойствах ϑ_r и ϑ_ℓ см. [1, разд. 2].)

Что касается \mathbb{S} и формы связности $\boldsymbol{\omega}$, то в дальнейшем мы будем использовать следующие свойства действия и инфинитезимального действия группы \mathbb{G} на \mathbb{S} : для \mathbf{x} в $T_g\mathbb{G}$ и s в \mathbb{S} :

$$\sigma_s^T(\mathbf{x}) = \vartheta_r(\mathbf{x}) \cdot (g.s), \quad \boldsymbol{\omega}(\sigma_s^T(\mathbf{x})) = \vartheta_r(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Для доказательства (1.2) достаточно рассмотреть отображение $h \mapsto h \cdot s = R_{g^{-1}}(h) \cdot (g \cdot s)$ из \mathbb{G} в \mathbb{S} , вычислить касательное отображение по отношению к h на $\mathbf{x} \in T_g \mathbb{G}$ и воспользоваться (1.1).

Пример 1. Пусть $(\mathbb{S}; \mathbb{G})$ – главное однородное пространство (группа Ли \mathbb{G} действует на \mathbb{S} транзитивно и свободно, а \mathbb{S} обладает хорошо определенной структурой аналитического многообразия, см. [1]). Пусть \mathbb{D} – замкнутая подгруппа Ли группы \mathbb{G} , такая что посредством ограничения действия \mathbb{G} подгруппа \mathbb{D} должным образом свободно действует на \mathbb{S} . Тогда пространство орбит $\mathbb{X} = \mathbb{S}/\mathbb{D}$ обладает однозначно определенной структурой многообразия такой что $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{D})$ – главное расслоенное пространство.

Конкретный механический пример доставляется пространством конфигураций аффинно-деформируемого тела – группой аффинных преобразований для \mathbb{G} и Евклидовой группой перемещений для \mathbb{D} .

1.1. ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ И ИХ РАЗДЕЛЕНИЯ. Кинематически допустимое движение системы (наблюдаемое относительно некоторой системы отсчета) будет описано с помощью дифференцируемого (в динамике – по крайней мере дважды) отображения $t \mapsto s(t)$. Когда связность определена на расслоении, скорость $\dot{s}(t) = \frac{d}{dt} s(t)$ может быть разделена на две части, зависящие от выбора связности (точка над переменной означает производную по времени):

$$\dot{s} = \mathbf{V} \cdot s + \mathbf{w}, \text{ где } \begin{cases} \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s}) & \text{ (“вертикальная скорость”),} \\ \mathbf{w} = \text{hor}(\dot{s}) & \text{ (“скорость деформации”} \\ & \text{или “быстрота деформации”).} \end{cases}$$

В собственном смысле под вертикальной скоростью следовало бы понимать, скорее, касательный вектор $\mathbf{V} \cdot s$ к \mathbb{S} , нежели чем $\mathbf{V} \in \mathfrak{g}$, ассоциированный с “кручением” или “винтом”

в движении как твердого целого (движение “замороженной” системы). Если мы рассмотрим проекцию $x(t) = \pi(s(t))$ движения на базу, то также получится

$$\dot{x} = \pi^T(\dot{s}), \quad \mathbf{w} = \text{Lift}(s, \dot{x}).$$

Движение само по себе может быть разделено на две части как

$$t \mapsto s(t) = A(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(t)$$

с движением как твердого целого $t \mapsto A(t) \in \mathbb{G}$ и горизонтальной кривой $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t) \in \mathbb{S}$ (более точно $\boldsymbol{\omega}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)) = 0$ для всех моментов t). На самом деле отображение $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t)$ может быть произвольным горизонтальным поднятием проекции $t \mapsto x(t)$ на пространство базы, и такие поднятия всегда существуют (см. детали в [гл. II, разд. 3, 10]). Теперь

$$\dot{s} = \dot{A}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) + A(t) \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\omega}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)) = 0,$$

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s}) = \vartheta_r(\dot{A}), \quad \mathbf{w} = A \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}.$$

(так как $\boldsymbol{\omega}(A \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \text{Ad } A \cdot \boldsymbol{\omega}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(\dot{s}) = \boldsymbol{\omega}(\dot{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \vartheta_r(\dot{A})$ в силу соотношения (1.2)).

1.2. ОПИСАНИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С ПОМОЩЬЮ СЕЧЕНИЙ РАССЛОЕНИЯ. Такое описание – не более чем перенос локальной структуры, предусмотренной в определении главного fiber расслоения. Пусть \mathcal{Q} – многообразие, и Φ – диффеоморфизм из \mathcal{Q} в открытое подмножество \mathcal{O} множества \mathbb{X} . Пусть $\Gamma: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{S}$ – поднятие отображения Φ (Γ – дифференцируемое отображение и $\pi \circ \Gamma(q) = \Phi(q)$ для $q \in \mathcal{Q}$). Тогда отображение

$$\varphi: (q, g) \mapsto g \cdot \Gamma(q)$$

– диффеоморфизм из $\mathcal{Q} \times \mathbb{G}$ в $\pi^{-1}(\mathcal{O})$, и всякое положение s , такое что $\pi(s) \in \mathcal{O}$, может быть описано соответствующей парой (q, g) . В собственном смысле, это не что иное, как отображение $x \rightarrow \Gamma(\Phi^{-1}(x))$, которое представляет собой локальное сечение расслоения над открытым множеством \mathcal{O} из базы. В общем

расслоенном пространстве может случиться, что глобальное сечение (определенное на \mathbb{X}), не существует с необходимостью $\mathcal{O} \neq \mathbb{X}$. Однако в важных частных случаях, например в случае систем многих тел, стесненных регулярными связями или в случае аффинно-деформируемого тела, существует глобальное сечение $x \in \mathbb{X} \mapsto \mathbf{r}(x) \in \mathbb{S}$ и глобальное представление положения в виде $s = g.\mathbf{r}(x)$. В общем случае горизонтальное сечение, т.е сечение, такое что $\boldsymbol{\omega}_r = 0$, может не существовать. Переменная $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s})$ “неголономна” (неинтегрируема даже локально).

Смысл этого представления состоит в том, что конфигурация s системы определена:

- формой $x = \pi(s)$, которая определена, в свою очередь, параметром q , таким что $\Phi(q) = x$,
- типичным исходным положением системы $\mathbf{r}(q)$, в котором реализована такая форма,
- единственным перемещением g , таким что $s = g.\mathbf{r}(q)$.

В рамках данного рассмотрения всякое кинематически допустимое движение $t \mapsto s(t)$, такое что $\pi(s(t)) \in \mathcal{O}$ для всех t из некоторого интервала, может быть описано двумя функциями $t \mapsto q(t) \in \mathbb{X}$ и $t \mapsto g(t) \in \mathbb{G}$, такими что

$$s(t) = g(t).\mathbf{r}(q(t)). \quad (1.3)$$

Полное движение образовано движением $t \mapsto \mathbf{r}(q(t))$, полностью определенным историей формы $\pi(s(t)) = x(t) = \Phi(q(t))$ системы и зависящим от времени “твердым” перемещением $t \mapsto g(t)$. Вычисление скоростей перемещения и деформации в соответствии с (1.3) таково:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{s} &= \sigma_{\mathbf{r}(q)}^T(\dot{g}) + L_g^T(\mathbf{r}^T(\dot{q})) = \sigma_s^T(\vartheta_r(\dot{g})) + L_g^T(\mathbf{r}^T(\dot{q})), \\ \mathbf{V} &= \vartheta_r(\dot{g}) + \text{Ad } g.\boldsymbol{\omega}_r(\dot{q}), \quad \mathbf{w} = \text{hor}(L_g^T(\mathbf{r}^T(\dot{q}))) = L_g^T(\text{hor}(\mathbf{r}^T(\dot{q}))), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\omega_r = r^*\omega = \omega \circ r^T$ - обратный образ формы ω в r (\mathfrak{g} -значной 1-формы, определенной на \mathcal{Q}).

Уместно рассмотреть некоторые относящиеся к механике частные случаи.

Пример 2. \mathcal{Q} - открытое подмножество пространства \mathbb{R}^d , а Φ - локальная карта многообразия \mathbb{X} . Тогда $q = (q_1, \dots, q_d)$ - некоторая система лагранжевых координат, описывающая форму системы. Например, q_1, \dots, q_d могут быть координатами, задающими артикуляцию системы.

Пример 3. $\mathcal{Q} = \mathcal{O}$ - открытое подмножество \mathbb{X} , $\Phi = \text{тождество}$ на \mathcal{O} и $r: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{S}$ - локальное сечение расслоения. Тогда $s(t) = g(t).r(x(t))$, $x(t) = \pi(s(t))$.

Пример 4. Пусть \mathbb{B} - совокупность тел, принадлежащих системе; множество \mathbb{B} конечно. Конфигурационное пространство тела $a \in \mathbb{B}$ - главное однородное пространство \mathbb{S}_a группы \mathbb{G} , а конфигурации целой системы - точки многообразия $\mathbb{P} = \prod_{a \in \mathbb{B}} \mathbb{S}_a$. Существует естественное свободное действие слева группы \mathbb{G} на \mathbb{P} , такое что $g.(s_a)_{a \in \mathbb{B}} = (g.s_a)_{a \in \mathbb{B}}$. Это действие дифференцируемо. Если система стеснена *внутренними* связями, то в большинстве случаев ее конфигурационное пространство \mathbb{S} удовлетворяет условию

(S_1): \mathbb{S} - *подмногообразие* в \mathbb{P} ,

(S_2): \mathbb{S} *инвариантно* под действием группы \mathbb{G} на \mathbb{P} .

Тогда действие группы \mathbb{G} на \mathbb{S} , индуцированное действием на \mathbb{P} , дифференцируемо. Условие (S_1) исключает особенности, но его выполнение не предполагается обязательным (имеются патологические примеры из теории замкнутых механизмов), а (S_2) характеризует внутренние геометрические связи.

Следующая ситуация хорошо знакома в механике: рассмотрим дифференцируемые функции $f_i: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, такие что $f_i(g.s) = f_i(s)$, $s = (s_a)_{a \in \mathbb{B}}$ (соотношение $f_i(s) = 0$ представляет собой внутреннюю связь, наложенную на систему). Если

отображение $f = (f_1, \dots, f_k): \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^k$ – субмерсия, то множество $\mathbb{S} = f^{-1}(0)$ кинематически допустимых конфигураций для всех связей удовлетворяет свойствам (S_1) и (S_2) .

Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{S}/\mathbb{G}$ и $\pi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{X}$ – соответственно множество орбит группы \mathbb{G} в \mathbb{S} и естественная проекция. Для фиксированного $b \in \mathbb{B}$ и фиксированного $r_b \in \mathbb{S}_b$ множество $\mathcal{F}(b, r_b) = \{s = (s_a) \mid s \in \mathbb{S}, s_b = r_b\}$ – подмногообразие в \mathbb{S} (и в \mathbb{P}). Каждая орбита x группы \mathbb{G} в \mathbb{S} пересекает $\mathcal{F}(b, r_b)$ в единственной точке σ , и определенное таким образом отображение $\mathbb{X} \rightarrow \mathcal{F}(b, r_b)$ – биекция. Тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathcal{F}(b, r_b) \times \mathbb{G} \quad s \mapsto (\sigma, g) \text{ такой что } s_b = g.r_b \text{ и } \sigma = g^{-1}.s, \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathcal{F}(b, r_b) \quad x \mapsto \sigma \text{ такой что } \sigma \in x \cap \mathcal{F}(b, r_b). \end{array} \quad (1.5)$$

Вертикальные стрелки определяют естественные проекции, горизонтальные стрелки – биекции. Биекция сверху – диффеоморфизм, если \mathbb{S} и $\mathcal{F}(b, r_b)$ оснащены естественной структурой многообразия. Можно доказать, что: *существуют структура многообразия на \mathbb{X} и структура главного расслоенного пучка на $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{G})$, такие что для любого выбора $b \in \mathbb{B}$ и $r_b \in \mathbb{S}_b$, биекция снизу в (1.5) – диффеоморфизм, и левый и правый главные расслоенные пучки изоморфны, (в частности, правые пучки – тривиализуемы).*

1.3. ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ И КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ НА СВЯЗНОСТИ. Предположим, что \mathbb{G} – группа Ли, действующая слева на дифференцируемом многообразии \mathbb{S} . Рассмотрим дифференцируемую функцию $f: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{E}$, где \mathbb{E} – вещественное векторное пространство. Производная Ли $\mathcal{L}f$ функции f в s (для действия группы \mathbb{G} на \mathbb{S}) – отображение из \mathbb{S} в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbb{E})$, описывающее производную функции f вдоль орбит

действия группы и определяемое всеми как

$$\mathcal{L}f(s)(\mathbf{u}) = \left[\frac{d}{d\tau} f(\exp(\tau\mathbf{u}) \cdot s) \right]_{\tau=0} \quad \text{для } \mathbf{u} \in \mathfrak{g}.$$

Так как $\mathfrak{g} = T_e\mathbb{G}$, то также выражение $\mathcal{L}f(s)(\mathbf{u}) = df(\mathbf{u} \cdot s)$ равно значению на \mathbf{u} дифференциала в точке e отображения $g \mapsto f(g \cdot s)$.

Если \mathbb{S} – пространство главного расслоенного пучка со структурной группой \mathbb{G} , то производная Ли отображения f описывает его производную вдоль слоев пучка. Если на пучке определена связность, то мы можем также определить *ковариантный дифференциал* $\nabla f: T\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{E}$, описывающий дифференциал вдоль горизонтальных подпространств с помощью соотношений

$$\nabla f(v) = df(\text{hor}(v)) \quad \text{для } v \in T\mathbb{S}. \quad (1.6)$$

Если точка s фиксирована, то оператор ∇f индуцирует линейное отображение из $T_s\mathbb{S}$ в \mathbb{E} . Так как $\text{vert}(v) = \omega(v) \cdot s$, то

$$df(v) = \mathcal{L}f(s)(\omega(v)) + \nabla f(v) \quad \text{для } v \in T_s\mathbb{S}. \quad (1.7)$$

Пусть теперь \mathcal{M} – многообразие, и $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}$ – дифференцируемое отображение. Определим $\nabla_x f \circ \varphi$ как линейную форму на $T_x\mathcal{M}$, такую что

$$\nabla_x(f \circ \varphi)(v) = \nabla f(\varphi^T(v)) = df(\text{hor}(\varphi^T(v))) \quad \text{для } v \in T_x\mathcal{M}.$$

Более того, из соотношения (1.7) имеем

$$d(f \circ \varphi)(v) = \mathcal{L}f(\varphi(x))(\varphi^*\omega(v)) + \nabla_x f \circ \varphi(v)$$

($\varphi^*\omega = \omega \circ \varphi^T$, а \mathfrak{g} -значная 1-форма на \mathcal{M} обозначает обратное образ формы связности ω).

Заметим, что в силу теоремы о дифференцировании сложной функции для ковариантных дифференциалов имеет место

высказывание: если \mathcal{N} – другое многообразие и если $\psi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ – дифференцируемое отображение, то, как следует немедленно, $\nabla_y f(w) = \nabla_x f(\psi^T(w))$ для $w \in T_y \mathcal{N}$.

Если рассмотреть произведение многообразий $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ и дифференцируемое отображение $\varphi: (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ из $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ в \mathbb{S} , то можно определить частичный ковариантный дифференциал с помощью соотношений для $v \in T_x \mathcal{M}$, $w \in T_y \mathcal{N}$:

$$\nabla_x(f \circ \varphi)(v) = df(\text{hor } \partial_x \varphi(v)), \quad \nabla_y(f \circ \varphi)(w) = df(\text{hor } \partial_y \varphi(w)).$$

Пример 5. К ковариантному дифференциалу имеется специальный интерес, когда само пространство \mathbb{E} подвержено действию слева группы \mathbb{G} и отображение f эквивариантно. Тогда можно легко вычислить производную Ли. В дальнейшем мы рассмотрим для пространства \mathbb{E} векторное пространство $\mathcal{L}_2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ билинейных форм на \mathfrak{g} и векторное пространство $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$, где \mathfrak{g} – алгебра Ли группы \mathbb{G} . Левые действия элементов $g \in \mathbb{G}$ на $B \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ и $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ определены соотношениями

$$(g.B)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\text{Ad } g^{-1}.\mathbf{x}, \text{Ad } g^{-1}.\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g},$$

$$g.F = \text{Ad}^* g \circ F \circ \text{Ad } g^{-1}.$$

Оба примера тесно связаны между собой, потому что имеется эквивариантный линейный изоморфизм $B \mapsto F$ из $\mathcal{L}_2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ на $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$, такой что $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle F(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$. Всякое эквивариантное дифференцируемое отображение $s \mapsto \mathbf{J}(s)$ из \mathbb{S} в $\mathcal{L}_2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ связано с эквивариантным дифференцируемым отображением $s \mapsto \mathbf{I}(s)$ из \mathbb{S} в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$, таким что

$$\mathbf{J}(s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{I}(s)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \quad \text{для } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}.$$

Эквивариантность означает, что

$$\mathbf{J}(g.s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{J}(s)(\text{Ad } g^{-1}.\mathbf{x}, \text{Ad } g^{-1}.\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{I}(g.s) = \text{Ad}^* g \circ \mathbf{I}(s) \circ \text{Ad } g^{-1}.$$

Легко вывести выражения для производной Ли и ковариантного дифференциала. Если $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$ и $\mathbf{v} \in T_s\mathbb{S}$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathbf{J}(s)(\mathbf{u})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\mathbf{J}(s)([\mathbf{u}, \mathbf{x}], \mathbf{y}) - \mathbf{J}(s)(\mathbf{x}, [\mathbf{u}, \mathbf{y}]), \\ \mathcal{L}\mathbf{I}(s)(\mathbf{u}) &= \text{ad}^*\mathbf{u} \circ \mathbf{I}(s) - \mathbf{I}(s) \circ \text{ad} \mathbf{u}, \\ \nabla\mathbf{J}(\mathbf{v})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= d\mathbf{J}(\mathbf{v})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{J}(s)([\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \mathbf{x}], \mathbf{y}) + \mathbf{J}(s)(\mathbf{x}, [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \mathbf{y}]), \\ \nabla\mathbf{I}(\mathbf{v}) &= d\mathbf{I}(\mathbf{v}) + \mathbf{I}(s) \circ \text{ad} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) - \text{ad}^*\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \circ \mathbf{I}(s),\end{aligned}$$

Здесь $\text{ad}^*\mathbf{u} = -{}^t\text{ad} \mathbf{u}$ – коприсоединенное действие алгебры \mathfrak{g} , такое что $\langle \text{ad}^*\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{z}, \text{ad} \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$ для $(\mathbf{z} \in \mathfrak{g}^*, \mathbf{x} \in \mathfrak{g})$. В частности, если тензор $\mathbf{J}(s)$ симметричен, то имеем соответствующую квадратичную форму в виде

$$d\mathbf{J}(\mathbf{v})(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \nabla\mathbf{J}(\mathbf{v})(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\mathbf{J}(s)([\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \mathbf{x}], \mathbf{x}). \quad (1.8)$$

Этот пример будет полезен в дальнейшем для описания глобального ковариантного и смешанного тензоров инерции в механике деформируемых систем. Формула (1.8) выражает дифференциал их кинетической энергии по отношению к конфигурации $s \in \mathbb{S}$, как вклад в движение тела как твердого целого (“замороженной” системы, вертикальной части движения) плюс вклад чистых деформаций (горизонтальной части движения в смысле связности).

Пример 6. *Правый и левый дифференциалы функций, определенных на группе Ли \mathbb{G} . Правый дифференциал дифференцируемой функции $f: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{E}$ – это производная Ли $\mathcal{L}f$ функции для действия группы \mathbb{G} на себе левыми сдвигами, которые могут быть определены с помощью эквивалентных свойств:*

$$\partial^r f(g)(\mathbf{u}) = df(R_g^T(\mathbf{u})) \quad \text{для } g \in \mathbb{G}, \mathbf{u} \in \mathfrak{g},$$

$$f^T(\mathbf{v}) = \partial^r f(g)(\vartheta_r(\mathbf{v})) \quad \text{для } \mathbf{v} \in T_g\mathbb{G}.$$

Определение *левого* дифференциала $\partial^\ell f(g)$ аналогично и отвечает действию группы \mathbb{G} на себя левыми сдвигами.

$$f^T(\mathbf{v}) = \partial^\ell f(g)(\vartheta_\ell(\mathbf{v})) \mathbf{v} \in T_g\mathbb{G}.$$

Эти дифференциалы связаны как $\partial^r f(g) = \partial^\ell f(g) \circ \text{Ad } g^{-1}$.

Пример 7. Локальное выражение оператора ∇f с помощью локального диффеоморфизма $\varphi : (q, g) \mapsto g \cdot \mathfrak{r}(q)$. Будем оставаться в рамках разд. 1. Для $w \in T_q \mathcal{Q}$, $\mathbf{x} \in T_g \mathbb{G}$

$$\partial_q \varphi(q, g)(w) = L_g^T(\mathfrak{r}^T(w)), \quad \partial_g \varphi(q, g)(\mathbf{x}) = \sigma_{\mathfrak{r}(q)}^T(\mathbf{x}) = \sigma_s^T(\vartheta_r(\mathbf{x})),$$

такого что

$$\text{hor } \partial_q \varphi(q, g)(w) = L_g^T(\text{hor } \mathfrak{r}^T(w)) = L_g^T(\mathfrak{r}^T(w)) - \sigma_s^T(\text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(w)).$$

Любой касательный вектор $\mathbf{v} \in T_s \mathbb{S}$ с $s = \varphi(q, g)$ может быть единственным образом представлен как образ касательного вектора $(w, \mathbf{x}) \in T_{(q, g)}(\mathcal{Q} \times \mathbb{G}) \simeq T_q \mathcal{Q} \times T_g \mathbb{G}$ в виде

$$\mathbf{v} = \varphi^T(w, \mathbf{x}) = \sigma_{\mathfrak{r}(q)}^T(\mathbf{x}) + L_g^T \mathfrak{r}^T(w) = \sigma_s^T(\vartheta_r(\mathbf{x})) + L_g^T \mathfrak{r}^T(w).$$

Тогда, так как $\boldsymbol{\omega}(L_g^T \mathfrak{r}^T(w)) = \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathfrak{r}^T(w)) = \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(w)$ и $\sigma_s^T(\vartheta_r(\mathbf{x}))$ вертикален

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) &= \vartheta_r(\mathbf{x}) + \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(w), \\ \text{hor}(\mathbf{v}) &= \text{hor}(L_g^T \mathfrak{r}^T(w)) = L_g^T \mathfrak{r}^T(w) - \sigma_s^T(\text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(w)). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{E}$ – дифференцируемое отображение и $f_1 = f \circ \varphi : \mathcal{Q} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{E}$, то вычисление дифференциала и применение теоремы о сложной функции дают

$$df(\mathbf{v}) = df(\sigma_{\mathfrak{r}(q)}^T(\mathbf{x}) + L_g^T \mathfrak{r}^T(w)) = \partial_q f_1(q, g)(w) + \partial_g^r f_1(q, g)(\vartheta_r(\mathbf{x}))$$

где $\partial_g^r f_1(q, g)$ обозначает правую частную производную по отношению к g . Более того,

$$\nabla f(\mathbf{v}) = df(\text{hor}(\mathbf{v})) = df(L_g^T \mathfrak{r}^T(w) - \sigma_s^T(\text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(w))).$$

Тогда заключаем, что

$$\nabla f(\mathbf{v}) = \partial_q f_1(q, g)(w) - \partial_g^r f_1(q, g)(\text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(w)). \quad (1.10)$$

Фактически вариация элемента g ведет к вертикальным векторам, что позволяет рассматривать частное отображение $q \rightarrow g \cdot r(q) \rightarrow f(g \cdot r(q))$ для фиксированного элемента g или рассматривать отображение f_1 , что дает тот же самый результат.

$$\nabla_q f(w) = \nabla_{(q,g)} f(w, v) = \partial_q f_1(q, g)(w) - \partial_g^r f_1(q, g) (\text{Ad } g \cdot \omega_r(w)).$$

2. Задача вариационного исчисления и уравнения Эйлера. Пусть I – интервал из \mathbb{R} и $\mathcal{L}: I \times T\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция (лагранжиан) и $\mathcal{M} = \mathcal{C}^k(I, \mathbb{S})$, где $k \geq 2$ – пространство всех отображений класса \mathcal{C}^k из интервала I в пространство \mathbb{S} (\mathcal{M} – пространство кинематически допустимых движений). Для моментов времени t_0 и $t_1 \in I$ ($t_0 < t_1$), действие из t_0 в t_1 – это отображение $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное как

$$\mathcal{S}_{t_0}^{t_1}(s) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \dot{s}(t)) dt, \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt}.$$

В консервативном случае постановка задачи вариационного исчисления такова: “Найти критическую точку $s \in \mathcal{M}$ функционала $\mathcal{S}_{t_0}^{t_1}$ для всех возможных выборов моментов времени t_0 и $t_1 \in I$.”

Чтобы сформулировать это утверждение более аккуратно, уточним, что мы имеем в виде под вариацией движения. Рассмотрим данное кинематически допустимое движение, исходное движение, определенное как отображение класса \mathcal{C}^k ($k \geq 1$ и ≥ 2 в динамике), $t \in I \mapsto s(t) \in \mathbb{S}$, где I – интервал из \mathbb{R} . Конечная вариация класса \mathcal{C}^k с фиксированными пределами для этого движения на интервале $[t_0, t_1] \subset I$ – это семейство кинематически допустимых движений $t \in [t_0, t_1] \mapsto s_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

таких что

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0(t) = s(t) \text{ для всех } t \in [t_0, t_1], \\ s_\varepsilon(t_0) = s(t_0) \text{ и } s_\varepsilon(t_1) = s(t_1) \text{ для всех } \varepsilon \in \mathbb{R}, \\ \text{отображение } (t, \varepsilon) (\in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}) \mapsto s_\varepsilon(t) \\ \text{принадлежит классу } \mathcal{C}^k \end{array} \right. \quad (2.1)$$

(Заметим, что для предлагаемых ниже рассуждений было бы эквивалентно определить конечные вариации для ε в окрестности нуля в \mathbb{R} , например, когда $-1 < \varepsilon < +1$, а не для всех ε из \mathbb{R} .)

Для вариаций со свойствами (2.1) определим соответствующую вариацию действия

$$\mathcal{S}_{t_0}^{t_1}(s, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \dot{s}_\varepsilon(t)) dt,$$

Скажем, что отображение $t \mapsto s(t)$ – критическое, если для всех t_0 и t_1 и для всех вариаций выполнено равенство

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{S}_{t_0}^{t_1}(s, \varepsilon) \right)_{\varepsilon=0} = 0.$$

В двух следующих подразделах мы дадим аккуратные формулировки задачи вариационного исчисления и найдем соответствующие уравнения Эйлера в консервативном и неконсервативном случаях.

2.1. ВАРИАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

Спроектируем вариацию в пространство базы расслоенного пучка и положим $\pi(s_\varepsilon(t)) = x_\varepsilon(t)$. Тогда мы получим подобную вариацию на $[t_0, t_1]$ для проекции $t \mapsto x(t)$ исходного движения. Для конечных вариаций можно вывести инфинитезимальные вариации, определенные для t из отрезка $[t_0, t_1]$ и соответствующие виртуальным вариациям или виртуальным параметрам, применяемым в механике. Когда это будет удобно мы станем писать $s(t, \varepsilon) = s_\varepsilon(t)$ и $x_\varepsilon(t) = x(t, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \delta s(t) &= \left[\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} \in TS, \\ \delta x(t) &= \left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} = \pi^T(\delta s(t)) \in TX. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Инфинитезимальные вариации могут быть расщеплены на вертикальные и горизонтальные компоненты относительно связности. Положим

$$\delta G(t) = \omega(\delta s(t)), \quad \delta \mathbf{w}(t) = \text{hor}(\delta s(t)) \quad (\equiv \text{Lift}(s(t), \delta x(t))). \tag{2.3}$$

Величина $\delta G(t) \in \mathfrak{g}$ соответствует вертикальной компоненте $\text{vert}(\delta s(t))$ инфинитезимальной вариации, и причина для выбора таких обозначений станет ясна ниже. (см. формулу (2.10)). Мы также можем определить вертикальную скорость вдоль варьируемого движения и ее инфинитезимальную вариацию как

$$\mathbf{V}_\varepsilon(t) = \omega\left(\frac{\partial s}{\partial t}(t, \varepsilon)\right), \quad \delta \mathbf{V}(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \right]_{\varepsilon=0} \in \mathfrak{g}. \tag{2.4}$$

2.2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ КОНЕЧНЫХ И ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ.

Рассмотрим свойства декомпозиции конечных и инфинитезимальных вариаций.

2.2.1. ЕСТЕСТВЕННАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ И СВЯЗИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ.

Осуществим каноническую декомпозицию в соответствии с геометрической структурой, определенной

связностью, опираясь на понятие горизонтального поднятия кривой, лежащей в пространстве базы. В рамках предположения (2.1) определим отображение $\sigma: [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ как горизонтальное поднятие $\varepsilon \mapsto x(t, \varepsilon) = \pi(s(t, \varepsilon))$, начинающееся на траектории, другими словами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для всех } t \in [t_0, t_1]: \varepsilon \mapsto \sigma(t, \varepsilon) \text{ — горизонтальная} \\ \text{кривая, такая что } \sigma(t, 0) = s(t), \\ \text{для всех } \varepsilon \in \mathbb{R}: \pi(\sigma(t, \varepsilon)) = x(t, \varepsilon). \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Так как по определению точки $\sigma(t, \varepsilon)$ и $s(t, \varepsilon)$ пространства \mathbb{S} расположены на одном и том же слое, то существует отображение $\mathcal{C}^k: G: [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}$, такое что

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t, \varepsilon) = G(t, \varepsilon) \cdot \sigma(t, \varepsilon), \\ G(t, 0) = e \text{ для всех } t \in [t_0, t_1]. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Примечательно, что декомпозиция конечной вариации, согласно соотношениям (2.5) и (2.6), единственна. (Можно доказать, что отображение σ существует на самом деле и принадлежит классу \mathcal{C}^k . В настоящем случае необходимо доказать существование и единственность решения $G(t, \varepsilon)$ уравнения (2.9), выписанного ниже. Принимая во внимание переменную t , мы должны доказать, что полученное таким образом решение — отображение класса \mathcal{C}^k , по отношению к переменным t и ε . Доказательство существования горизонтального поднятия $\varepsilon \mapsto x(t, \varepsilon)$ для фиксированного значения параметра t и того факта, что отображение принадлежит классу \mathcal{C}^k можно найти в [10, гл. II, разд. 3 и 4.) Вычисляя производные в соотношении (2.6), имеем

$$\frac{\partial s}{\partial t}(t, \varepsilon) = \frac{\partial G}{\partial t}(t, \varepsilon) \cdot \sigma(t, \varepsilon) + G(t, \varepsilon) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, \varepsilon) = \dot{s}_\varepsilon(t), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \cdot \sigma(t, \varepsilon) + G(t, \varepsilon) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon). \quad (2.8)$$

Уравнение (2.7) задает скорость вдоль варьируемого движения. Вместе с соотношениями (1.1) и (1.2) оно дает:

$$\mathbf{V}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial s}{\partial t}(t, \varepsilon)\right) = \vartheta_r\left(\frac{\partial G}{\partial t}(t, \varepsilon)\right) + \text{Ad } G(t, \varepsilon) \cdot \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}(t, \varepsilon)\right),$$

$$\mathbf{w}_\varepsilon(t) = \text{hor}\left(\frac{\partial s}{\partial t}(t, \varepsilon)\right) = G(t, \varepsilon) \cdot \text{hor}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}(t, \varepsilon)\right),$$

(так как $G(t, 0) = e$ и $\boldsymbol{\sigma}(t, 0) = s(t)$, то для $\varepsilon = 0$ мы снова находим соотношения $\mathbf{V}_0(t) = \mathbf{V}(t) = \boldsymbol{\omega}(\dot{s}(t))$ и $\mathbf{w}_0(t) = \mathbf{w}(t) = \text{hor}(\dot{s}(t))$).

Отображение $\varepsilon \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t, \varepsilon)$ определено для фиксированного значения параметра t . Это означает, что второй вектор в правой части соотношения (2.8) горизонтален и эквивалентным образом определяется из следующего дифференциального уравнения для $G(t, \cdot)$:

$$\vartheta_r\left(\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon)\right) = \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon)\right) \text{ с } G(t, 0) = e. \quad (2.9)$$

При $\varepsilon = 0$ находим соотношение, оправдывающее использование обозначения $\delta G(t)$ для $\boldsymbol{\omega}(\delta s(t))$ в соотношении (2.3):

$$\boldsymbol{\omega}(\delta s(t)) = \delta G(t) = \left[\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0}. \quad (2.10)$$

Что касается горизонтальной составляющей, то первый вектор в правой части соотношения (2.8) вертикален, и поэтому

$$\text{hor}\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon)\right) = G(t, \varepsilon) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon).$$

При $\varepsilon = 0$ получаем касательный вектор к пространству \mathbb{S} в точке $s(t)$:

$$\delta \mathbf{w}(t) = \text{hor}(\delta s(t)) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0}.$$

Вычисление вариации $\delta\mathbf{V}$ требует некоторой дополнительной техники, в частности форму кривизны Ω на связности. (Напомним, что по определению $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d\omega(\text{hor}(\mathbf{x}), \text{hor}(\mathbf{y}))$ для \mathbf{x} и $\mathbf{y} \in T\mathbb{S}$).

Уравнения картановой структуры имеют вид [10, гл. II, разд. 5], для действия слева группы \mathbb{G} на пространстве \mathbb{S} имеет место изменение знака)

$$d\omega = [\omega, \omega] + \Omega.$$

Принимая во внимание обратный образ этих форм под действием отображения $(t, \varepsilon) \mapsto s(t, \varepsilon)$, получаем равенство

$$d(s^*\omega) = [s^*\omega, s^*\omega] + s^*\Omega$$

между \mathfrak{g} -значными 2-формами на многообразии $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}$, которое, как уже доказано, эквивалентно :

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\omega\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) = \left[\omega\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right), \omega\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}\right)\right] + \Omega\left(\frac{\partial s}{\partial t}, \frac{\partial s}{\partial \varepsilon}\right).$$

Для $\varepsilon = 0$ выведем следующее ограничение на инфинитезимальные вариации на интервале $[t_0, t_1]$:

$$\delta\mathbf{V} = \frac{d}{dt}\delta G + [\delta G, \mathbf{V}] + \Omega(\delta\mathbf{w}, \mathbf{w}). \quad (2.11)$$

2.2.2. Декомпозиция с помощью сечений Распространим вычисления разд. 2 на случай, когда начальная траектория и положения описаны в соответствии с соотношением (1.3). Тогда вариации полностью определены соотношением

$$s_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(t) \cdot \Gamma(q_\varepsilon(t)) \quad \text{для } t \in [t_0, t_1],$$

где $(t, \varepsilon) \mapsto g_\varepsilon(t)$ – вертикальная вариация, а $(t, \varepsilon) \mapsto q_\varepsilon(t)$ – вариация параметра кривой на многообразии \mathcal{Q} , определяющая вариацию формы, иными словами, проекции $(t, \varepsilon) \mapsto x_\varepsilon(t)$ на \mathbb{X} .

На самом деле, вариация формы поднята из пространства \mathbb{X} в пространство \mathbb{S} с помощью сечения \mathfrak{r} (назовем ее $\mathfrak{r} \circ \Phi^{-1}$). Сам по себе этот метод не производит горизонтальных кривых $\varepsilon \mapsto s_\varepsilon(t)$. Необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} q_0(t) = q(t) \text{ и } g_0(t) = g(t) \text{ для всех } t \in [t_0, t_1], \\ q_\varepsilon(t_0) = q(t_0) \text{ и } q_\varepsilon(t_1) = q(t_1) \text{ для всех } \varepsilon \in \mathbb{R}, \\ g_\varepsilon(t_0) = g(t_0) \text{ и } g_\varepsilon(t_1) = g(t_1) \text{ для всех } \varepsilon \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Вычислим в рамках данного подхода величины (2.2), (2.3) и (2.4), соответствующие виртуальным вариациям в механике:

$$\frac{\partial s}{\partial t}(t, \varepsilon) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, \varepsilon) \cdot \mathfrak{r}(q(t, \varepsilon)) + g(t, \varepsilon) \cdot \mathfrak{r}^T \left(\frac{\partial q}{\partial t}(t, \varepsilon) \right) = \dot{s}_\varepsilon(t), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \cdot \mathfrak{r}(q(t, \varepsilon)) + g(t, \varepsilon) \cdot \mathfrak{r}^T \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right). \quad (2.13)$$

Для $\varepsilon = 0$

$$\delta s(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} \cdot \mathfrak{r}(q(t)) + g(t) \cdot \mathfrak{r}^T(\delta q(t)),$$

и, полагая

$$\vartheta_r \left(\left[\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} \right) = \delta g(t) \text{ для } t \in [t_0, t_1],$$

имеем

$$\delta G(t) = \boldsymbol{\omega}(\delta s(t)) = \delta g(t) + \text{Ad } g(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_r(\delta q(t)), \quad (2.14)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}(t) = \text{hor}(\delta s(t)) = g(t) \cdot \text{hor}(\mathfrak{r}^T(\delta q(t))) =$$

горизонтальное поднятие в точке $s(t)$ величины $\Phi^T(\delta q(t))$.

Из соотношения (2.12) следует

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_\varepsilon(t) &= \vartheta_r\left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, \varepsilon)\right) + \text{Ad } g(t, \varepsilon) \cdot \boldsymbol{\omega}_r\left(\frac{\partial q}{\partial t}(t, \varepsilon)\right), \\ \text{hor}\left(\frac{\partial s}{\partial t}(t, \varepsilon)\right) &= g(t, \varepsilon) \cdot \text{hor}\left(r^T\left(\frac{\partial q}{\partial t}(t, \varepsilon)\right)\right).\end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$, так как $g(t, 0) = g(t)$ и $\frac{\partial g}{\partial t}(t, 0) = \dot{g}(t)$, вновь находим (1.4). Теперь уравнение (2.11) принимает вид

$$\delta\mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\delta g + \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(\delta q)) + [\delta g + \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(\delta q), \mathbf{V}] + \boldsymbol{\Omega}_r(\delta q, \dot{q}), \quad (2.15)$$

где $\boldsymbol{\Omega}_r$ — образ при обратном отображении величины $\boldsymbol{\Omega}$ отображением $q \mapsto r(q)$, \mathfrak{g} -значной 2-формы на пространство \mathcal{Q} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Прямое вычисление выражения (2.15) для $\delta\mathbf{V}$ также можно было бы получить с помощью формулы Маурера – Картана $d\vartheta_r = [\vartheta_r, \vartheta_r]$ и определения кривизны главной связности.

2.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА $T\mathbb{S}$ И ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ \mathcal{L} . Для того чтобы с помощью вариационного принципа вывести уравнения динамики, мы должны выразить функцию Лагранжа $\mathcal{L}: I \times T\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ более удобным образом, с помощью описания (быть может, локального) пространств \mathbb{S} и $T\mathbb{S}$. В разд. 2 мы отбросим переменную t , не играющую роли в наших вычислениях, и будем работать с функцией Лагранжа, определенной на пространстве $T\mathbb{S}$, что не составит ограничений для следующих рассуждений. Как и в разд. 1, воспользуемся картой $\Phi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{O}$ на \mathbb{X} , где \mathcal{Q} — открытое множество в пространстве \mathbb{R}^d (или в векторном пространстве \mathbb{R}), а \mathcal{O} — открытое подмножество пространства \mathbb{X} , его поднятия в \mathbb{S} , отображения φ и его касательного отображения (см. разд. 1, пример 6):

$$\varphi: \mathcal{Q} \times \mathbb{G} \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}): (q, g) \mapsto s = g \cdot r(q) \text{ такое что } \pi \circ r(q) = \Phi(q)$$

$$\begin{aligned} \varphi^T: (\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^d) \times T\mathbb{G} &\rightarrow (\pi^T)^{-1}(T\mathcal{O}): \\ : ((q, \eta), \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{v} = \sigma_s^T(\vartheta_r(\mathbf{x})) + L_g^T(\mathbf{r}^T(q, \eta)). \end{aligned}$$

Отождествим касательное пространство $T\mathcal{Q}$ открытого подмножества \mathcal{Q} пространства \mathbb{R}^d с множеством $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^d$ и обозначим элементы касательного пространства $T\mathcal{Q}$ как (q, η) , где $\eta \in \mathbb{R}^d$. С помощью диффеоморфизма $\mathbb{G} \times \mathfrak{g} \rightarrow T\mathbb{G}: (g, \mathbf{u}) = \mathbf{x} = R_g^T(\mathbf{u})$ выведем первый диффеоморфизм

$$(\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^d) \times (\mathbb{G} \times \mathfrak{g}) \rightarrow (\pi^T)^{-1}(T\mathcal{O}),$$

записываемый в явном виде как

$$\begin{aligned} ((q, \eta), (g, \mathbf{u})) &\mapsto \mathbf{v} = \sigma_s^T(\mathbf{u}) + L_g^T(\mathbf{r}^T(q, \eta)) \in T_s\mathbb{G}, \quad (2.16) \\ (s &= \varphi(q, g)). \end{aligned}$$

Полагая $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})$ и $\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega} \circ \mathbf{r}^T = \mathbf{r}^*\boldsymbol{\omega}$ на множестве \mathcal{Q} , имеем

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(q, \eta),$$

и в условиях (2.16) расщепление \mathbf{v} на вертикальную и горизонтальную составляющие имеет вид

$$\begin{aligned} \text{vert}(\mathbf{v}) &= \sigma_s^T(\mathbf{V}), \\ \text{hor}(\mathbf{v}) &= L_g^T(\text{hor } \mathbf{r}^T(q, \eta)) = L_g^T(\mathbf{r}^T(q, \eta)) - (\text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(q, \eta)) \cdot s. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Теперь у нас имеется другой диффеоморфизм, принимающий две формы в зависимости от нашего выбора переменной (s или (q, g) с $\varphi(q, g) = s$):

$$\begin{aligned} \psi: \left\{ \begin{array}{l} \pi^{-1}(\mathcal{O}) \times (\mathbb{R}^d \times \mathfrak{g}) \rightarrow (\pi^T)^{-1}(T\mathcal{O}): (s, \eta, \mathbf{V}) \\ (\mathcal{Q} \times \mathbb{G}) \times (\mathbb{R}^d \times \mathfrak{g}) \rightarrow (\pi^T)^{-1}(T\mathcal{O}): ((q, g), (\eta, \mathbf{V})) \end{array} \right\} \mapsto \\ \mapsto \mathbf{v} = \sigma_s^T(\mathbf{V}) + L_g^T(\text{hor } \mathbf{r}^T(q, \eta)). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Кинематическая интерпретация соотношения (2.18) состоит в том, что $\sigma_s^T(\mathbf{V})$ и $\mathbf{w} = L_g^T(\text{hог } \mathbf{r}^T(q, \eta)) \in T_s\mathbb{S}$ – скорости твердотельного движения и чистой деформации (в смысле заданной связности) в положении s , где $\text{hог } \mathbf{r}^T(q, \eta) = \mathbf{r}^T(q, \eta) - \boldsymbol{\omega}_r(q, \eta) \cdot \mathbf{r}(q)$ – скорость деформации в положении $\mathbf{r}(q)$.

Для упрощения обозначений в дальнейшем обозначим обе формы функции $\mathcal{L} \circ \psi$ одной и той же буквой \mathbf{L} , хотя они будут переходить друг в друга с помощью диффеоморфизма (правая композиция):

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q} \times \mathbb{G}) \times (\mathbb{R}^d \times \mathfrak{g}) &\rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}) \times (\mathbb{R}^d \times \mathfrak{g}): \\ : ((q, g), (\eta, \mathbf{V})) &\mapsto (s, \eta, \mathbf{V}) = (\varphi(q, g), \eta, \mathbf{V}). \end{aligned}$$

На открытом подмножестве $(\pi^T)^{-1}(T\mathcal{O})$ функция Лагранжа \mathcal{L} может быть описана как гладкая функция $\mathcal{L} \circ \psi = \mathbf{L}$, определенная на произведении $\pi^{-1}(\mathcal{O}) \times (\mathbb{R}^d \times \mathfrak{g})$ (или $(\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^d) \times (\mathbb{G} \times \mathfrak{g})$).

Выполним некоторые вычисления на \mathbf{L} . Формула (1.10), примененная к частным отображениям $(q, g) \mapsto \mathbf{L}(q, g, \dot{q}, \mathbf{V})$ и $s \mapsto \mathbf{L}(s, \dot{q}, \mathbf{V})$ (для f и f_1), а также $w = (q, \eta) \in T_q\mathcal{Q}$, дают выражение для частной ковариантной производной величины \mathbf{L} по отношению к q :

$$\nabla_q \mathbf{L}(\cdot)(\eta) = \partial_q \mathbf{L}(\cdot)(\eta) - \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(q, \eta). \quad (2.19)$$

Определим действие группы \mathbb{G} на $\pi^{-1}(\mathcal{O}) \times (\mathbb{R}^d \times \mathfrak{g})$ как $h \cdot (s, \eta, \mathbf{V}) = (h \cdot s, \eta, \text{Ad } h \cdot \mathbf{V})$, $h \in \mathbb{G}$. Тогда легко доказать, что отображение ψ эквивариантно и производная Ли величины \mathcal{L} для действия группы \mathbb{G} удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{L}(\mathcal{L} \circ \psi)(\cdot) = \mathcal{L}\mathbf{L}(\cdot) = \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) + \text{ad}^* \mathbf{V} \cdot \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \quad (\in \mathfrak{g}^*). \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) – результат следующего вычисления:

$$\langle \mathcal{L}\mathbf{L}(\cdot), \mathbf{u} \rangle = \left[\frac{d}{d\tau} \mathbf{L}(q, \exp(\tau \mathbf{u})g, \dot{q}, \text{Ad } \exp(\tau \mathbf{u}) \cdot \mathbf{V}) \right]_{\tau=0} =$$

$$= \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot)(\mathbf{u}) + \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot)([\mathbf{u}, \mathbf{V}]).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Производная Ли, входящая в определение выражения для $\nabla_q \mathbf{L}(\cdot)(\eta)$, выведена из действия группы \mathbb{G} на s и оставляет \mathbf{V} инвариантным: эта производная Ли имеет вид $\partial_g^r \mathbf{L}(\cdot)(\mathbf{u})$. Здесь нет противоречия между (1.7), (2.19) и (2.20)!

2.4. ЭЙЛЕРОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ. Пусть \mathcal{Q} – открытое множество пространства \mathbb{R}^d , а $\Phi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{X}$ – локальная карта пространства \mathbb{X} . В соответствии с результатами разд. 1 и 2, представим функцию Лагранжа в виде $\mathcal{L} \circ \psi = \mathbf{L}: I \times \mathcal{Q} \times \mathbb{G} \times \mathbb{R}^d \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая ее зависящей от величины τ . Значение функции $\mathcal{L} \circ \psi$ равно $\mathbf{L}(t, q, g, v, \mathbf{V})$, где q описывает форму системы, g описывает перемещения вдоль слоев (перемещения “как твердого целого”), $v = \dot{q}$ и $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s})$ описывают скорости. Теперь выражение для функционала действия принимает вид

$$\mathcal{S}_{t_0}^{t_1}(s) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{L}(t, q(t), g(t), \dot{q}(t), \mathbf{V}(t)) dt,$$

где на первом шаге мы можем принять во внимание соотношение

$$\mathbf{V}(t) = \boldsymbol{\omega}(\dot{s}(t)).$$

Если мы рассмотрим вариацию траектории

$$\mathcal{S}_{t_0}^{t_1}(s, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{L}(t, q_\varepsilon(t), g_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t), \mathbf{V}_\varepsilon(t)) dt,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{S}_{t_0}^{t_1}(s, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} & \left[\partial_q \mathbf{L}(\cdot) \left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) \left(\partial_r \left(\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \partial_{\dot{q}} \mathbf{L}(\cdot) \left(\frac{\partial \dot{q}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \left(\frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \right] dt, \end{aligned}$$

и для $\varepsilon = 0$ с учетом соотношений (2.11), (2.14) имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{S}_{t_0}^{t_1}(s, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\partial_q \mathbf{L}(\cdot) (\delta q) + \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) (\delta g) + \partial_{\dot{q}} \mathbf{L}(\cdot) (\delta \dot{q}) + \right. \\ &+ \left. \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) (\delta \mathbf{V}) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\partial_q \mathbf{L}(\cdot) (\delta q) + \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) (\delta g) + \partial_{\dot{q}} \mathbf{L}(\cdot) \left(\frac{d}{dt} \delta q \right) + \right. \\ &\quad \left. + \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \left(\frac{d}{dt} \delta G + [\delta G, \mathbf{V}] + \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\delta q, \dot{q}) \right) \right] dt, \end{aligned}$$

где обозначение $\mathbf{L}(\cdot)$ означает $\mathbf{L}(t, q(t), g(t), \dot{q}(t), \mathbf{V}(t))$. Выполняя обычное интегрирование по частям, используя соотношение (2.14), в силу обращения в нуль граничных условий имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{S}_{t_0}^{t_1}(s, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\partial_q \mathbf{L}(\cdot) - \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot) - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} \mathbf{L}(\cdot) \right] (\delta q) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) (\delta g) - \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{ad } \mathbf{V}(\delta G) - \frac{d}{dt} \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) (\delta G) \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \partial_q \mathbf{L}(\cdot) - \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r - \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot) - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} \mathbf{L}(\cdot), \delta q \right\rangle dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) - \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{ad } \mathbf{V} - \frac{d}{dt} \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot), \delta G \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Чтобы включить в рассмотрение неконсервативные системы, предположим, что к системе приложены неконсервативные

силы, и представим выражение для работы в виде

$$\langle Q(t, q, g, \dot{q}, \mathbf{V}), \delta q \rangle + \langle \mathbf{F}(t, q, g, \dot{q}, \mathbf{V}), \delta G \rangle.$$

Тогда в силу принципа Гамильтона

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \partial_q \mathbf{L}(\cdot) - \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r - \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot) - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} \mathbf{L}(\cdot) + Q, \delta q \right\rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) - \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) \circ \text{ad } \mathbf{V} - \frac{d}{dt} \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) + \mathbf{F}, \delta G \right\rangle dt = 0. \end{aligned}$$

Так как $[t_0, t_1]$ может быть любым интервалом, содержащимся в I и так как поля $\delta q: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\delta G: [t_0, t_1] \rightarrow \mathfrak{g}$ могут быть произвольными полями класса \mathcal{C}^1 , то линейные формы, расположенные слева от больших скобок, должны обращаться в нуль для любого момента времени $t \in I$. Окончательно мы получаем следующие уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} \mathbf{L} - \partial_q \mathbf{L} + \partial_g^r \mathbf{L} \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r + \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L} \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot) = Q, \\ \frac{d}{dt} \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L} - \partial_g^r \mathbf{L} + \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L} \circ \text{ad } \mathbf{V} = \mathbf{F}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Предположим, что для $q \in \mathcal{Q}$ отображения $\boldsymbol{\omega}_r$ и $\boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)$ из \mathbb{R}^d в \mathfrak{g} линейны и имеют вид

$$\begin{aligned} \delta q & \mapsto \boldsymbol{\omega} \circ \mathbf{r}^T(q, \delta q) = \boldsymbol{\omega}_r(q, \delta q), \\ \delta q & \mapsto \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}^T(q, \dot{q}), \mathbf{r}^T(q, \delta q)) = \boldsymbol{\Omega}_r(q, \dot{q}, \delta q). \end{aligned}$$

Если мы рассмотрим случай, когда $\mathbf{L}(\cdot) = \mathbf{L}(t, s, \dot{q}, \mathbf{V})$ с учетом (2.19) и (2.20), то уравнения (2.21) примут вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} \mathbf{L} - \nabla_q \mathbf{L} + \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L} \circ \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot) = Q, \\ \frac{d}{dt} \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L} - \mathcal{L} \mathbf{L} = \mathbf{F}, \end{cases} \quad (2.22)$$

где оператор ∇_q применен к частичному отображению $s \mapsto \mathbf{L}(t, s, \dot{q}, \mathbf{V})$, а \mathcal{L} – производная Ли, выведенная из естественного действия группы \mathbb{G} на пространстве $T\mathbb{S}$ (она применена к частичному отображению $(s, \mathbf{V}) \mapsto \mathbf{L}(t, s, \dot{q}, \mathbf{V})$ с действием, определенным в конце разд. (2)).

Чтобы получить полную систему дифференциальных уравнений, мы должны добавить к уравнениям (2.21) или (2.22) кинематические уравнения $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s})$, которые имеют вид (см. разд. (1)):

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \\ \vartheta_r \left(\frac{dg}{dt} \right) = \mathbf{V} - \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q}). \end{cases} \quad (2.23)$$

Можно было бы воспользоваться другими переменными и развивать лагранжев подход параллельно эйлерову. Однако лагранжев подход по-настоящему интересен, когда имеет место инвариантность под действием группы \mathbb{G} , как мы это покажем в разд. 3.

3. Случай стандартной механической системы. В механике типичная функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \Pi(t, s), \quad \mathbf{v} \in T_s\mathbb{S},$$

где $\mathcal{J}: T\mathbb{S} \times_{\mathbb{S}} T\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ – риманова структура в пространстве \mathbb{S} , связанная с кинетической энергией, и потенциал $\Pi: I \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция. Нас интересует случай, когда риманова структура инвариантна под действием группы \mathbb{G} на пространстве \mathbb{S} , т.е.

$$\mathcal{J}(L_g^T(\mathbf{v}), L_g^T(\mathbf{w})) = \mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{для } g \in \mathbb{G}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T\mathbb{S}, o(\mathbf{v}) = o(\mathbf{w}).$$

Случай, когда потенциал, а вместе с ним и вся функция Лагранжа также инвариантен, также оказывается значимым.

3.1. ИНВАРИАНТНЫЕ РИМАНОВЫ СТРУКТУРЫ НА \mathbb{S} И АССОЦИИРОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ. Вертикальные касательные векторы пространства \mathbb{S} в точке s – это векторы вида $\mathbf{x} \cdot s$ с $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$. Вертикальное подпространство в каждой точке $s \in \mathbb{S}$ изоморфно пространству \mathfrak{g} , так что ограничение римановой структуры на вертикальные подпространства описывается отображением $\mathcal{J}_f: \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, таким что

$$\mathcal{J}(\mathbf{x} \cdot s, \mathbf{y} \cdot s) = \mathcal{J}_f(s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}. \quad (3.1)$$

По своему механическому смыслу $\mathcal{J}_f(s)$ – обобщенный ковариантный тензор инерции “замороженной” системы в положении s . Тензор \mathcal{J}_f на самом деле относится к механике твердого тела и обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{J}_f(g \cdot s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{J}_f(s)(\text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{x}, \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{y}), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L} \mathcal{J}_f(s)(\mathbf{u})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathcal{J}_f(s)([\mathbf{u}, \mathbf{x}], \mathbf{y}) - \mathcal{J}_f(s)(\mathbf{x}, [\mathbf{u}, \mathbf{y}]), \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{g}. \quad (3.3)$$

Их доказательства просты: соотношение (3.2) – следствие инвариантности величины \mathcal{J} , соотношения (3.3) получаются, принимая значение на \mathbf{u} дифференциала величины (3.2) по отношению к g при $g = e$.

Теорема 3.1. *Если риманова структура \mathcal{J} на многообразии \mathbb{S} инвариантна под действием группы \mathbb{G} , то на многообразии \mathbb{S} существует главная связность, определенная \mathfrak{g} -значной дифференциальной 1-формой ω , такая что для $\mathbf{v} \in T\mathbb{S}$, элемент $\omega(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ из пространства \mathfrak{g} определен соотношением*

$$\mathcal{J}(\mathbf{u} \cdot s, \mathbf{w}) = \mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (3.4)$$

для всех вертикальных векторов $\mathbf{w} \in T_s\mathbb{S}$.

Формула (3.4) эквивалентна следующему соотношению

$$\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{g}: \mathcal{J}_f(s)(\omega(\mathbf{v}), \mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{x} \cdot s), \quad (3.5)$$

которое удобно для вычисления величины $\omega(\mathbf{v})$.

Определенная таким образом связность в дальнейшем будет называться *динамической связностью*. Ее механический смысл состоит в следующем: величина $\omega(\mathbf{v}) \cdot s$ – скорость движения системы “как твердого целого”, производящая тот же момент, что и движение со скоростью (и деформацией) \mathbf{v} . Примечательно, что так как $\mathbf{v} - \omega(\mathbf{v}) \cdot s = \text{hor}(\mathbf{v})$, то соотношение (3.4) эквивалентно тому, что выполнено условие

$$\mathcal{J}(\text{hor}(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = 0 \quad \text{для всех вертикальных } \mathbf{w} \in T_s\mathbb{S}. \quad (3.6)$$

Это означает, что горизонтальное подпространство пространства $T_s\mathbb{S}$ для определенной таким образом связности – ортогональное подпространство вертикального подпространства для римановой структуры, определенной формой \mathcal{J} .

Доказательство теоремы 3.1. Так как $\mathcal{J}_f(s)$ – евклидова структура на пространстве \mathfrak{g} , то элемент $\mathbf{u} = \omega(\mathbf{v})$ определен единственным образом соотношением (3.5) и поэтому отображение $\mathbf{v} \mapsto \omega(\mathbf{v})$ линейно на каждом векторном пространстве $T_s\mathbb{S}$. Легко может быть доказано, что величина ω дифференцируема (дифференцируемое сечение пучка $\mathcal{L}(T\mathbb{S}, \mathfrak{g})$). Второе свойство (1.1) также является следствием единственности.

Чтобы доказать первое свойство, положим $\mathbf{u} = \omega(\mathbf{v})$, $\mathbf{u}' = \omega(L_g^T(\mathbf{v}))$. По определению для всех векторов $\mathbf{w} \in T_{g.s}\mathbb{S}$ в силу левой инвариантности

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\sigma_{g.s}^T(\mathbf{u}'), \mathbf{w}) &= \mathcal{J}(L_g^T(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \mathcal{J}(\mathbf{v}, L_{g^{-1}}^T(\mathbf{w})) = \\ &= \mathcal{J}(\sigma_s^T(\mathbf{u}), L_{g^{-1}}^T(\mathbf{w})) = \mathcal{J}(L_g^T(\sigma_s^T(\mathbf{u})), \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Так как величина \mathcal{J} не вырождена, то

$$\sigma_{g.s}^T(\mathbf{u}') = L_g^T(\sigma_s^T(\mathbf{u})) = \sigma_{g.s}^T(\text{Ad } g \cdot \mathbf{u}).$$

(Последнее выражение получается, если взять касательное отображение $\mathbb{G} \ni h \mapsto L_g(h.s) = (ghg^{-1}).(g.s)$ для $h = e$.) Так

как отображение $\sigma_{g,s}^T$ инъективно, то справедливо соотношение $\mathbf{u}' = \text{Ad } g \cdot \mathbf{u}$, которое и требовалось доказать. ■

Теорема 3.2. *Если риманова структура \mathcal{J} на многообразии \mathbb{S} инвариантна под действием группы \mathbb{G} , то существует риманова структура \mathcal{J}_{def} на пространстве \mathbb{X} , такая что*

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{J}_f(s)(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{w})) + \mathcal{J}_{\text{def}}(\pi^T(\mathbf{v}), \pi^T(\mathbf{w}))$$

для $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T\mathbb{S}$, для которых $o(\mathbf{v}) = o(\mathbf{w}) = s$.

Этот результат означает, что билинейная форма \mathcal{J} расщепляется на две части, первая из которых \mathcal{J}_f определяет глобальные движения системы как твердого целого, а вторая часть \mathcal{J}_{def} определяет деформации системы.

Доказательство теоремы 3.2. Используя левую инвариантность римановой структуры \mathcal{J} под действием группы \mathbb{G} и эквивариантность горизонтального поднятия, можно вывести, что для $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta} \in T_x\mathbb{X}$, величина

$$\mathcal{J}(\text{Lift}(s, \boldsymbol{\xi}), \text{Lift}(s, \boldsymbol{\eta})) = \mathcal{J}_{\text{def}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$$

независима от выбора точки s в слое x и определяет риманову структуру на пространстве \mathbb{X} . Так как вертикальные и горизонтальные касательные векторы в точке s также ортогональны для структуры \mathcal{J} , то

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{J}_f(s)(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{w})) + \mathcal{J}(\text{hor}(\mathbf{v}), \text{hor}(\mathbf{w})),$$

и так как по определению поднятия $\text{hor}(\mathbf{v}) = \text{Lift}(s, \pi^T(\mathbf{v}))$, если $s = o(\mathbf{v})$, то

$$\mathcal{J}(\text{hor}(\mathbf{v}), \text{hor}(\mathbf{w})) = \mathcal{J}_{\text{def}}(\pi^T(\mathbf{v}), \pi^T(\mathbf{w})). \quad \blacksquare$$

3.2. УРАВНЕНИЯ ПУАНКАРЕ – ЧЕТАЕВА ДЛЯ СТАНДАРТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. В разд. 3 мы лишь предполагали, что риманова структура, ассоциированная с кинетической энергией, инвариантна, и мы используем ассоциированную динамическую связность, определенную теоремой 3.1, и разрешение кинетической энергии, следующее из теоремы 3.2. Полагая $\mathbf{J}(s) = \mathcal{J}_f(s)$, представим функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(t, \dot{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\text{def}}(\pi^T(\dot{s}), \pi^T(\dot{s})) - \Pi(t, s), \quad (3.7)$$

где $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s})$.

Помимо отображения $s \mapsto \mathbf{J}(s)$ из \mathbb{S} в $\mathcal{L}_2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ введем также отображение $s \mapsto \mathbf{I}(s)$ из \mathbb{S} в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$, такое что $\mathbf{I}(s)(\mathbf{V})$ – линейная форма $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \mathbf{u})$, такая что $\langle \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}), \mathbf{u} \rangle = \mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \mathbf{u})$. В силу инвариантности для $s \in \mathbb{S}$, $g \in \mathbb{G}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(g.s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{J}(s)(\text{Ad } g^{-1}.\mathbf{x}, \text{Ad } g^{-1}.\mathbf{y}), \\ \mathbf{I}(g.s) &= \text{Ad}^* g \circ \mathbf{I}(s) \circ \text{Ad } g^{-1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В рамках разд. 1, пример 1, функции Лагранжа \mathbf{L} и \mathbf{L}_o – не что иное, как функции, определенные для $(q, g) \in \mathcal{Q} \times \mathbb{G}$, $\eta \in \mathbb{R}^d$, \mathbf{V} и $\mathbf{U} \in \mathfrak{g}$, а также с $s = \varphi(q, g)$, $\mathbf{U} = \text{Ad } g^{-1}.\mathbf{V} = \vartheta_\ell(\dot{q}) + \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q})$, как

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t, s, \eta, \mathbf{V}) &= \mathbf{K}(s)(\mathbf{V}) + \mathbf{K}_{\text{def}}(q, \eta) - \Pi(t, s), \\ \mathbf{L}_o(t, q, g, \eta, \mathbf{U}) &= \mathbf{K}_r(q)(\mathbf{U}) + \mathbf{K}_{\text{def}}(q, \eta) - \Pi_o(t, q, g), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{K}(s)(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \mathbf{V}), \quad \mathbf{K}_{\text{def}}(q, \eta) = \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\text{def}}(\Phi^T(q, \eta), \Phi^T(q, \eta)) -$$

соответственно, кинетическая энергия движений системы как твердого тела и кинетическая энергия чистых деформаций, в

соответствии с теоремой 3.2. Потенциал имеет вид $\Pi_o(t, q, g) = \Pi(t, \varphi(q, g))$, и имеют место соотношения:

$$\mathbf{J}_r(q) = \mathbf{J}(r(q)), \quad \mathbf{I}_r(q) = \mathbf{I}(r(q)), \quad \mathbf{K}_r(q) = \mathbf{K}(r(q)) \quad \text{для } q \in \mathcal{Q}.$$

Так как лагранжиан рассматривается как функция на $\mathbb{R} \times T\mathbb{S}$, то переменные $t, q, g, \eta, \mathbf{V}$ рассматриваются как независимые. Конечно, на движениях системы q и g – функции времени t и $\eta = \dot{q}$, $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s})$.

Теорема 3.3 (Стандартные механические системы в эйлеровом описании). *Для лагранжианов вида (3.7) динамические уравнения Эйлера (2.22) принимают вид*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} K_{\text{def}} - \partial_q K_{\text{def}} - \nabla_q \mathbf{K}(s)(\mathbf{V}) + \mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)) = \\ \qquad \qquad \qquad = Q - \nabla_q \Pi(t, s), \\ \frac{d}{dt} \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \mathcal{L} \Pi(t, s), \end{array} \right. \quad (3.9)$$

где $\boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)$ и $\nabla_q \mathbf{K}(s)(\mathbf{V})$ – линейные формы $\delta q \mapsto \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \delta q)$ и $\delta q \mapsto \nabla_q \mathbf{K}(s)(\delta q)(\mathbf{V})$. С помощью ковариантной производной второе уравнение (3.9) может быть также представлено в виде

$$\mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) + \text{ad}^* \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) + \nabla_q \mathbf{I}(s)(\dot{q})(\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \mathcal{L} \Pi(t, s). \quad (3.10)$$

Формула (1.8) для $\mathbf{v} = \partial_q \varphi(q, g)(\delta q) = L_g^T \mathbf{r}^T(q, \delta q)$ может быть раскрыта как

$$\begin{aligned} \nabla_q \mathbf{K}(s)(\delta q)(\mathbf{V}) &= \\ &= \partial_q \mathbf{K}(\varphi(q, g))(\delta q)(\mathbf{V}) + \mathbf{J}(\varphi(q, g))([\text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\omega}_r(q, \delta q), \mathbf{V}], \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Доказательство теоремы 3.3. Из (2.22) и соотношений

$$\partial_{\dot{q}} \mathbf{L}(\cdot) = \partial_{\dot{q}} K_{\text{def}}(q, \dot{q}),$$

$$\nabla_q K_{\text{def}}(q, \dot{q}) = \partial_q K_{\text{def}}(q, \dot{q}), \quad \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}(\cdot) = \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}), \quad \mathcal{L} \mathbf{L}(\cdot) = \mathcal{L} \Pi(t, s).$$

Для доказательства развернутой формы (3.10) зафиксируем $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$. Тогда (см. разд. 1, формула (1.7), пример 4 и замечание о том, что \dot{s} и $\partial_q \varphi(q, g)(\dot{q})$ имеют ту же самую горизонтальную компоненту):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \mathbf{u}) &= \\ &= \mathbf{J}(s)(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{u}) + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{J}(s) \right) (\mathbf{V}, \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{J}(s)(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{u}) + \mathcal{L} \mathbf{J}(s) (\boldsymbol{\omega}(\dot{s})) (\mathbf{V}, \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{J}(\dot{s})) (\mathbf{V}, \mathbf{u}) = \\ &= \langle \mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}), \mathbf{u} \rangle + \langle \text{ad}^* \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}), \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla_q \mathbf{I}(s)(\dot{q})(\mathbf{V}), \mathbf{u} \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 3.4 (Стандартные механические системы в лагранжевом описании). *Уравнения (3.9) эквивалентны уравнениям*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} K_{\text{def}} - \partial_q K_{\text{def}} - (\nabla_q \mathbf{K})_{\mathbf{r}}(q)(\mathbf{U}) + \mathbf{J}_{\mathbf{r}}(q)(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{r}}(\dot{q}, \cdot)) &= \\ &= Q - \nabla_q \Pi_o(t, q, g), \quad (3.12) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{I}_{\mathbf{r}}(q)(\mathbf{U}) + \text{ad}^*(\mathbf{U} - \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{r}}(\dot{q})) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}(q)(\mathbf{U}) &= \mathbf{F}_o - \partial_g^\ell \Pi_o(t, q, g) \end{aligned} \right.$$

с $\mathbf{F}_o = \text{Ad}^* g^{-1} \cdot \mathbf{F} (= \mathbf{F} \circ \text{Ad } g)$, $(\nabla_q \mathbf{K})_{\mathbf{r}}(q) = \nabla_q \mathbf{K}(s)$ для $s = \mathbf{r}(q)$. Второе уравнение (3.12) также может быть представлено в развёрнутом виде двумя способами:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\mathbf{r}}(q)(\dot{\mathbf{U}}) + \text{ad}^*(\mathbf{U} - \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{r}}(\dot{q})) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}(q)(\mathbf{U}) + \partial_q \mathbf{I}_{\mathbf{r}}(q)(\dot{q})(\mathbf{U}) &= \\ &= \mathbf{F}_o - \partial_g^\ell \Pi_o(t, q, g), \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\mathbf{r}}(q)(\dot{\mathbf{U}}) + \text{ad}^* \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}(q)(\mathbf{U}) + (\nabla_q \mathbf{I})_{\mathbf{r}}(q)(\dot{q})(\mathbf{U}) + \\ + \mathbf{I}_{\mathbf{r}}(q)([\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{r}}(\dot{q})]) &= \mathbf{F}_o - \partial_g^\ell \Pi_o(t, q, g). \quad (3.14) \end{aligned}$$

Первое уравнение из (3.12) также имеет более развернутый вид:

$$\begin{aligned} & -(\nabla_q \mathbf{K})_r(q)(\mathbf{U}) + \mathbf{J}_r(q)(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)) = \\ & = -\partial_q \mathbf{K}_r(q)(\mathbf{U}) + \mathbf{J}_r(q)(\mathbf{U}, [\boldsymbol{\omega}_r(\cdot), \mathbf{U}] + \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)). \end{aligned}$$

(Заметим, что операторы $\nabla_q(\mathbf{K}_r)$ и $\nabla_q(\mathbf{I}_r)$ не определены для \mathbf{K}_r , а структура \mathbf{I}_r не определена на \mathbb{S} .)

Доказательство теоремы 3.4. Чтобы получить лагранжев вид уравнений динамики, введем функцию Лагранжа $\mathbf{L}_\alpha(t, q, g, \eta, \mathbf{U})$. Тогда, вычисляя частичный дифференциал функции $\mathbf{K}(\varphi(q, g))(\mathbf{V}) = \mathbf{K}(r(q))(\text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{V})$ по отношению к q и используя (3.11), имеем

$$\nabla_q \mathbf{K}(s)(\delta q)(\mathbf{V}) = \nabla_q \mathbf{K}(r(q))(\delta q)(\mathbf{U}) = (\nabla_q \mathbf{K})_r(q)(\delta q)(\mathbf{U}).$$

С другой стороны, в силу (3.8):

$$\mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \text{Ad } g \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)) = \mathbf{J}_r(q)(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)).$$

Чтобы преобразовать второе уравнение (3.9), прежде всего заметим, что для фиксированной величины $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}), \mathbf{u} \rangle & = \mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \mathbf{u}) = \\ & = \mathbf{J}(r(q))(\text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{V}, \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u}) = \langle \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}), \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u} \rangle. \end{aligned}$$

Так как $\frac{d}{dt} \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u} = -[\vartheta_\ell(\dot{g}), \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u}]$ и $\mathbf{U} = \vartheta_\ell(\dot{g}) + \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q})$, то

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}), \mathbf{u} \right\rangle = \\ & = \frac{d}{dt} \left\langle \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}), \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u} \right\rangle = \\ & = \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}), \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u} \right\rangle + \langle \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}), -\text{ad } \vartheta_\ell(\dot{g}) \cdot \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u} \rangle = \\ & = \left\langle \text{Ad}^* g \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}) + \text{ad}^* \vartheta_\ell(\dot{g}) \cdot \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}) \right), \mathbf{u} \right\rangle = \\ & = \left\langle \text{Ad}^* g \cdot (\mathbf{I}_r(q)(\dot{\mathbf{U}}) + \partial_q \mathbf{I}_r(q)(\dot{q})(\mathbf{U}) + \text{ad}^*(\mathbf{U} - \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q})) \cdot \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U})), \mathbf{u} \right\rangle. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}\Pi(t, s), \mathbf{u} \rangle &= \left[\frac{d}{d\tau} \Pi(t, \exp(\tau\mathbf{u}) \cdot s) \right]_{\tau=0} = \left[\frac{d}{d\tau} \Pi_o(t, q, \exp(\tau\mathbf{u}) \cdot g) \right]_{\tau=0} = \\
&= \partial_g \Pi_o(t, q, g)(R_g^T(\mathbf{u})) = \partial_g \Pi_o(t, q, g)(L_g^T(\text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u})) = \\
&= \langle \partial_g^\ell \Pi_o(t, q, g), \text{Ad } g^{-1} \cdot \mathbf{u} \rangle = \langle \text{Ad}^* g \cdot \partial_g^\ell \Pi_o(t, q, g), \mathbf{u} \rangle.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) = \\
&= \text{Ad}^* g \cdot (\mathbf{I}_r(q)(\dot{\mathbf{U}}) + \partial_q \mathbf{I}_r(q)(\dot{q})(\mathbf{U}) + \text{ad}^*(\mathbf{U} - \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q})) \cdot \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U})), \\
&\quad \mathcal{L}\Pi(t, s) = \text{Ad}^* g \cdot \partial_g^\ell \Pi_o(t, q, g).
\end{aligned}$$

Наконец, эйлеровы уравнения (3.9) эквивалентны уравнениям (3.12). Два представления (3.13) и (3.14) эквивалентны между собой, так как справедлива последняя формула примера 4, в силу которой при $\mathbf{v} = \mathbf{r}^T(\dot{q})$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
&\partial_q \mathbf{I}_r(q)(\dot{q})(\mathbf{U}) - \text{ad}^* \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q}) \cdot \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}) = \\
&= (\nabla_q \mathbf{I})_r(q)(\dot{q}) - \mathbf{I}_r(q)([\boldsymbol{\omega}_r(\dot{q}), \mathbf{U}]). \blacksquare
\end{aligned}$$

3.3. ИНВАРИАНТНАЯ ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА. Если мы предположим, что риманова структура, ассоциированная с кинетической энергией инвариантна, то лагранжиан в целом будет инвариантен тогда и только тогда, когда инвариантен потенциал. Потенциал инвариантен под действием группы \mathbb{G} на пространстве \mathbb{S} , если

$$\Pi(t, g \cdot s) = \Pi(t, s) \text{ для } s \in \mathbb{S}, g \in \mathbb{G}.$$

Это свойство означает, что потенциал зависит лишь только от формы системы и имеет вид

$$\Pi(t, s) = \Pi_1(t, \pi(s)) = \Pi_o(t, q).$$

Для инвариантного потенциала имеем $\mathcal{L}\Pi(t, s) = 0$. Тогда вторые уравнения в эйлеровом и лагранжевых представлениях в соотношениях (3.9) и (3.12) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) = \mathbf{F},$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}) + \text{ad}^*(\mathbf{U} - \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q})) \cdot \mathbf{J}_r(q)(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_o.$$

3.4. ЗАМЕЧАНИЯ О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ. В левой части уравнений (3.10) и (3.13) величины

$$\mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) + \text{ad}^*\mathbf{V} \cdot \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}), \quad \mathbf{I}_r(q)(\dot{\mathbf{U}}) + \text{ad}^*\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U})$$

относятся к динамике замороженной системы. Они выглядят как слагаемые, появляющиеся в уравнениях динамики для обычного или обобщенного твердого тела в представлении Эйлера – Арнольда. В частности, они представляют собой эйлерову и лагранжеву формы динамического момента, порожденного скоростью \mathbf{V} и ускорением $\dot{\mathbf{V}}$ относительно галилеевской системы отсчета (или \mathbf{U} и $\dot{\mathbf{U}}$, наблюдаемых в системе отсчета, связанной с телом) твердого объекта с тензором инерции $\mathbf{I}(s)$ (или $\mathbf{I}_r(q)$). Величины

$$\partial_q \mathbf{I}(s)(\dot{q})(\mathbf{V}),$$

$$\partial_q \mathbf{I}_r(q)(\dot{q})(\mathbf{U}) - \text{ad}^*\boldsymbol{\omega}_r(\dot{q}) \cdot \mathbf{I}_r(q)(\mathbf{U}) = \nabla_q \mathbf{I}_r(q)(\dot{q}) + \mathbf{I}_r(q)([\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q})])$$

– не что иное, как вклады деформаций в выражение для динамического момента. Однако величина \mathbf{V} не была определена в разд. 1 как скорость движения, и мы можем сделать это замечание более аккуратным, ссылаясь на переход в другую систему отсчета.

Прежде всего объясним некоторые общие свойства перехода в другие системы отсчета. Системы отсчета рассматриваются

как твердые объекты (в соответствии со смыслом группы \mathbb{G}). Поэтому, если \mathcal{R} и \mathcal{R}_1 – две кинематически допустимых системы отсчета, то существует функция $t \mapsto A(t) \in \mathbb{G}$, такая что наблюдения положения системы в момент времени t из двух систем отсчета, описанных в конфигурационном пространстве \mathbb{S} , связаны соотношением $s = A(t).s_1$ (отображение $t \mapsto A(t)$ описывает движение системы отсчета \mathcal{R}_1 по отношению к системе отсчета \mathcal{R}). Найдем производную по времени

$$\dot{s} = \dot{A} \cdot s_1 + L_A^T(\dot{s}_1) = \vartheta_r(\dot{A}) \cdot s + L_A^T(\dot{s}_1).$$

Ее кинематическая интерпретация такова:

- \dot{s} и \dot{s}_1 – скорости системы относительно \mathcal{R} и \mathcal{R}_1 соответственно,
- $L_A^T(\dot{s}_1)$ – скорость системы относительно \mathcal{R}_1 , наблюдаемая с \mathcal{R} ,
- $\vartheta_r(\dot{A}) \cdot s$ – скорость относительно \mathcal{R} , порожденная \mathcal{R}_1 (скорость объекта в положении s в момент времени t в \mathcal{R} , которая фиксирована в \mathcal{R}_1 ; заметим, что $\vartheta_r(\dot{A}) \cdot s$ – значение фундаментального векторного поля, связанного с действием группы \mathbb{G} в точке s).

3.5. ПРИЛОЖЕНИЕ К ДИНАМИКЕ. Будем по-прежнему предполагать, что связность ω – это динамическая связность, речь о которой шла в теореме 3.1. Каждое кинематически допустимое движение системы, наблюдаемое по отношению к Галилеевской системе отсчета \mathcal{R} и описываемое отображением $t \mapsto s(t)$ может быть разделено на $t \mapsto A(t).\sigma(t)$. Тогда, если мы определим подвижную систему отсчета \mathcal{R}_1 тем условием, что ее движение относительно \mathcal{R} описывается отображением $t \mapsto A(t)$, то движение, наблюдаемое из системы отсчета \mathcal{R}_1 – это $t \mapsto \sigma(t)$, и результаты разд. 1 доказывают, что следующие два свойства эквивалентны:

- а) Движение, наблюдаемое по отношению к системе отсчета \mathcal{R}_1 , описывается горизонтальной кривой на пучке $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{G})$, оснащенном динамической связностью ω ,
- б) $\mathbf{V}(t) = \vartheta_r(\dot{A})$ для всех t (\mathbf{V} , будучи *определена* как $\omega(\dot{s})$).

Свойство а) имеет динамический смысл: движение относительно \mathcal{R}_1 не производит кинетического момента (в смысле динамики это не что иное, как чистая деформация). Свойство б) относится к движению величину \mathbf{V} . В дальнейшем система отсчета \mathcal{R}_1 будет выбрана в соответствии с этими свойствами.

Если мы опишем положения системы так, как это было сделано в разд. 1, то найдется отображение $t \mapsto G(t) \in \mathbb{G}$, такое что

$$\begin{cases} \sigma(t) = G(t).r(q(t)) \text{ с } \vartheta_r(\dot{G}) + \text{Ad } G.\omega_r(\dot{q}) = 0, \\ s(t) = A(t).\sigma(t) = A(t).G(t).r(q(t)). \end{cases} \quad (3.15)$$

Таким образом, кривые $t \mapsto q(t)$ и $t \mapsto r(q(t))$ описывают эволюцию формы системы, и второе выражение выражает то обстоятельство, что $t \mapsto \sigma(t)$ – горизонтальное поднятие в пространство \mathbb{S} последней кривой. Функция $t \mapsto g(t)$ из предыдущих разделов имеет вид $g(t) = A(t).G(t)$. С точки зрения системы отсчета \mathcal{R}_1 кинематические величины, описывающие движение, – это $q(t) \in \mathcal{Q}$, $G(t) \in \mathbb{G}$ для положений и $\dot{q}(t)$, $\mathbf{V} = \vartheta_r(\dot{A})$, $\mathbf{W}(t) = \text{Ad } A(t)^{-1}.\mathbf{V}(t) = \vartheta_\ell(\dot{A}) \in \mathfrak{g}$ для скоростей. С помощью формулы (3.15) и соотношения $\mathbf{I}(s) = \text{Ad}^* A \circ \mathbf{I}(\sigma) \circ \text{Ad } A^{-1}$, преобразования представимы в виде

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{d}{dt} (\text{Ad } A.\mathbf{W}) = \text{Ad } A.\dot{\mathbf{W}} + \text{Ad } A.[\vartheta_\ell(\dot{A}), \mathbf{W}] = \text{Ad } A.\dot{\mathbf{W}},$$

$$\begin{aligned}
\partial_q \mathbf{K}(s)(\mathbf{V}) &= \partial_q \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W}), \\
\mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, \text{Ad } g.\boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)) &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W}, \text{Ad } G.\boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)), \\
\mathbf{J}(s)(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{X}) &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})(\dot{\mathbf{W}}, \text{Ad } A^{-1}.\mathbf{X}), \\
\mathbf{J}(s)(\mathbf{V}, [\mathbf{X}, \mathbf{V}]) &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W}, [\text{Ad } A^{-1}.\mathbf{X}, \mathbf{W}]), \\
\nabla_q \mathbf{J}(s)(\dot{q})(\mathbf{V}, \mathbf{X}) &= \nabla_q \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})(\dot{q})(\mathbf{W}, \text{Ad } A^{-1}.\mathbf{X}), \\
\mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) &= \text{Ad}^* A.\mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\dot{\mathbf{W}}), \\
\text{ad}^* \mathbf{V}.\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) &= \text{Ad}^* A.(\text{ad}^* \mathbf{W}.\mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W})), \\
\nabla_q \mathbf{I}(s)(\dot{q})(\mathbf{V}) &= \text{Ad}^* A.\nabla_q \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\dot{q})(\mathbf{W}).
\end{aligned}$$

Полагая $\mathbf{F}_1 = \text{Ad}^* A^{-1}.\mathbf{F}$, можно убедиться в том, что уравнения (3.9) эквивалентны уравнениям

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} K_{\text{def}} - \partial_q K_{\text{def}} - \nabla_q \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W}, \text{Ad } G.\boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)) &= \\
&= Q - \nabla_q \Pi(t, A.\boldsymbol{\sigma}), \\
\mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\dot{\mathbf{W}}) + \text{ad}^* \mathbf{W}.\mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W}) + \nabla_q \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\dot{q})(\mathbf{W}) &= \\
&= \mathbf{F}_1 - \text{Ad}^* A^{-1}.\mathcal{L}\Pi(t, A.\boldsymbol{\sigma}).
\end{aligned} \right. \quad (3.16)$$

(с $\boldsymbol{\sigma} = G.r(q)$). Чтобы получить полную систему дифференциальных уравнений для определения отображений $t \mapsto q(t)$, $t \mapsto G(t)$ и $t \mapsto A(t)$ мы должны добавить кинематические уравнения

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \vartheta_\ell \left(\frac{dG}{dt} \right) = -\boldsymbol{\omega}_r(\dot{q}), \quad \vartheta_\ell \left(\frac{dA}{dt} \right) = \mathbf{W}. \quad (3.17)$$

Если мы рассмотрим \mathcal{R}_1 как “связанную с телом систему отсчета”, то величина $\mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\dot{\mathbf{W}}) + \text{ad}^* \mathbf{W}.\mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W})$, появляющаяся слева во втором уравнении (3.16), – это не что иное, как момент твердого объекта со смешанным тензором инерции $\mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})$,

скорость которого равна \mathbf{V} относительно \mathcal{R} и \mathbf{W} , если она выражена относительно \mathcal{R}_1 .

Однако имеется также неприводимое слагаемое $\nabla_q \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma})(\dot{q})(\mathbf{W})$, которое представляет собой вклад динамического момента глобальных деформаций системы (кориолисовых и гироскопических сил).

Динамика деформаций системы описана первым уравнением (3.16). Если бы \mathcal{R}_1 была галилеевой системой отсчета, то динамическое уравнение лагранжевой системы, совершающей движение под действием тех же сил и положения, описываемые отображением $q \mapsto \mathbf{r}(q)$ в лагранжевых координатах $q \in \mathbb{R}^n$ приняли бы вид

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} K_{def} - \partial_q K_{def} = Q - \nabla_q \Pi(t, A \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

Однако система отсчета - негалилеева, и в динамических уравнениях должны быть приняты во внимание центробежные, кориолисовы и гироскопические силы, обусловленные движением данной системы отсчета относительно галилеевой. Эти величины имеют вид $-\nabla_q \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W})$ и $\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W}, \text{Ad } G \cdot \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot))$.

3.6. ИНВАРИАНТНЫЙ ЛАГРАНЖИАН. Предположим, что функция \mathcal{L} инвариантна под действием группы \mathbb{G} на пространстве $T\mathbb{S}$ в том смысле, что

$$\mathcal{L}(h \cdot \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) \text{ для всех } \mathbf{v} \in T\mathbb{S}, h \in \mathbb{G}$$

Для зависящей от времени функции Лагранжа это условие принимает вид $\mathcal{L}(t, h \cdot \mathbf{v}) = \mathcal{L}(t, \mathbf{v})$. Будем считать, что это условие выполнено на протяжении этого раздела. Однако мы не упоминаем время, которое могло бы играть роль в наших рассуждениях. Тогда, так как группа \mathbb{G} предполагается связной, то имеют

место следующие эквивалентные свойства:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathcal{L} = 0, \\ \forall h \in \mathbb{G}, \forall v \in T\mathbb{S} : \mathcal{L}(h.v) = \mathcal{L}(v), \\ \mathcal{L}\mathbf{L} = 0, \\ \forall h \in \mathbb{G}, \forall v \in T\mathbb{S} : \mathbf{L}(hs, \eta, \text{Ad } h.V) = \mathfrak{g}(s, \eta, \mathbf{V}), \end{cases} \quad (3.18)$$

где \mathcal{L} означает производную Ли, ассоциированную с действием группы \mathbb{G} на пространстве $T\mathbb{S}$ или в ее эквивалентном виде для действия на пространстве $\mathbb{S} \times \mathbb{R}^d \times \mathfrak{g}$, написанную в развернутом виде в соотношении (2.20) и представленную в уравнении (2.22).

Можно рассмотреть следующее преобразование $\Lambda : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^d \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$, определенное соотношением $\Lambda(s, \eta, \mathbf{V}) = \partial_{\mathbf{V}}\mathbf{L}(s, \eta, \mathbf{V})$ или, что эквивалентно, соотношением

$$\langle \Lambda(s, \eta, \mathbf{V}), \mathbf{u} \rangle = \langle \partial_{\mathbf{V}}\mathbf{L}(s, \eta, \mathbf{V}), \mathbf{u} \rangle \text{ для всех } \mathbf{u} \in \mathfrak{g}.$$

(Это не что иное, как частичное преобразование Лежандра, также представляющее “вертикальную” производную вдоль слоя расслоения $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{G})$, когда касательные векторы слоев описаны элементами пространства \mathfrak{g} .) В дальнейшем мы предположим, что отображение Λ дифференцируемо и для всех фиксированных значений (s, η) отображение $\mathbf{V} \mapsto \Lambda(s, \eta, \mathbf{V})$ – диффеоморфизм из \mathfrak{g} в \mathfrak{g}^* . Тогда обозначим $\Lambda^- : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^d \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ величину, определенную соотношением

$$\mathbf{V} = \Lambda^-(s, \eta, \mathbf{M}) \iff \Lambda(s, \eta, \mathbf{V}) = \mathbf{M}.$$

Эта предположение о двойственности обычно выполнено в механике.

Затем можно ввести отображение $\mathbf{R} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^d \times \mathfrak{g}^*$, такое что

$$\mathbf{R}(s, \eta, \mathbf{M}) = \mathbf{L}(s, \eta, \mathbf{V}) - \langle \mathbf{M}, \mathbf{V} \rangle \text{ с } \mathbf{V} = \Lambda^-(s, \eta, \mathbf{M}).$$

Если свойства инвариантности (3.18) выполнены, то величины Λ и \mathbf{R} обладают следующим свойством инвариантности

$$\forall h \in \mathbb{G}, \forall (s, \eta) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^d:$$

$$\begin{cases} \Lambda(hs, \eta, \text{Ad } h.\mathbf{V}) = \text{Ad }^*h.\Lambda(s, \eta, \mathbf{V}), \\ \Lambda^-(hs, \eta, \text{Ad }^*h.\mathbf{M}) = \text{Ad } h.\Lambda^-(s, \eta, \mathbf{M}), \\ \mathbf{R}(hs, \eta, \text{Ad }^*h.\mathbf{M}) = \mathbf{R}(s, \eta, \mathbf{M}). \end{cases} \quad (3.19)$$

Непосредственно доказывается, что

$$\partial_s \mathbf{R}(\cdot) = \partial_s \mathbf{L}(\cdot), \quad \partial_\eta \mathbf{R}(\cdot) = \partial_\eta \mathbf{L}(\cdot), \quad \partial_{\mathbf{M}} \mathbf{R}(\cdot) = -\mathbf{V}$$

(где в левой части $(\cdot) = (s, \eta, \mathbf{M})$, в правой части $(\cdot) = (s, \eta, \mathbf{V})$, а $\mathbf{V} = \Lambda^-(s, \eta, \mathbf{M})$). Таким образом, если $s = \varphi(q, g)$, как в разд. 2, то

$$\partial_q \mathbf{R}(\cdot) = \partial_s \mathbf{R}(\cdot) \circ \partial_q \varphi(q, g) = \partial_s \mathbf{L}(\cdot) \circ \partial_q \varphi(q, g) = \partial_q \mathbf{L}(\cdot),$$

$$\partial_g \mathbf{R}(\cdot) = \partial_s \mathbf{R}(\cdot) \circ \partial_g \varphi(q, g) = \partial_s \mathbf{L}(\cdot) \circ \partial_g \varphi(q, g) = \partial_g \mathbf{L}(\cdot),$$

$$\nabla_q \mathbf{R}(\cdot) = \nabla_q \mathbf{L}(\cdot),$$

и для инвариантного Лагранжиана

$$\mathcal{L}\mathbf{R} = \mathcal{L}\mathbf{L} = 0.$$

Если Лагранжиан инвариантен и неконсервативные силы \mathbf{F} обращаются в нуль на (2.22), то соответствующие динамические уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} \mathbf{R} - \nabla_q \mathbf{R} + \langle \text{Ad }^*g^{-1}.\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot) \rangle = Q, \\ \mathbf{M} = \text{const} \in \mathfrak{g}^*. \end{cases} \quad (3.20)$$

Второе уравнение означает, что $\mu = \text{Ad }^*g^{-1}.\mathbf{M}$ принадлежит орбите действия группы \mathbb{G} на пространстве \mathfrak{g}^* посредством

коприсоединенного действия. В частности, вычисляя производную функции $\text{Ad}^*g.\mu(t) = \mathbf{M}$, можно найти

$$\frac{d}{dt}\mu + \{\vartheta_\ell(\dot{g}), \mu\} = 0.$$

С другой стороны, уравнения (2.23) и (3.19) для Λ^- дают

$$\begin{aligned} \text{Ad } g.\vartheta_\ell(\dot{g}) &= \vartheta_r(\dot{g}) = \Lambda^-(g.r(q), \dot{q}, \text{Ad}^*g.\mu) - \text{Ad } g.\omega_r(\dot{q}) = \\ &= \text{Ad } g.(\Lambda^-(r(q), \dot{q}, \mu) - \omega_r(\dot{q})), \end{aligned}$$

Тогда другое представление динамических уравнений (3.20) и ассоциированных кинематических уравнений записывается как

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}}\mathbf{R} - \nabla_q\mathbf{R} + \langle \mu, \Omega_r(\dot{q}, \cdot) \rangle = Q, \\ \frac{d}{dt}\mu + \{\vartheta_\ell(\dot{g}), \mu\} = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \\ \vartheta_\ell\left(\frac{dg}{dt}\right) = \Lambda^-(r(q), \dot{q}, \mu) - \omega_r(\dot{q}). \end{cases} \quad (3.22)$$

Вплоть до слагаемого $\langle \mu, \Omega_r(\dot{q}, \cdot) \rangle$ первая группа уравнений в (3.21) и (3.22) аналогична уравнениям, получающимся из теории Рауса. С точностью до слагаемого $\omega_r(\dot{q})$ уравнения второй группы аналогичны уравнениям, задающим классическую гамильтонову систему на коприсоединенных орбитах в движении по инерции обычного или обобщенного твердого тела.

3.6. ПРИЛОЖЕНИЕ: УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ И ГРУППЫ ГОЛОНОМИЙ. Типичное приложение введенной выше геометрической структуры следует из уравнений (3.9) для свободных систем, совершающих движение в пространстве – для системы двух тел [8] и для аффинно-деформируемого тела [7].

Прежде всего напомним некоторые положения теории групп голономий. Если $x \in \mathbb{X}$ и $s \in \pi^{-1}(x)$, то всякая принадлежащая классу \mathcal{C}^1 замкнутая петля $\tau \mapsto c(\tau)$ ($\tau \in [0, 1]$, $c(0) = c(1) = x$) в точке x в пространстве \mathbb{X} может быть поднята в горизонтальную кривую $\tau \mapsto C(\tau)$ класса \mathcal{C}^1 , расположенную в пространстве \mathbb{S} , такую что $C(0) = s$. В общем случае $C(1) \neq C(0)$, C не будет замкнутой петлей, и существует $h \in \mathbb{G}$, такая что $C(1) = h.C(0)$. Главный результат теории групп голономий состоит в следующем: для любого $s \in \mathbb{S}$ найдется подгруппа Ли \mathbb{H}_s группы \mathbb{G} , такая что (детали см. в [10, гл. II] или в [11])

$$\left. \begin{array}{l} \text{существование замкнутой петли } \tau \mapsto c(\tau) \text{ в } x = \pi(s), \\ \text{такой что ее горизонтальное поднятие } \tau \mapsto C(\tau) \text{ из } s \\ \text{удовлетворяет условиям } C(0) = s \text{ и } C(1) = h.s \end{array} \right\} \iff$$

$$\iff h \in \mathbb{H}_s.$$

Более того, $\mathbb{H}_{g.s} = g.\mathbb{H}_s.g^{-1}$. По определению \mathbb{H}_s – группа голономий для связности в точке s .

Для системы, в которой действуют лишь внутренние силы, только второе уравнение (3.9) имеет вид $\frac{d}{dt} \mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) = 0$, откуда следует существование первого интеграла $\mathbf{V} = \mathbf{I}(s)^{-1}(\mathbf{M})$, где $\mathbf{M} \in \mathfrak{g}^*$ – постоянная, определяемая начальными условиями. Знание этого интеграла позволяет продвинуться в интегрировании уравнений движения: теперь они имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} K_{\text{def}} - \partial_q K_{\text{def}} - \nabla_q \mathbf{K}(s)(\mathbf{I}(s)^{-1}(\mathbf{M})) + \\ \quad + \mathbf{J}(s)(\mathbf{I}(s)^{-1}(\mathbf{M}), \text{Ad } g. \boldsymbol{\Omega}_r(\dot{q}, \cdot)) = Q - \partial_q \Pi_o(t, q), \quad (3.23) \\ \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \vartheta_r \left(\frac{dq}{dt} \right) = \mathbf{I}(s)^{-1}(\mathbf{M}) - \text{Ad } g. \boldsymbol{\omega}_r(\dot{q}). \end{array} \right.$$

В случае, когда $\mathbf{M} = 0$, т.е., скажем, $\mathbf{V} = 0$ в момент времени

$t = t_o$, движение – решение уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} K_{\text{def}} - \partial_q K_{\text{def}} = Q - \partial_q \Pi_o(t, q), \\ \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \vartheta_r \left(\frac{dg}{dt} \right) = -\text{Ad } g \cdot \omega_r(\dot{q}). \end{cases} \quad (3.24)$$

Последнее уравнение означает, что $\omega(\dot{s}) = 0$, другими словами, движение описано горизонтальной кривой в пространстве \mathbb{S} .

Будем искать решение следующей задачи. Рассмотрим моменты времени $t_o < t_1$ и конфигурации s_o и s_1 одной и той же формы ($\pi(s_o) = \pi(s_1)$). Предположим, что система находится в покое в начальный момент времени t_o : $s(t_o) = s_o$, $\dot{s}(t_o) = 0$ и что к ней действуют только внутренние силы. Спрашивается, можно ли найти внутренние управляющие силы Q , переводящие систему из положения s_o в исходный момент времени t_o в положение s_1 в конечный момент времени t_1 ? Говоря конкретно: можно ли с помощью лишь внутренних сил выполнить движение системы с той же самой начальной и конечной формой, но с заданными изменениями ориентации в пространстве, заданными элементом $h \in \mathbb{G}$, таким что $s_1 = h \cdot s_o$?

Согласно начальным условиям в момент времени t_o , $\mathbf{M} = 0$ и движение – не что иное, как горизонтальная кривая. Условие, которое должно быть выполнено, состоит в том, что движение проектируется на пространство \mathbb{X} как замкнутая петля с горизонтальным поднятием, идущая из s_o в момент t_o в s_1 в момент t_1 . Отсюда можно сделать вывод, что необходимое и достаточное условие существования решения состоит в том, что элемент h удовлетворяет условию $h \in \mathbb{H}_{s_o}$. Тогда существует замкнутая петля, определенная функцией $t \mapsto q(t)$, и первое уравнение (3.24) дает закон Q (закон управления). Согласно теореме Амброуза-Зингера алгебра Ли пространства \mathbb{H}_s может быть найдена из изучения кривизны связности. В конкретном примере явное вычисление кривизны может быть сложным.

(Вычисление динамической связности и ее кривизны для системы твердых тел имеется в приложении к статье. Для примера аффинно-деформируемого тела выводы о группе голономий также возможны - см. [7].)

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДИНАМИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ И КРИВИЗНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассмотрим систему с точки зрения примера 3 (относительно деталей динамики твердых тел в рамках исследований по главным однородным пространствам см. [9]). Для всех $a \in \mathbb{B}$ обозначим ϑ_r форму Маурера – Картана для \mathbb{S}_a , а $\Theta_a = p_a^* \vartheta_r$ – \mathfrak{g} -значную дифференциальную форму на пространстве \mathbb{S} , такую что $\Theta_a(\mathbf{v}) = \vartheta_r(v_a)$, если $\mathbf{v} = (v_a)_{a \in \mathbb{B}}$ (мы отождествляем касательное пространство для $\mathbb{P} = \prod \mathbb{S}_a$ с $\prod T\mathbb{S}_a$).

Инертные свойства и кинетическая энергия системы обладают следующими свойствами:

(S_3) Для всякого твердого тела $a \in \mathbb{B}$ существует инвариантная риманова структура \mathcal{J}_a на пространстве \mathbb{S}_a , ассоциированная с кинетической энергией. Билинейная дифференциальная форма \mathcal{J}_a может быть выражена с помощью одного из эквивариантных отображений $s_a \mapsto \mathbf{J}_a(s_a)$ или $s_a \mapsto \mathbf{M}_a(s_a)$ из \mathbb{S}_a в $\mathcal{L}_2(\mathfrak{g})$ или $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ и представлена как

$$\mathcal{J}_a(v_a, w_a) = \mathbf{J}_a(s_a)(\vartheta_r(v_a), \vartheta_r(w_a)) = \langle \mathbf{M}_a(s_a)(\vartheta_r(v_a), \vartheta_r(w_a)) \rangle$$

(для $v_a, w_a \in T\mathbb{S}_a$, $o(v_a) = o(w_a)$). Подмногообразие \mathbb{S} многообразия \mathbb{P} оснащено инвариантной римановой структурой, определенной на \mathbb{P} с помощью \mathcal{J} как

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{a \in \mathbb{B}} \mathcal{J}_a(v_a, w_a) \equiv \sum_{a \in \mathbb{B}} \mathbf{J}_a(s_a)(\Theta_a(\mathbf{v}), \Theta_a(\mathbf{w})).$$

Тогда существует дифференцируемое эквивариантное отображение $s \mapsto \mathbf{M}_f(s)$ пространства \mathbb{S} в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$, такое что

$$\mathcal{J}_f(s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{M}_f(s)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \text{ for } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g},$$

$$\mathcal{J}_f(s) = \sum_{a \in \mathbb{B}} \mathbf{J}_a(s_a), \quad \mathbf{M}_f(s) = \sum_{a \in \mathbb{B}} \mathbf{M}_a(s_a).$$

Для последующих утверждений нам понадобятся определения, которые связаны с когомологиями: если \mathfrak{g} – любая алгебра Ли, то внешний дифференциал (или ко-граница) отображения $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ – кососимметрическое билинейное отображение $\delta A: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$, такое что

$$\delta A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ad}^* \mathbf{x} \circ A(\mathbf{y}) - \text{ad}^* \mathbf{y} \circ A(\mathbf{x}) - A([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \text{ для } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}.$$

Внешняя производная (или ко-граница) отображения $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ – кососимметрическое билинейное отображение $\delta F: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, определенное как

$$\delta F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [F(\mathbf{x}), \mathbf{y}] + [\mathbf{x}, F(\mathbf{y})] - F([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \text{ для } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}.$$

Теорема 1. *Для системы твердых тел, подчиненных внутренним голономным связям, при предположениях (S_1) , (S_2) и (S_3) форма связности ω динамической связности и ее форма кривизны Ω выражаются как*

$$\begin{aligned} \omega &= \mathbf{M}_f(s)^{-1} \circ \left(\sum_{a \in \mathbb{B}} \mathbf{M}_a \circ \Theta_a \right), \\ \Omega &= \mathbf{M}_f(s)^{-1} \circ \left(\sum_{a \in \mathbb{B}} \delta \mathbf{M}_a(s_a)(\Theta_a - \omega, \Theta_a - \omega) \right). \end{aligned}$$

Другими словами, для $s = (s_a)$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T\mathbb{S}$, $o(\mathbf{v}) = o(\mathbf{w})$:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{v}) &= \mathbf{M}_f(s)^{-1} \left(\sum_{a \in \mathbb{B}} \mathbf{M}_a(\vartheta_r(v_a)) \right), \\ \Omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{M}_f(s)^{-1} \left(\sum_{a \in \mathbb{B}} \delta \mathbf{M}_a(s_a)(\vartheta_r(v_a) - \omega(\mathbf{v}), \vartheta_r(w_a) - \omega(\mathbf{w})) \right). \end{aligned}$$

Выполним теперь вычисление в случае системы обыкновенных тел. Пусть \mathcal{E} и \mathbb{E} – аффинное пространство евклидовой геометрии в размерности 3 и ассоциированное евклидово векторное пространство (каждой паре точек (p, q) ставится в соответствие вектор \vec{pq} с хорошо известными свойствами). Пусть теперь $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ – евклидова группа перемещений пространства \mathcal{E} и его алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$ могут быть отождествлены с алгеброй Ли кососимметрических векторных полей на пространстве \mathcal{E} . Эти поля также известны как поля моментов: векторное поле $X: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$ кососимметрическое тогда и только тогда, когда существует вектор $\omega_x \in \mathbb{E}$, такой что

$$X(q) = X(p) + \omega_x \times \vec{pq} \text{ для всех } p \text{ и } q \in \mathcal{E}.$$

Присоединенное представление группы \mathbb{D} на алгебре \mathfrak{d} эквивалентно отображению $\text{Ad } g.X = \Phi_g \circ X \circ g^{-1}$, где $\Phi_g (\in \text{SO}(\mathbb{E}))$ – линейная часть отображения $g \in \mathbb{D}$. В этом частном случае существует Ad-инвариантное внутреннее произведение $[\cdot | \cdot]$, форма Клейна на алгебре \mathfrak{d} , такая что для X и $Y \in \mathfrak{d}$ и вне зависимости от выбора точки p в пространстве \mathcal{E}

$$[X | Y] = \omega_x \cdot X(p) + \omega_y \cdot Y(p).$$

Тогда классическая формула для формы \mathcal{J}_a , ассоциированной с кинетической энергией тела a , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_a(s)(V, W) &= m_a V(c_s) \cdot W(c_s) + \mathbf{I}_a(s)(\omega_V) \cdot \omega_W = \\ &= [H_a(s)(V) | W] \equiv [V | H_a(s)(W)], \end{aligned}$$

$$s \in \mathbb{S}_a, V, W \in \mathfrak{d},$$

где m_a – масса тела a , $s \mapsto c_s$ и $s \mapsto \mathbf{I}_a(s)$ – соответственно эквивариантные отображения из пространства \mathbb{S}_a в пространство \mathcal{E} , а соотношение $\mathcal{L}_{\text{sym}}(\mathbb{E})$ выражает положение центра масс и тензора инерции тела a как функции его положения s .

Эквивариантность означает, что для $s \in \mathbb{S}_a$ и $g \in \mathbb{D}$, $c_{g.s} = g(c_s)$, $\mathbf{I}_a(g.s) = \Phi_g \circ \mathbf{I}_a(s) \circ \Phi_g^*$. Отображение $s \mapsto H_a(s)$ из пространства \mathbb{S}_a в $\mathcal{L}(\mathfrak{d})$ удовлетворяет соотношению $H_a(g.s) = \text{Ad } g \circ H_a(s) \circ \text{Ad } g^{-1}$. Положим

$$H_f(s) = \sum_{a \in \mathbb{B}} H_a(s_a) \text{ для } s = (s_a) \in \mathbb{S}.$$

Теорема 2. Пусть для системы твердых тел, на которые наложены внутренние голономные связи, выполнены предположения (S_1) , (S_2) и (S_3) . Тогда если структурная группа – группа евклидовых перемещений a пространстве размерности 3, то форма связности ω , ассоциированная с динамической связностью, и ее форма кривизны Ω выражаются как

$$\begin{aligned} \omega &= H_f(s)^{-1} \circ \left(\sum_{a \in \mathbb{B}} H_a(s_a) \circ \Theta_a \right), \\ \Omega &= H_f(s)^{-1} \circ \left(\sum_{a \in \mathbb{B}} \delta H_a(s_a)(\Theta_a - \omega, \Theta_a - \omega) \right). \end{aligned}$$

Другими словами, для $s = (s_a)$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T\mathbb{S}$, $o(\mathbf{v}) = o(\mathbf{w})$:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{v}) &= H_f(s)^{-1} \left(\sum_{a \in \mathbb{B}} H_a(s_a)(\vartheta_r(v_a)) \right), \\ \Omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= H_f(s)^{-1} \left(\sum_{a \in \mathbb{B}} \delta H_a(s_a)(\vartheta_r(v_a) - \omega(\mathbf{v}), \vartheta_r(w_a) - \omega(\mathbf{w})) \right). \end{aligned}$$

Чтобы выполнить вычисление кривизны необходимо найти выражение $\delta H_a(s)$ для твердого тела. В дальнейшем будет изложен результат для любого твердого тела, и индекс a будет опущен. На самом деле, $H_a(s) = H(s)$ – не что иное, как “инерциальный бинор”, задающий отношение между скоростью (“винтом”) и моментом в теории винтов, когда тело a находится в положении s . Выбирая оси с началом в точке o пространства \mathcal{E} , положим $\vec{o}c_s = c_s$, $\mathbf{I}(s) = \mathbf{I}(c_s)$ (центральный тензор инерции

тела в положении s), матричное выражение для соотношения $V \mapsto L = H(s)$ можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L \\ L(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m \tilde{c}_s & m\mathbf{1} \\ \mathbf{I}(s) - m \tilde{c}_s^2 & m \tilde{c}_s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_V \\ V(o) \end{bmatrix} \quad (1)$$

($\boldsymbol{\omega}_L$ – линейный момент, и $L(o)$ – кинетический момент в точке o , \tilde{c}_s – матрица линейного оператора $\mathbf{x} \mapsto c_s \times \mathbf{x}$ в пространстве \mathbb{E} . Полагая, что начало системы отсчета совпадает с центром масс тела – точкой c_s , имеем

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L \\ L(c_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & m\mathbf{1} \\ \mathbf{I}(s) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_V \\ V(c_s) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Это позволяет сделать вывод: для $V, W \in \mathfrak{d}$, если положить $Z = \delta H(s)(V, W)$, то

$$\omega_Z = \mathbf{0}, \quad Z(c_s) = 2mV(c_s) \times W(c_s) + \delta \mathbf{I}(s)(\omega_V, \omega_W). \quad (3)$$

Билинейный оператор $\delta \mathbf{I}(s)$ определен в соответствии с алгеброй Ли (\mathbb{E}, \times) . Для точек \mathbf{x} и $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$

$$\delta \mathbf{I}(s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{I}(s)(\mathbf{x}) \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{I}(s)(\mathbf{y}) - \mathbf{I}(s)(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$$

и некоторые простые вычисления дают следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{I}(s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \Gamma(s)(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \text{ с} \\ \Gamma(s)(\mathbf{x}) &= \text{Trace}(\mathbf{I}(s))\mathbf{x} - 2\mathbf{I}(s)(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим прямой нормализованный ортонормальный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ собственных векторов оператора $\mathbf{I}(s)$. Пусть J_1, J_2, J_3 – ассоциированные с ним собственные значения (главные моменты инерции тела). Тогда непосредственно доказыва-ется, что для всякой циклической перестановки индексов (i, j, k) из тройки $(1, 2, 3)$:

$$\delta \mathbf{I}_s(e_i, e_j) = (J_i + J_j - J_k) e_k,$$

где $J_i + J_j - J_k = \text{Trace}(\mathbf{I}_s) - 2J_k$ – удвоенный момент инерции по отношению к главной плоскости, ортогональной вектору e_k .

Выводы:

1. Для реального твердого тела смысл формул (3) состоит в том, что $\delta H_s(X, Y)$ – всегда постоянное векторное поле на пространстве \mathcal{E} , поле моментов “момента сил” равно $2mX(c) \times Y(c) + \delta \mathbf{I}_s(\boldsymbol{\omega}_X, \boldsymbol{\omega}_Y)$.
2. Теорема 2 и формула (2), примененные к H_f , определяют, что для всякой системы твердых тел в произвольном положении $s = (s_a)$ форма кривизны $\boldsymbol{\Omega}$, ассоциированная с динамической связностью, принимает значения в пространстве $X \in \mathfrak{d}$, таком что $X(c_s) = \mathbf{0}$, где c_s – центр масс всей системы в конфигурации s (эти элементы описывают скорости вращения вокруг центра масс всей системы, что естественно с точки зрения динамической интерпретации, данной в разд. 3).

Автор благодарит переводчика за многочисленные обсуждения этой статьи и госпожу Марию Муницыну за проделанную работу по приготовлению текста к печати.

Статья выполнена в рамках научного сотрудничества Вычислительного центра им.А.А.Дородницына РАН и Национальной школой мостов и шоссе, Франция.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шевалье Д.П.* Динамика с Эйлеровой и Лагранжевой точек зрения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. 2000. Т.2. М.: ВЦ РАН. С.40 – 68.
2. *Bourov A. A., Chevallier D. P.* On the Variational Principle of Poincaré, the Poincaré-Chetayev Equations and the Dynamics of Affinely Deformable Bodies // Cahiers du CERMICS no 14, pp. 36-83, ENPC, Paris 1996.

3. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях движения подобно изменяемого тела // Научные записки Казанского университета. 1954. Т. 114. Кн. 8. С. 5-8.
4. *Bourov A. A., Chevallier D. P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // В печати.
5. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // ПММ. 1941. Т.5. Вып.2. С. 253-262.
6. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 373-386.
7. *D. P. Chevallier D. P.* Curvature and Dynamics of an Affinely Deformable Body // Third International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, 23-28 august 1998, Velikie Luky, Russia.
8. *Montgomery R.* Gauge Theory and the Falling Cat // Field Institute Communications. 1993. Vol. 1. P.193 – 218.
9. *Chevallier D. P.* On the foundations of ordinary and generalized rigid body dynamics and the principle of objectivity // Arch. Mech. (Warszawa) 2004. Vol.56. No.4. P. 313-353.
10. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry. Interscience Pub. 1963.
11. *Lichnerowicz A.* Théorie globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie. Rome: Cremonese. 1955.

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ МЕТОДАХ В ЗАДАЧЕ О
ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А.А. Буров, К. Валле, С.Я. Степанов, Д. Фортюне

Рассмотрено применение операторных методов [1–3] в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой, описываемом ортонормальной матрицей поворота и производной от нее. Исследован вопрос об исключении неопределенных множителей. В случае осесимметричного силового поля показано, как можно воспользоваться интегралом кинетического момента для исключения из уравнений Эйлера – Пуассона угловых скоростей.

Обсуждается также вопрос о применении метода Рауса [4,5] в виде, предложенном Ляпуновым [6] (см. также [7]), для понижения порядка уравнений Эйлера – Пуассона с помощью интеграла кинетического момента. Ранее аналогичный метод использован [8–10] для исследования различных задач механики твердого тела.

Ключевые слова: динамика твердого тела, теорема Гамильтона – Кэли, операторные методы.

1. Исключение реакций в механике твердого тела.

Рассмотрим движение твердого тела \mathcal{G} вокруг неподвижной точки O . Пусть $OX_1X_2X_3$ – фиксированная в абсолютном пространстве система координат, а $Ox_1x_2x_3$ – связанная с телом подвижная система координат. Будем считать, что α , β и γ – единичные векторы, направленные вдоль осей $OX_1X_2X_3$. Координаты одного и того же вектора $O\mathcal{X}$ по отношению к $OX_1X_2X_3$

и $Ox_1x_2x_3$ связаны соотношением

$$X = Sx, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где S – ортонормальная матрица. По ее строкам располагаются проекции векторов α , β и γ на оси $OX_1X_2X_3$.

Скорость точки, принадлежащей телу, определяется соотношением

$$V = \dot{X} = \dot{S}x. \quad (1.2)$$

Кинетическая энергия тела имеет вид (интегрирование ведется по массе тела)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int (V, V) dm = \frac{1}{2} \int (\dot{S}x, \dot{S}x) dm = \\ &= \frac{1}{2} [(K\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) + (K\dot{\beta}, \dot{\beta}) + (K\dot{\gamma}, \dot{\gamma})] = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{S}K\dot{S}^T), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где K_{ij} – компоненты матрицы Пуансо K :

$$K_{ij} = \int x_i x_j dm \quad \Leftrightarrow \quad K = \int x \otimes x dm.$$

В силу ортонормальности матрицы S выполнено соотношение

$$S S^T = E, \quad (1.4)$$

где E – единичная матрица 3×3 . Однократное и двукратное дифференцирование (1.4) по времени дает

$$\dot{S} S^T + S \dot{S}^T = 0, \quad (1.5)$$

$$\ddot{S} S^T + 2\dot{S} \dot{S}^T + S \ddot{S}^T = 0. \quad (1.6)$$

Если $U = U(\alpha, \beta, \gamma)$ – потенциал силового поля, то для описания движения можно воспользоваться функцией Лагранжа (суммирование ведется по циклическим перестановкам (α, β, γ))

$$L = T - U + \frac{1}{2} \sum \lambda_\alpha(\alpha, \alpha) + \sum \lambda_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = T - U + \frac{1}{2} \text{tr}(S\Lambda S^T), \quad (1.7)$$

где симметричная матрица множителей Лагранжа имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & \lambda_{\alpha\beta} & \lambda_{\alpha\gamma} \\ \lambda_{\beta\alpha} & \lambda_\beta & \lambda_{\beta\gamma} \\ \lambda_{\gamma\alpha} & \lambda_{\beta\gamma} & \lambda_\gamma \end{pmatrix}.$$

При этом уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}, \quad (\alpha, \beta, \gamma)$$

в явном виде могут быть записаны как

$$K\ddot{\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \lambda_\alpha \alpha + \lambda_{\alpha\beta} \beta + \lambda_{\gamma\alpha} \gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma). \quad (1.8)$$

Здесь и далее выражение (α, β, γ) означает циклическую перестановку указанных величин.

Эти уравнения можно представить в матричном виде

$$K\ddot{S}^T = F + \Lambda S^T, \quad (1.9)$$

где F – матрица компонент потенциальных сил.

Уравнения (1.8) из-за их линейности по переменным α , β и γ удобны для численного исследования [3], особенно если компоненты матрицы F линейно зависят от компонент матрицы S , как, например, в “спутниковом приближении” потенциала сил ньютоновского притяжения.

Однако для аналитических исследований часто желательно исключить из уравнений (1.9) реакции Λ . Принимая во внимание симметричность матриц K и Λ (1.9), получим

$$\ddot{S}^T = \mathcal{K}F + \mathcal{K}\Lambda S^T, \quad \ddot{S} = F^T \mathcal{K} + S\Lambda \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} = K^{-1}. \quad (1.10)$$

Подстановка (1.10) в (1.6) дает

$$(F^T \mathcal{K} + S \Lambda \mathcal{K}) S^T + 2 \dot{S} \dot{S}^T + S (\mathcal{K} F + \mathcal{K} \Lambda S^T) = 0. \quad (1.11)$$

Домножая соотношение (1.11) справа на S и слева - на S^T , представим его в виде линейного неоднородного матричного уравнения Ляпунова относительно матрицы Λ :

$$\Lambda \mathcal{K} + \mathcal{K} \Lambda = G, \quad G = -2 S^T \dot{S} \dot{S}^T S - S^T F^T \mathcal{K} - \mathcal{K} F S. \quad (1.12)$$

2. Операторный метод решения матричного уравнения. Представим уравнение (1.12) в виде

$$\mathcal{L}(\Lambda) = G, \quad \mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{K} \Lambda + \Lambda \mathcal{K}, \quad (2.1)$$

где \mathcal{L} – линейный оператор, действующий в пространстве симметричных матриц. Изучим вопрос о возможности эффективного построения обратного оператора \mathcal{L}^{-1} .

Обозначим \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 собственные векторы матрицы \mathcal{K} , а \varkappa_1 , \varkappa_2 и \varkappa_3 – соответствующие им собственные значения. Матрицы

$$e_{11} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1; \quad e_{12} = \frac{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1}{\sqrt{2}}, \quad (123) \quad (2.2)$$

образуют базис в пространстве симметричных матриц, ортонормированный по отношению к скалярному произведению

$$(\mathcal{K}, \mathcal{K}') = \text{tr}(\mathcal{K} \mathcal{K}').$$

В силу свойств прямого произведения [11] имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e_{11}) &= \mathcal{K}(e_1 \otimes e_1) + (e_1 \otimes e_1) \mathcal{K} = \\ &= \mathcal{K} e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes \mathcal{K} e_1 = 2 \varkappa_1 e_{11}, \end{aligned} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e_{12}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{K} e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes \mathcal{K} e_2 + \mathcal{K} e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes \mathcal{K} e_1] = \\ &= (\varkappa_1 + \varkappa_2) e_{12}. \end{aligned}$$

Это означает, что величины $2\mathfrak{x}_1, 2\mathfrak{x}_2, 2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_1$ – собственные числа оператора \mathcal{L} . Тогда, если

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x})(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x})(\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x})$$

– характеристический многочлен матрицы \mathcal{K} , то характеристический многочлен $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ оператора \mathcal{L} примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{L}}(\mathfrak{x}) &= (2\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x})(2\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x})(2\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}) \times \\ &\quad \times (\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x})(\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x})(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}) = \quad (2.3) \\ &= 8\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\mathfrak{x}/2)\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\sigma - \mathfrak{x}) = \\ &= \mathfrak{x}^6 + p_5\mathfrak{x}^5 + \dots + p_0, \quad \sigma_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3. \end{aligned}$$

Условие существования обратного оператора \mathcal{L}^{-1} имеет вид

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(0) = p_0 = 8\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_1) \neq 0.$$

Для нахождения обратного оператора воспользуемся теоремой Гамильтона – Кэли [11], согласно которой всякий оператор удовлетворяет своему характеристическому многочлену, т.е.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}) = 0. \quad (2.4)$$

Умножая левую и правую части (2.4) на \mathcal{L}^{-1} и перераспределяя слагаемые, имеем

$$p_0\mathcal{L}^{-1} = - \sum_{k=1}^5 p_{k+1}\mathcal{L}^k, \quad p_6 = 1. \quad (2.5)$$

Дальнейшие упрощения можно осуществить с помощью равенств

$$\mathcal{L}^n(G) = \sum_{k=0}^n C_k^n \mathcal{K}^{n-k} G \mathcal{K}^k, \quad (2.6)$$

получающихся из определения (2.1) оператора \mathcal{L} .

Описанный метод допускает простую реализацию с помощью средств компьютерной алгебры и удобен и для численной реализации.

3. Исключение угловых скоростей из уравнений Эйлера. Операторный подход. Описание движения твердого тела в компонентах ортонормальной матрицы поворота S и ее производной по времени может быть также получено из рассмотрения уравнений Эйлера. Кососимметричная матрица угловой скорости тела определяется как

$$\Omega = S^T \dot{S} \iff \dot{S} = S\Omega. \quad (3.1)$$

Дифференцирование по времени второго из соотношений (3.1) дает

$$\ddot{S} = \dot{S}\Omega + S\dot{\Omega} = S(\Omega^2 + \dot{\Omega}), \quad (3.2)$$

откуда

$$\dot{\Omega} = S^T \ddot{S} - \Omega^2 = S^T (\ddot{S} - \dot{S}S^T \dot{S}). \quad (3.3)$$

Уравнения Эйлера, описывающие вращательное движение твердого тела, в матричном виде записываются как (см., например, [12])

$$\begin{aligned} K\dot{\Omega} + \dot{\Omega}K &= [K\Omega + \Omega K, \Omega] + F = \\ &= K\Omega^2 - \Omega^2 K + F, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где кососимметричная матрица момента внешних сил имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_3 & -F_2 \\ -F_3 & 0 & F_1 \\ F_2 & -F_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратными скобками в (3.4) обозначен матричный коммутатор.

Таким образом, если решить уравнение (3.4) относительно $\dot{\Omega}$ и подставить это решение и выражения для Ω (3.1) в (3.2), то получится уравнение, разрешенное относительно \ddot{S} , с правой частью, зависящей от S и \dot{S} .

Для решения уравнения (3.4) относительно $\dot{\Omega}$ воспользуемся следующим фактом из теории операторов. Кососимметричные матрицы

$$k_{12} = \frac{\mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{k}_1}{2}, \quad (123)$$

построенные из собственных векторов \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 матрицы Пуансо K образуют ортонормированный базис в пространстве кососимметричных матриц 3×3 . Если $\Lambda(S) = KS + SK$ – линейный оператор, действующий в пространстве кососимметричных матриц, то

$$\begin{aligned} \Lambda(k_{12}) &= \frac{1}{2} (K\mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{k}_2 - K\mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{k}_1) + \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 \otimes K\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2 \otimes K\mathbf{k}_1) = \\ &= (\mu_1 + \mu_2)k_{12}, \quad (123), \end{aligned}$$

где μ_1 , μ_2 и μ_3 – собственные значения матрицы K , соответствующие собственным векторам \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 .

Характеристический многочлен оператора Λ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Lambda(\mu) &= (\mu_1 + \mu_2 - \mu)(\mu_2 + \mu_3 - \mu)(\mu_3 + \mu_1 - \mu) = \\ &= \mathcal{P}_K(\mu - \sigma_\mu) = p'_0 + p'_1\mu + \dots - \mu^3, \end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_K(\mu)$ – характеристический многочлен матрицы Пуансо K . Оператор Λ оказывается обратимым, если выполнено условие $p'_0 = (\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1) \neq 0$.

Вновь применяя теорему Гамильтона – Кэли, имеем

$$\begin{aligned} -\Lambda^2 + p'_2\Lambda + p'_1 + p'_0\Lambda^{-1} &= 0 \quad \iff \\ p'_0\Lambda^{-1} &= -(-\Lambda^2 + p'_2\Lambda + p'_1). \end{aligned}$$

Подстановка соотношения (2.6) в правую часть позволяет завершить нахождение обратного оператора.

4. Динамика твердого тела в осесимметричном силовом поле. Известны многие задачи динамики твердого тела, уравнения которых приводятся к виду [12]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega} = \frac{\partial L}{\partial \omega} \times \omega + \frac{\partial L}{\partial \gamma} \times \gamma; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \times \omega. \quad (4.1)$$

В этих уравнениях $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии силового поля, $L = L(\omega, \gamma)$ – функция Лагранжа. Все векторные и тензорные величины даны в проекциях на оси связанной с телом системы координат $Ox_1x_2x_3$. Помимо интеграла энергии – Пэнлеве – Якоби и геометрического интеграла

$$\mathcal{J}_0 = \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}, \omega \right) - L = h, \quad \mathcal{J}_2 = \gamma^2 = 1, \quad (4.2)$$

эти уравнения допускают интеграл

$$\mathcal{J}_1 = \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}, \gamma \right) = p_\psi, \quad (4.3)$$

выражающий сохранение проекции вектора кинетического момента $\partial L / \partial \omega$ на ось симметрии. Для интегрирования уравнений (4.1) в общем случае недостает одного первого интеграла.

Воспользуемся интегралом (4.3) для понижения порядка системы. В силу уравнений Пуассона, составляющих вторую подсистему уравнений (4.1), имеет место соотношение (ср. [8])

$$\omega = \dot{\gamma} \times \gamma + \lambda \gamma, \quad (4.4)$$

где λ – произвольная постоянная. Подставим выражение (4.4) в соотношение (4.3) и рассмотрим последнее как уравнение относительно λ . В механике соотношение (4.3) обычно линейно относительно ω , поэтому оно будет линейно относительно λ .

Предположим, что указанное уравнение допускает единственное решение относительно λ :

$$\lambda = \lambda^*(\gamma, \dot{\gamma}; p_\psi). \quad (4.5)$$

Подставляя выражение (4.5) в равенство (4.4), имеем

$$\omega = \dot{\gamma} \times \gamma + \lambda^*(\gamma, \dot{\gamma}; p_\psi)\gamma. \quad (4.6)$$

Подстановка соотношения (4.6) в первую подсистему (5.1) дает уравнения, свободные от угловой скорости ω .

ПРИМЕР. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСТАТА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. Движение гиростата вокруг неподвижной точки описывается уравнениями (4.1) с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\omega, \omega) + (\mathbf{K}, \omega) - U(\gamma),$$

где \mathbf{I} - тензор инерции тела, \mathbf{K} - постоянный вектор гиростатического момента роторов, $U = U(\gamma)$ - потенциал, зависящий от единичного вектора направления осесимметричного силового поля с осью симметрии, направленной вдоль единичного вектора γ . При этом уравнения Эйлера – Пуассона и интеграл (4.3) имеют вид

$$\mathbf{I}\dot{\omega} = (\mathbf{I}\omega + \mathbf{K}) \times \omega + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{J}_1 = \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}, \gamma \right) = (\mathbf{I}\omega + \mathbf{K}, \gamma) = p_\psi. \quad (4.8)$$

Подставляя соотношение (4.4) в (4.8) и решая получившееся уравнение

$$(\mathbf{I}(\dot{\gamma} \times \gamma + \lambda\gamma) + \mathbf{K}, \gamma) = p_\psi$$

относительно λ , имеем

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^*(\gamma, \dot{\gamma}; p_\psi) = \\ &= (\mathbf{I}\gamma, \gamma)^{-1} (p_\psi - (\mathbf{K}, \gamma) - (\mathbf{I}(\dot{\gamma} \times \gamma), \gamma)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Подставляя выражение (4.9) в соотношение (4.6), находим зависимость вектора угловой скорости ω от векторов γ , $\dot{\gamma}$ и p_ψ :

$$\begin{aligned}\omega &= \omega^*(\gamma, \dot{\gamma}; p_\psi) = \\ &= \dot{\gamma} \times \gamma + \gamma(\mathbf{I}\gamma, \gamma)^{-1} (p_\psi - (\mathbf{K}, \gamma) - (\mathbf{I}(\dot{\gamma} \times \gamma), \gamma)).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Подстановка соотношений (4.10) в уравнения Эйлера позволяет представить уравнения движения в виде, не зависящем явно от угловых скоростей и их производных.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лагранжева структура уравнений движения не обязательна для описанного в данном разделе исключения угловых скоростей. Утверждение остается справедливым для уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega} = \frac{\partial L}{\partial \omega} \times \omega + Q, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \times \omega, \quad (4.11)$$

где момент внешних сил Q удовлетворяет условию $(Q, \gamma) = 0$ тождественно, что обеспечивает наличие интеграла (4.3).

ПРИМЕР. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПОТОКЕ ГАЗА. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки в потоке газа. Пусть γ – направленный вдоль потока единичный вектор, $\mathbf{c}(\gamma)$ – вектор, соединяющий неподвижную точку с центроидом тени, оставляемой телом на плоскости, перпендикулярной потоку, $S(\gamma)$ – площадь тени. Движение тела описывается уравнениями [13]

$$\mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\omega \times \omega + f\gamma \times \mathbf{c}(\gamma)S(\gamma), \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (4.12)$$

где f – постоянный параметр, определяющий свойства набегающего потока. Согласно [13] уравнения (4.12) оказываются уравнениями Лагранжа – Пуанкаре лишь при специальном выборе формы тела. Между тем, процедура исключения угловой скорости применима и в этом случае.

5. О собственных числах матрицы реакций. В [2] высказана гипотеза, согласно которой собственные значения матрицы реакций являются первыми интегралами уравнений движения тела по инерции. Покажем, что эта гипотеза верна лишь в случае, когда тело осесимметрично.

Пусть $OX_1X_2X_3$ – система координат, фиксированная в абсолютном пространстве, $Ox_1x_2x_3$ – подвижная система координат, связанная с твердым телом, S – ортогональная матрица, определяющая ориентацию тела, по строкам которой стоят проекции единичных векторов осей неподвижной системы координат на оси подвижной системы координат. Уравнения движения в этом случае могут быть записаны в виде [1]

$$S^T \ddot{R} S = \Lambda, \quad (5.1)$$

где Λ – матрица реакций связей, отвечающих ортогональности матрицы S , а K – симметричная матрица Пуансо, определяющая инертные свойства тела. Кососимметричная матрица угловой скорости тела задается соотношением

$$\omega = S^{-1} \dot{R} \Leftrightarrow \dot{S} = S\omega. \quad (5.2)$$

Соотношение (5.2) позволяет представить соотношение (5.1) в виде

$$(\dot{\omega} + \omega^2) K = \Lambda. \quad (5.3)$$

Пусть оси подвижной системы координат выбраны таким образом, что матрица Пуансо диагональна

$$K = \text{diag}(K_1, K_2, K_3),$$

а матрица угловой скорости имеет вид

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Тогда в силу (5.3) матрица Λ записывается как

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -K_1(\omega_2^2 + \omega_3^2) & K_2(\omega_1\omega_2 - \dot{\omega}_3) & K_3(\omega_1\omega_3 + \dot{\omega}_2) \\ K_1(\omega_1\omega_2 + \dot{\omega}_3) & -K_2(\omega_1^2 + \omega_3^2) & K_3(\omega_2\omega_3 - \dot{\omega}_1) \\ K_1(\omega_1\omega_3 - \dot{\omega}_2) & K_2(\omega_2\omega_3 + \dot{\omega}_1) & -K_3(\omega_2^2 + \omega_1^2) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

При этом производные угловой скорости по времени определяются из уравнений Эйлера

$$(K_2 + K_3)\dot{\omega}_1 = (K_3 - K_2)\omega_2\omega_3; \quad (1, 2, 3). \quad (5.6)$$

Согласно гипотезе из [2] собственные числа матрицы (5.5) – первые интегралы уравнений движения. Но тогда и коэффициенты характеристического многочлена матрицы Λ должны быть первыми интегралами уравнений Эйлера. Этот многочлен имеет вид

$$P(\lambda) = \det(\lambda E - \Lambda) = \lambda^3 + P_1\lambda^2 + P_2\lambda + P_3. \quad (5.7)$$

В том, что в общем случае эти коэффициенты непостоянны вдоль траекторий рассматриваемой системы, можно убедиться непосредственно.

Работа выполнена в рамках программы научного обмена Российской академии наук и Национального Центра Научных Исследований Франции. Исследования российских авторов также поддержаны РФФИ (05-01-00454а) и государственной программой поддержки Ведущих научных школ (НШ-6667.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vallée C., Hamdouni A, Isnard F, Fortuné D.* The equations of motion of a rigid body without parameterization of rotations // J. Appl. Maths Mechs. 1999. Vol.63. No.1. P.25 – 30.
2. *Vallée C., Dumitriu D.* The Lagrange multipliers associated with the rotation matrix characterizing the motion of a rigid body about its centre of mass // J. Appl. Maths Mechs. 2001. Vol.65. No.5. P.731 – 739.

3. *Dumitriu D.* Modélisation dynamique des systèmes articulés par des vecteurs translation et des matrices rotation. Prise en compte des rigidités par des multiplicateurs de Lagrange. Simulation du mouvement à l'aide d'un code C++. Poitiers: Université de Poitiers. 2003. 216 p.
4. *Routh E.J.* A treatise on stability of a given state of motion. London: McMillan, 1877.
5. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of systems of rigid bodies. London: McMillan, 1884.
6. *Lyapunov A.M.* The problem of minimum for a question on stability of figures of equilibrium of a rotating liquid // Collected papers. Tome 3. Moscow: Editorial Board of the Academy of sciences of the USSR. 1959. P.237-360.
7. *Moisseev N.N., Rummyantsev V.V.* Dynamics of a body with cavities containing fluid. Moscow: Nauka. 1965.
8. *Burov A.A., Chevallier D.P.* On Routh reduction and its Application in Rigid Body Dynamics // Z.Angew. Math. Mech. (ZAMM). 1998. Vol.78. No.10. P.696-702.
9. *Burov A.A., Chevallier D.P.* On motion of a rigid body about a fixed point with respect to a rotating frame // Regular and Chaotic Dynamics (RCD). 1998. Vol.3. No.1. P.1-11.
10. *Burov A.A., Chevallier D.P.* The motion of a rigid body in a fluid under the action of central Newtonian attractive forces // J. Appl. Maths Mechs. (PMM). 2001. Vol.65. No.4. P.589 – 604.
11. *Souriau J.M.* Calcul Linéaire. Tome 1. Paris : presses Universitaires de France. 1965. 260 p.

12. *Kozlov V.V.* Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics. Berlin, New York: Springer-verlag. 1996 – 378 p.
13. *Буров А.А., Карапетян А.В.* О движении тела в потоке частиц // Прикладная математика и механика. 1993. Т.57. Вып.2. С.295-299.

К ЗАДАЧАМ О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И
АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЛИпсоИДА

А.П. Блинов, А.С. Сумбатов

Данные задачи приходится решать при моделировании процесса сушки зерна, которая проводится перед закладкой зерна на хранение. В отличие от классического подхода [1], использующего функции Ламе, для однородного тела в форме эллипсоида удобно применить эллиптические координаты и метод сведения к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: теплопроводность, эллипсоид, акустические колебания, функция Ламе.

Обе задачи, указанные в заглавии, приводятся к отысканию собственных значений λ и собственных функций U :

$$\Delta U = \lambda U \quad (\Delta - \text{оператор Лапласа}). \quad (1)$$

Пусть тело (зернышко) ограничено эллипсоидальной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c.$$

Уравнение софокусных поверхностей 2-го порядка

$$\frac{x^2}{a^2 + \vartheta} + \frac{y^2}{b^2 + \vartheta} + \frac{z^2}{c^2 + \vartheta} = 1$$

однозначно (например, в первом октанте) определяет эллиптические координаты

$$\xi = \vartheta_1, \quad \eta = \vartheta_2, \quad \varsigma = \vartheta_3; \quad (\vartheta_1 > -c^2 > \vartheta_2 > -b^2 > \vartheta_3 > -a^2).$$

В этих координатах уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} & (\eta - \varsigma) A \frac{\partial}{\partial \xi} \left(A \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + (\varsigma - \xi) B \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \\ & + (\xi - \eta) C \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left(C \frac{\partial U}{\partial \varsigma} \right) - \frac{\lambda}{8} (\xi - \eta) (\varsigma - \xi) (\eta - \varsigma) U = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A &= [(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(b^2 + \xi)]^{1/2}, \\ B &= [-(a^2 + \eta)(b^2 + \eta)(b^2 + \eta)]^{1/2}, \\ C &= [(a^2 + \varsigma)(b^2 + \varsigma)(b^2 + \varsigma)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Разыскивая решение уравнения (2) методом разделения переменных, т.е. в виде

$$U = L(\xi) M(\eta) N(\varsigma),$$

и применив преобразования, как в [1], получим систему скалярных уравнений

$$\frac{d}{d\xi} \left(A \frac{dL}{d\xi} \right) - \frac{1}{A} \left(\frac{\lambda}{8} \xi^2 + H\xi + K \right) L = 0, \quad (L, M, N) \quad (3)$$

H, K – новые произвольные постоянные, которые примем равными нулю.

Уравнения (3) отличаются от уравнения Ламе [1] наличием квадратичного слагаемого при λ , что не позволяет искать решения в функциях Ламе. Поэтому применим методику [2] приведения уравнения вида (3) к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Пусть выражения

$$h_{11}L(a_1) + h_{12}L'(a_1) = 0, \quad h_{21}L(a_2) + h_{22}L'(a_2) = 0 \quad (4)$$

$$h_{ij} = const, \quad a_1 = -c^2, \quad a_2 = 0,$$

задают краевые условия для уравнения (3). Тогда соответствующее интегральное уравнение

$$L(\chi) - \lambda \int_{a_1}^{a_2} G(s, \chi) \tau(s) L(s) ds = 0, \quad \tau(s) = \frac{1}{8} s^2 / A(s) \quad (5)$$

имеет в качестве ядра функцию Грина

$$G(s, \chi) = \begin{cases} h_1 f_1(s) & (a_1 \leq s < \chi), \\ h_2 f_2(s) & (\chi < s \leq a_2), \end{cases}$$

где $f_1(s)$, $f_2(s)$ — частные решения (3) при $\lambda = 0$, удовлетворяющие соответственно левому и правому граничным условиям (4).

Имеем

$$f_1(s) = [h_{11} l_2(a_1) + h_{12} l_2'(a_1)] l_1(s) - [h_{11} l_1(a_1) + h_{12} l_1'(a_1)] l_2(s),$$

$$f_2(s) = [h_{21} l_2(a_2) + h_{22} l_2'(a_2)] l_1(s) - [h_{21} l_1(a_2) + h_{22} l_1'(a_2)] l_2(s).$$

В этих формулах $l_1(s)$, $l_2(s)$ — частные решения уравнения (3) при $\lambda = 0$. Можно, например, взять

$$l_2(s) = 1, \quad l_1(s) = - \int A^{-1}(s) ds = F[\beta(s), p],$$

где $F[\beta(s), p]$ — эллиптический интеграл первого рода,

$$\beta(s) = \arcsin \sqrt{\frac{c^2 + s}{b^2 + s}}, \quad p = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Согласно [2] величины h_1 и h_2 определяются системой уравнений

$$h_1 f_1(\chi) - h_2 f_2(\chi) = 0, \quad h_1 f_1'(\chi) - h_2 f_2'(\chi) = -A^{-1}(\chi).$$

Если в уравнении (5) положить

$$\sqrt{\tau(s)} \cdot L(s) = \varphi(s), \quad -G(s, \chi) \sqrt{\tau(s) \tau(\chi)} = K(s, \chi),$$

то оно преобразуется в уравнение с симметричным ядром

$$\varphi(\chi) + \lambda \int_{a_1}^{a_2} K(s, \chi) \varphi(s) ds = 0. \quad (6)$$

Для вычисления собственных значений (6) применяется, например, вариационный метод, а для приближенного вычисления собственных функций - метод последовательных приближений. Аналогичным образом решаются уравнения относительно $M(\eta)$, $N(\varsigma)$.

Пусть собственным значениям λ_n , μ_m , ν_k соответствуют решения $L_n(\xi)$, $M_m(\eta)$, $N_k(\varsigma)$, тогда произведения $U_{nmk} = L_n(\xi) M_m(\eta) N_k(\varsigma)$ и линейные комбинации таких произведений будут решениями уравнения (1), а члены ряда

$$U = \sum A_{nmk} U_{nmk},$$

где коэффициенты A_{nmk} определяются из условия нормировки

$$\int_V U_{nmk}^2 dv = 1 \quad (V - \text{объем эллипсоида}),$$

будут собственными функциями исходной задачи (теплопроводности или акустики).

В эллиптических координатах элемент объема dv можно записать в виде [3]

$$dv = \frac{(\xi - \eta)(\xi - \varsigma)(\eta - \varsigma)}{8 A(\xi) B(\eta) C(\varsigma)} d\xi d\eta d\varsigma,$$

и условие нормировки привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} A_{nmk}^2 \left[(\tilde{L}_2 \tilde{M}_1 - \tilde{L}_1 \tilde{M}_2) \tilde{N}_0 + (\tilde{L}_0 \tilde{M}_2 - \tilde{L}_2 \tilde{M}_0) \tilde{N}_1 + \right. \\ \left. + (\tilde{L}_1 \tilde{M}_0 - \tilde{L}_0 \tilde{M}_1) \tilde{N}_2 \right] = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 &= \int_{-c^2}^0 \frac{L_n^2(\xi)}{A(\xi)} d\xi, & \tilde{L}_1 &= \int_{-c^2}^0 \frac{L_n^2(\xi)}{A(\xi)} \xi d\xi, & \tilde{L}_2 &= \int_{-c^2}^0 \frac{L_n^2(\xi)}{A(\xi)} \xi^2 d\xi, \\ \tilde{M}_0 &= \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{M_m^2(\eta)}{B(\eta)} d\eta, & \tilde{M}_1 &= \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{M_m^2(\eta)}{B(\eta)} \eta d\eta, & \tilde{M}_2 &= \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{M_m^2(\eta)}{B(\eta)} \eta^2 d\eta, \\ \tilde{N}_0 &= \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{N_k^2(\varsigma)}{C(\varsigma)} d\varsigma, & \tilde{N}_1 &= \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{N_k^2(\varsigma)}{C(\varsigma)} \varsigma d\varsigma, & \tilde{N}_2 &= \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{N_k^2(\varsigma)}{C(\varsigma)} \varsigma^2 d\varsigma. \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00454, НШ-6667.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Литтлтон Р.А.* Устойчивость вращающихся масс жидкости. Ижевск: РХД. 2001. 239 с.
2. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ. 1962. 352 с.
3. *Kirchhoff G.* Vorlesungen ueber matematische Physik. Bd.1, Mechanik. Leipzig: Tuebner. 1897. = *Кирхгоф Г.* Лекции по математической физике. М.: изд-во АН СССР. 1962. 402 с.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ
НЕСИММЕТРИЧНОГО ТРЕХКОЛЕСНОГО РОБОТА

Т. Ю. Рева

Изучаются вопросы существования, устойчивости и ветвления стационарных движений трехколесного робота на горизонтальной плоскости с учетом несимметричного распределения масс и несимметрии трения в постановке [1,2], а также вопросы существования и устойчивости периодических движений (предельных циклов). Используются общие методы анализа стационарных движений [3-5]. Полученные результаты представлены в виде атласа бифуркационных диаграмм.

Ключевые слова: робот, периодическое движение, устойчивость, трение.

1. Стационарные движения. Рассмотрим задачу о движении трехколесного робота по горизонтальной плоскости [1] (рис.1) в случае, когда центра масс робота не лежит на оси симметрии его корпуса (несимметричный случай). Детальный анализ стационарных движений робота в “обратной” постановке, когда в качестве параметров задачи рассматриваются не управления, а стационарные точки системы и численное обнаружение возможности существования предельных циклов приведено в работе [1].

В настоящей работе, как и в [2], задача о существовании и устойчивости стационарных и периодических движений робота изучается в “прямой” постановке, когда параметрами задачи являются постоянные управления p и q .

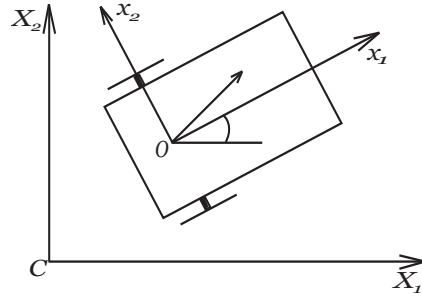


Рис. 1: Робот на горизонтальной плоскости

В отличие от задачи [2], вопросы существования и устойчивости стационарных и периодических движений рассматриваются с учетом асимметрии трения. Уравнения движения робота [1] с точностью до обозначений [2], имеют вид

$$\dot{\nu} + \nu - e\dot{\omega} - \omega^2 + \gamma\omega = p, \quad (A + e^2)\dot{\omega} + \omega - e\dot{\nu} + \omega\nu + \gamma\nu = q, \quad (1.1)$$

$$A > 0, \quad |e| < 1, \quad |\gamma| < 1.$$

Здесь ν — безразмерная скорость середины оси корпуса робота, на которую насажены два ведущих колеса, ω — безразмерная угловая скорость вращения корпуса вокруг вертикали, A — безразмерный момент инерции робота относительно вертикали, проходящей через его центр масс, e — безразмерный параметр, характеризующий смещение центра масс корпуса от его продольной оси симметрии, γ — безразмерный параметр, определяющий асимметрию трения, p и q — безразмерные постоянные (управления). Точкой обозначена производная по безразмерному времени.

Уравнения (1.1) допускают стационарные движения, которые удовлетворяют уравнениям

$$\nu - \omega^2 + \gamma\omega = p, \quad \omega + \omega\nu + \gamma\nu = q. \quad (1.2)$$

Введем безразмерный параметр $k = -(p+1)/3$, и далее будем считать параметрами задачи постоянные управления q и k . При этом уравнения (1.2) примут вид

$$\nu = \omega^2 - \gamma\omega - 1 - 3k, \quad \omega^3 - (3 + \gamma^2)\omega - (3k + 1)\gamma - q = 0. \quad (1.3)$$

Разрешим второе уравнение системы (1.3) относительно q :

$$q = q_k(\omega) = \omega^3 - 3\omega_*\omega - (3k + 1)\gamma, \quad \omega_* = \sqrt{k + \gamma^2/3},$$

$$\frac{dq_k(\omega)}{d\omega} = 3(\omega^2 - \omega_*^2).$$

Функция $q_k(\omega)$ монотонно возрастает на всей числовой оси, принимая любые значения от $-\infty$ до $+\infty$ в случае $k < -(\gamma^2/3)$, а в случае $k > -(\gamma^2/3)$ монотонно возрастает на промежутке $\omega \in (-\infty, -\omega_*)$ и на промежутке $\omega \in (\omega_*, +\infty)$, принимая значения $q_k(\omega) \in (-\infty, q_+)$ и $q_k(\omega) \in (q_-, +\infty)$ соответственно. Здесь $q_{\pm} = \pm 2\omega_*^3 - (3k + 1)\gamma$.

Таким образом, уравнение (1.3) допускает семейства стационарных движений вида

$$\omega = \omega_i(q), \quad \nu = \nu_i(q) = \omega_i^2 - \omega_i\gamma - 3k - 1. \quad (i = 0, 1, 2) \quad (1.4)$$

Движения (1.4) ($i = 0$) существуют при $q_- < q < q_+$ и на них функция $q_k(\omega)$ монотонно убывает; движения (1.4) ($i = 1$) существуют при $q \in (q_-, +\infty)$, ($i = 2$) при $q \in (-\infty, q_+)$ и на них функция $q_k(\omega)$ монотонно возрастает. При этом

$$-\infty < \omega_2 < -\omega_* < \omega_0 < \omega_* < \omega_1 < +\infty.$$

Заметим, что при $k < -\gamma^2/3$ движения (1.4) ($i = 0$) не существуют, а движения (1.4) ($i = 1, 2$) сливаются при $\omega = 0$ $q = (-3k - 1)\gamma$ в одно.

2. Устойчивость стационарных движений. Линеаризованные уравнения возмущенного движения робота в координатах $x = \nu - \nu_i, y = \omega - \omega_i, (i = 0, 1, 2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} + x - ey - (2\omega_i - \gamma)y &= 0, \\ (A + e^2)\dot{y} + (1 + \nu_i)y - e\dot{x} + (\omega_i + \gamma)x &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ω_i, ν_i определяются из уравнения (1.4). Характеристическое уравнение, соответствующее системе (2.1) имеет вид

$$A\lambda^2 + R\lambda + S = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} R = R_i &= A - 3k + \left(\omega_i - \frac{e + \gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{3e}{4} + \gamma\right)^2 + \frac{3e^2}{16} - \frac{5\gamma^2}{4}, \\ S = S_i &= 3\left(\omega_i^2 - k - \frac{\gamma^2}{3}\right). \end{aligned}$$

Отметим, что условия существования стационарных движений системы (1.3) и функция S в отличие от функции R не зависят от параметра e .

Стационарные движения системы (1.1) асимптотически устойчивы, если все коэффициенты уравнения (2.2) положительны, поскольку $A > 0 : R > 0, S > 0$. Значениям ω , при которых $S = 0$, соответствуют точки ветвления стационарных движений (бифуркация Пуанкаре-Четаева), а при значениях ω , для которых $R = 0, S > 0$, рождаются периодические движения (бифуркация Андронова-Хопфа).

Исследуем устойчивость стационарных движений системы (1.4) при различных значениях параметра k .

При $k < k_0, k_0 = -\gamma^2/3$, для любых $\omega \in (-\infty, +\infty)$ справедливо $S > 0$, а при $k > k_0$ функция S может менять знак. Заметим, что $S_i = dq_k(w_i)/dw_i$ и, следовательно, $S = 0$ при $\omega = \omega_{S\pm} = \pm\omega_*$, причем $S < 0$ при $\omega \in (-\omega_*, \omega_*)$, и $S > 0$ при $\omega \in (-\infty, -\omega_*) \cup (\omega_*, +\infty)$.

При

$$\omega_{R\pm} = \frac{e + \gamma}{2} \pm \sqrt{3k + \frac{5\gamma^2}{4} - A - \left(\frac{3e}{4} + \gamma\right)^2 - \frac{3e^2}{16}},$$

$R = 0$ в силу (2.2), причем $\omega_{R\pm}$ существуют только при $k > k_1$, где

$$k_1 = \frac{A}{3} + \frac{e^2}{4} + \frac{e\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{12}.$$

Если $k < k_1$, то $\forall \omega \in (-\infty, +\infty)$ $R > 0$. Если $k > k_1$, то $R < 0$ при $\omega \in (\omega_{R-}, \omega_{R+})$ и $R > 0$ при $\omega \in (-\infty, \omega_{R-}) \cup (\omega_{R+}, +\infty)$.

Соотношения между значениями ω_{S-} , ω_{S+} , ω_{R-} , ω_{R+} существенно зависят от параметров задачи A, e, γ, k . Рассмотрим различные случаи.

1) Пусть $e + \gamma > 0$. Для любых k справедливо: $\omega_{R+} > 0$. Если $k < k_2$, то $\omega_{R+} < \omega_{S+}$. Если $k > k_2$, то $\omega_{R+} > \omega_{S+}$. Если $k < k_3$, то $\omega_{R-} > 0$. Если $k > k_3$, то $\omega_{R-} < 0$. Если $k < k_4$, то $\omega_{R-} > \omega_{S-}$. Если $k > k_4$, то $\omega_{R-} < \omega_{S-}$.

2) Пусть $e + \gamma < 0$. Для любых k справедливо: $\omega_{R-} < 0$. Если $k < k_2$, то $\omega_{R-} > \omega_{S-}$. Если $k > k_2$, то $\omega_{R-} < \omega_{S-}$. Если $k < k_3$, то $\omega_{R+} < 0$. Если $k > k_3$, то $\omega_{R+} > 0$. Если $k < k_4$, то $\omega_{R+} < \omega_{S+}$. Если $k > k_4$, то $\omega_{R+} > \omega_{S+}$, где

$$24k_{2j} = 15e^2 + 30e\gamma + 12A + 7\gamma^2 + 3(-1)^j \sqrt{\rho}, \quad j = 1, 2, \quad 3k_3 = A + 2e\gamma + e^2,$$

$$\rho = 9e^4 + 36e^3\gamma + 8Ae^2 + 54e^2\gamma^2 + 16Ae\gamma + 36e\gamma^3 + 8A\gamma^2 + 9\gamma^4.$$

Соотношение между величинами k_2 и k_3 зависит от величин A и e . Если $A < 2(e + \gamma)^2$, то $k_2 < k_3$, а если $A > 2(e + \gamma)^2$, то $k_2 > k_3$. В зависимости от соотношения величин A, e и γ можно выделить два характерных случая разбиения области изменения параметра k и четыре случая взаимного расположения $\omega_{R\pm}$ и $\omega_{S\pm}$ на этих разбиениях:

1) Если $A < 2(\gamma + e)^2$, тогда $k \in I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5$, где $I_j = (k_j, k_{j+1})$, $j = 1, 5$, $k_0 = -\infty$, $k_5 = +\infty$.

2) Если $A > 2(\gamma + e)^2$, тогда $k \in I_0 \cup I_1 \cup \tilde{I}_2 \cup \tilde{I}_3 \cup \tilde{I}_4 \cup I_5$, где $\tilde{I}_2 = (k_1, k_3)$, $\tilde{I}_3 = (k_3, k_2)$, $\tilde{I}_4 = (k_2, k_4)$;

Рассмотрим случай $e + \gamma > 0$. При любых k справедливо: $\omega_{R+} > 0$. На интервалах I_2 и \tilde{I}_2 : $\omega_{R-} > 0, \omega_{R+} < \omega_{S+}$. На интервале I_3 : $\omega_{R+} > \omega_{S+}$, $\omega_{R-} > 0$, а на интервале \tilde{I}_3 : $\omega_{R+} < \omega_{S+}$, $\omega_{R-} < 0$, $\omega_{R-} > \omega_{S-}$. На интервалах I_4 и \tilde{I}_4 : $\omega_{R+} > \omega_{S+}$, $\omega_{R-} < 0$, $\omega_{R-} > \omega_{S-}$. На интервале I_5 : $\omega_{R+} > \omega_{S+}$, $\omega_{R-} < 0$, $\omega_{R-} < \omega_{S-}$.

Рассмотрим случай $e + \gamma < 0$. При любых k справедливо: $\omega_{R-} < 0$. На интервалах I_2 и \tilde{I}_2 : $\omega_{R-} > \omega_{S-}$, $\omega_{R+} < 0$. На интервале I_3 : $\omega_{R-} < \omega_{S-}$, $\omega_{R+} < 0$, а на интервале \tilde{I}_3 : $\omega_{R-} > \omega_{S-}$, $\omega_{R+} > 0$, $\omega_{R+} < \omega_{S+}$. На интервалах I_4 и \tilde{I}_4 : $\omega_{R-} < \omega_{S-}$, $\omega_{R+} > 0$, $\omega_{R+} < \omega_{S+}$. На интервале I_5 : $\omega_{R-} < \omega_{S-}$, $\omega_{R+} > 0$, $\omega_{R+} > \omega_{S+}$.

Для каждого интервала изменения параметра k может быть построена бифуркационная диаграмма Пуанкаре-Четаева на плоскости (q, ω) . Если $e + \gamma \neq 0$, то атлас бифуркационных диаграмм содержит диаграммы четырех различных видов БД-1, БД-2, БД-3, БД-4. Причем, диаграммы БД-1, БД-2, БД-4 совпадают, а различия существуют только в БД-3.

БД-1 (рис. 1а, 1б) имеет место при $k < k_0$ (I_0). Существует единственное стационарное движение и оно асимптотически устойчиво при любых значениях q, ω .

БД-2 (рис. 2а, 2б) имеет место при $k \in (k_0, k_2)$ ($I_1, I_2, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$) вне зависимости от параметров A, e и γ . Стационарные движения (1.4) ($i = 0$) всегда неустойчивы, а стационарные движения (1.4) ($i = 1, 2$) всегда асимптотически устойчивы. Бифуркация Пуанкаре-Четаева реализуется при $\omega = \omega_{S\pm} = \pm\omega_*$.

БД-3 имеет место при $k \in (k_2, k_4)$ (I_3, I_4, \tilde{I}_4).

Рассмотрим случай $e + \gamma > 0$ (рис. 3-1а, рис. 3-1б). Стационарные движения (1.4) ($i = 0$) всегда неустойчивы; стационарные движения (1.4) ($i = 2$) всегда асимптотически устойчивы, а стационарные движения (1.4) ($i = 1$) асимптотически устойчивы

только при $\omega \in (\omega_{R+}, +\infty)$. Бифуркация Пуанкаре-Четаева реализуется при $\omega = \omega_{S-} = -\omega_*$. При значениях $\omega_1(q) = \omega_{R+}$ от семейства стационарных движений (1.4) ($i = 1$) ответвляются периодические движения (бифуркация Андронова-Хопфа). На фазовой плоскости (ω, ν) им соответствуют предельные циклы.

Рассмотрим случай $e + \gamma < 0$ (рис. 3-2а, рис. 3-2б). Стационарные движения (1.4) ($i = 0$) всегда неустойчивы; стационарные движения (1.4) ($i = 1$) всегда асимптотически устойчивы, а стационарные движения (1.4) ($i = 2$) асимптотически устойчивы только при $\omega \in (-\infty, \omega_{R-})$. Бифуркация Пуанкаре-Четаева реализуется при $\omega = \omega_{S+} = \omega_*$. При значениях $\omega_2(q) = \omega_{R-}$ от семейства стационарных движений (1.4) ($i = 2$) ответвляются периодические движения (бифуркация Андронова-Хопфа). На фазовой плоскости (ω, ν) им соответствуют предельные циклы.

БД-4 (рис. 4а, рис. 4б) имеет место при $k > k_4$ (I_5). Стационарные движения (1.4) ($i = 0$) всегда неустойчивы; стационарные движения (1.4) ($i = 2$) асимптотически устойчивы только при $\omega \in (-\infty, \omega_{R-})$, а стационарные движения (1.4) ($i = 1$) асимптотически устойчивы только при $\omega \in (\omega_{R+}, +\infty)$. При значениях $\omega_1(q) = \omega_{R+}$, $\omega_2(q) = \omega_{R-}$ от семейства стационарных движений (1.4) ($i = 1, 2$) ответвляются периодические движения (бифуркация Андронова-Хопфа). На фазовой плоскости (ω, ν) им соответствуют предельные циклы.

Таким образом, атлас бифуркационных диаграмм Пуанкаре-Четаева дает наглядное представление о количестве и об устойчивости стационарных движений трехколесного робота в зависимости от выбранных параметров задачи q и k . Показано существование точек бифуркации Андронова-Хопфа и определены параметры, при которых возможны периодические движения трехколесного робота в случае, когда центр масс робота не лежит на оси симметрии его корпуса (несимметричный случай).

3. Устойчивость периодических решений. Аналитически докажем, что все периодические движения трехколесного

робота неустойчивы. Для этого так же, как и в [3], воспользуемся методикой [6], которая предполагает анализ полных нелинейных уравнений возмущенного движения системы (1.1).

Полагая $\nu = \nu_i(q) + x = \omega_i(q)^2 - \gamma\omega_i - 1 - 3k$, $\omega = \omega_i(q) + y$, ($i = 1, 2$) получим полные нелинейные уравнения возмущенного (в окрестности стационарной точки $\omega_i(q)$, $\nu_i(q)$) движения системы (1.1).

$$\begin{aligned} \dot{x} + x - e\dot{y} - (2\omega_i - \gamma)y - y^2 &= 0, \\ (A + e^2)\dot{y} - e\dot{x} + (\omega_i + \gamma)x + (\omega_i^2 - 3k - \omega_i\gamma)y + xy &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Переходя к новому времени с помощью соотношений $A\dot{y} = y'$, $A\dot{x} = x'$ и разрешая уравнения (3.1) относительно старших производных приведем полные уравнения возмущенного движения к виду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad y' = cx + dy + b_{11}xy + b_{02}y^2, \quad (3.2) \\ a &= -A - e^2 - e(\omega_i + \gamma), \quad d = -\omega_i^2 + 3k + (2e + \gamma)\omega_i - e\gamma, \\ c &= -\omega_i - e - \gamma, \quad b = -e(\omega_i^2 - 3k - \omega_i\gamma) + 2(A + e^2)\omega_i - (A + e^2)\gamma \\ a_{11} &= -e, \quad a_{02} = A + e^2, \quad b_{11} = -1, \quad b_{02} = e. \end{aligned}$$

Согласно [6], число Ляпунова для системы (3.2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\pi}{bS\sqrt{S}}[ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + abb_{11}^2 + c^2(a_{11}a_{02} + \\ &\quad + 2a_{02}b_{02}) - 2acb_{02}^2 + b_{11}b_{02}(bc - 2a^2)]. \end{aligned}$$

Подставляя значения коэффициентов системы (3.2) в выражение для L получим:

$$L = -\frac{\pi A}{bS\sqrt{S}}[A(e - 3\omega_i) - e\omega_i\gamma + e^3 + e\omega_i^2 - 3ek + 2e^2\gamma - e^2\omega_i].$$

Знак L надо вычислить в точках бифуркации Андронова-Хопфа, т. е. при выполнении условий существования стационарных движений (1.4) и бифуркаций Андронова-Хопфа:

$$\omega^3 - (3k + \gamma^2)\omega - (3k + 1)\gamma - q = 0, \quad (3.3)$$

$$R = A - 3k + \left(\omega_i - \frac{e + \gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{3e}{4} + \gamma\right)^2 + \frac{3e^2}{16} - \frac{5\gamma^2}{4} = 0, \quad (3.4)$$

$$S = 3(\omega_i^2 - 3\omega_*) > 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{sign}L|_{(3.3),(3.4)} &= \text{sign}[-b]|_{(3.3),(3.4)} \times \\ &\times \text{sign}[e^3 + e^2(2\gamma - \omega_i) - e(\omega_i\gamma - \omega_i^2 + 3k) + A(e - 3\omega_i)]|_{(3.3),(3.4)}. \end{aligned}$$

Можно показать, что при выполнении (3.3), (3.4), с учетом того, что $R = 0$ имеем:

$$\text{sign}[e^3 + e^2(2\gamma - \omega_i) - e(\omega_i\gamma - \omega_i^2 + 3k) + A(e - 3\omega_i)] = -3A^2\omega_i,$$

и, следовательно,

$$\text{sign}L|_{(3.3),(3.4)} = \begin{cases} -\text{sign}[-b]|_{(3.3),(3.4)}, & \text{при } \omega_i = \omega_{R+} > 0, \\ \text{sign}[-b]|_{(3.3),(3.4)}, & \text{при } \omega_i = \omega_{R-} < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Осталось определить знак b .

$$b|_{\omega_i=\omega_{R\pm}} = 2Ae + \frac{3\gamma e^2}{2}(1 + e) \pm (2A + e^2)\sqrt{3k + \frac{\gamma^2}{4} - A - \frac{3e^2}{4} - \frac{3e\gamma}{2}},$$

$$\frac{db}{dk} = \pm \frac{3}{2} \frac{2A + e^2}{\sqrt{3k + \frac{\gamma^2}{4} - A - \frac{3e^2}{4} - \frac{3e\gamma}{2}}} \gtrless 0,$$

таким образом $b|_{\omega_i=\omega_{R+}}$ возрастает по k при фиксированных A, e, γ , а $b|_{\omega_i=\omega_{R-}}$ убывает по k при фиксированных A, e и γ .

Бифуркации Андронова-Хопфа существуют только при условии $k > k_2$, т. е. в случаях БД-3 и БД-4. Причем, в случае БД-3 существует только одна точка бифуркации: $\omega = \omega_{R+}$ при $(e+\gamma) > 0$ и $\omega = \omega_{R-}$ при $(e+\gamma) < 0$. В случае БД-4 бифуркации Андронова-Хопфа реализуются при $\omega = \omega_{R\pm}$ вне зависимости от параметров e и γ .

Поэтому для случая (БД-3, $k \in (k_2, k_4)$) рассмотрим $b|_{k=k_2}$:

1) Рассмотрим случай $\omega_i = \omega_{R+}$. При $A = 0$ справедливо $b = 3e^2(\gamma+e)/2$ и $b > 0$ при $e+\gamma > 0$ (рис. 5-а). При дальнейшем увеличении A кривая $b = 0$ будет опускаться относительно прямой $e+\gamma = 0$, а при $A = 10$ опустится ниже области определения e и γ . К примеру, значениям A равным 0.1, 1, и 4 соответствуют рис. 5-б), 5-в) и 5-г) соответственно. Область, соответствующая $b > 0$, располагается выше кривой $b = 0$, а так как $\omega = \omega_{R+}$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа только в случае $(e + \gamma) > 0$, то $b|_{k=k_2} > 0$ при всех значениях параметров. Так как $b|_{\omega_i=\omega_{R+}}$ возрастает по k , то $b > 0$ для (БД-3, $\omega_i = \omega_{R+}$).

2) Рассмотрим случай $\omega_i = \omega_{R-}$. При $A = 0$ справедливо $b = 3e^2(\gamma + e)/2$ и $b < 0$ при $e + \gamma < 0$ (рис. 5-а). При дальнейшем увеличении A кривая $b = 0$ будет подниматься относительно прямой $e + \gamma = 0$, а при $A = 10$ опустится ниже области определения e и γ . К примеру, значениям A равным 0.1, 1, и 4 соответствуют рис. 6-б), 6-в) и 6-г) соответственно. Область, соответствующая $b < 0$, располагается ниже кривой $b = 0$, а т. к. $\omega = \omega_{R-}$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа только в случае $(e + \gamma) < 0$, то $b|_{k=k_2} < 0$ при всех значениях параметров. И т. к. $b|_{\omega_i=\omega_{R-}}$ убывает по k , то $b < 0$ для (БД-3, $\omega_i = \omega_{R-}$).

Рассмотрим теперь случай (БД-4, $k > k_4$). При $\omega_i = \omega_{R+}$ уравнение $b|_{\omega_i=\omega_{R+}, k=k_4} = b(e, \gamma, A) = 0$ в трехмерном пространстве (e, γ, A) представляет собой поверхность. Область, соответствующая параметрам $e \in (-1, 1)$, $\gamma \in (-1, 1)$, $A > 0$, находится выше этой поверхности (рис. 7-а) и на ней справедливо соот-

ношение $b > 0$. То есть $b|_{\omega_i=\omega_{R+}, k=k_4} > 0$ при всех значениях параметров. И поскольку $b|_{\omega_i=\omega_{R+}}$ возрастает по k , то $b > 0$ для (БД-4, $\omega_i = \omega_{R+}$).

При $\omega_i = \omega_{R-}$ (БД-4) уравнение $b|_{\omega_i=\omega_{R-}, k=k_4} = b(e, \gamma, A) = 0$ в трехмерном пространстве (e, γ, A) представляет собой поверхность. Область, соответствующая параметрам задачи $e \in (-1, 1)$, $\gamma \in (-1, 1)$, $A > 0$, находится выше этой поверхности и на ней справедливо соотношение $b < 0$. Т. е. $b|_{\omega_i=\omega_{R-}, k=k_4} < 0$ при всех значениях параметров. И поскольку $b|_{\omega_i=\omega_{R-}}$ убывает по k , то $b < 0$ для (БД-4, $\omega_i = \omega_{R-}$).

Следовательно, $b > 0$ при $\omega_i = \omega_{R+}$ и $b < 0$ при $\omega_i = \omega_{R-}$. Тогда из (3.5) получаем, что $signL|_{(3.3),(3.4)} > 0$. Это значит [6], что периодические движения трехколесного робота с учетом несимметричного распределения масс существуют при значениях q , меньших критических, т. е. таких, для которых $R = 0 : (q_{R-}, q_{R+})$, $q_{R\pm} = q_k(\omega_{R\pm})$. В силу этого периодические движения, ответвляющиеся от стационарных движений $\omega_{1,2}(q)$, $\nu_{1,2}(q)$, существуют при $k > k_3$, и являются неустойчивыми. Эти выводы согласуются с результатами работы [1], в которой численно было показано существование и неустойчивость предельных циклов в рассматриваемой задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буданов В.М., Девянин Е.А. О движении колесных роботов // ПММ. 2003. Т. 67. ь 2. С.244-255.
2. Карапетян А.В., Салмина М.А. Параметрический анализ динамики несимметричного трехколесного робота// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. Под ред. В.В. Румянцева, С.Я. Степанова, А.А. Бутова. М.:ВЦ РАН. 2006. С. 3-12.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: АН СССР. 1962. 535 с.

4. *Марсен Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир. 1980. 368 с.
5. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС. 1998. 165 с.
6. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи области устойчивости. М.: Наука. 1984. 176 с.

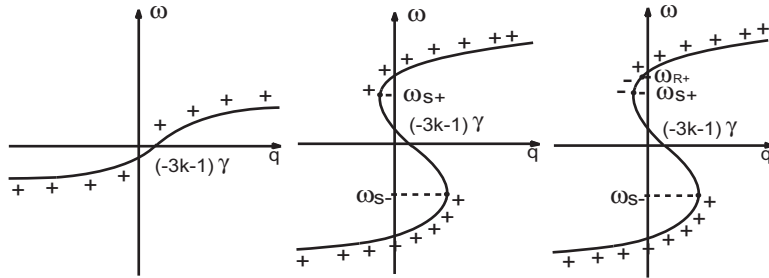


Рис. 1а (БД-2)

Рис. 2а (БД-2)

Рис. 3-1а (БД-2)

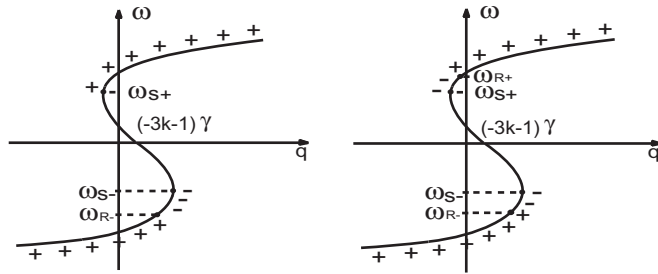


Рис. 3-2а (БД-2)

Рис. 4а (БД-2)

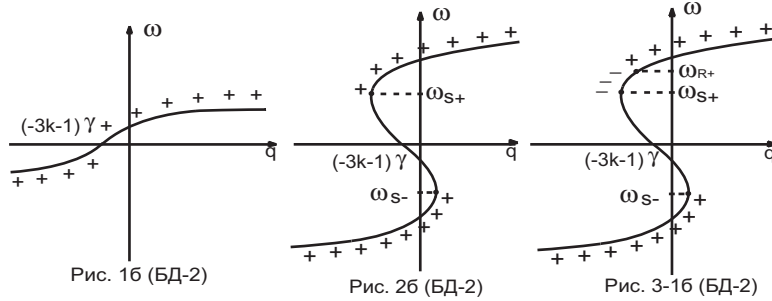


Рис. 1б (БД-2)

Рис. 2б (БД-2)

Рис. 3-1б (БД-2)

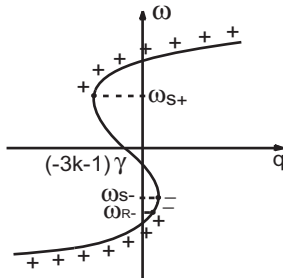


Рис. 3-2б (БД-2)

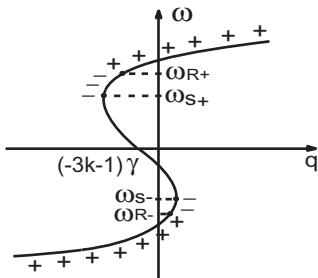


Рис. 4б (БД-2)

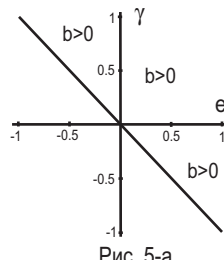


Рис. 5-а

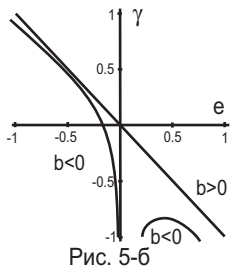


Рис. 5-б

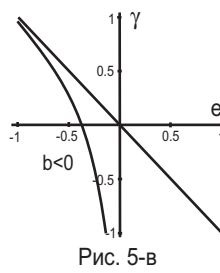


Рис. 5-в

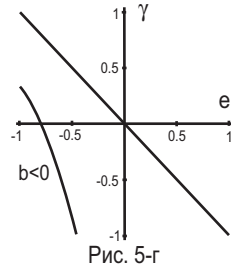


Рис. 5-г

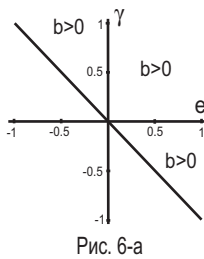


Рис. 6-а

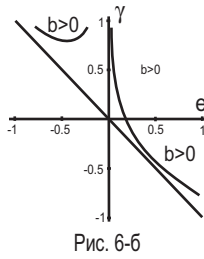


Рис. 6-б

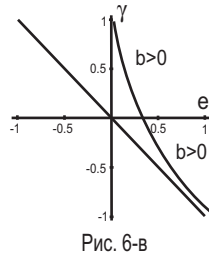


Рис. 6-в

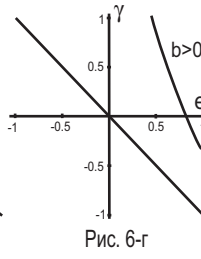


Рис. 6-г

АВТОКОЛЕБАНИЯ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ МОДЕЛЬЮ СУХОГО ТРЕНИЯ

С. В. Хизгияев

В настоящей работе исследуются автоколебания системы, моделирующей движение струны в скрипичных музыкальных инструментах, связанные с наличием сухого трения между струной и смычком. Рассматривается кусочно-постоянная модель сухого трения [1-3]. Работа является продолжением исследований [1-4]. В работе [4] изучена кусочно-кубическая модель сухого трения, предложен метод вывода приближенных, аналитических, усредненных уравнений. Однако, результаты исследования этих усредненных уравнений не приведены. В данной работе найдены аналитические решения для главных колебаний и записаны условия их существования. Найдены предельные циклы: прямой и обратный, исследованы их свойства, построен фазовый портрет и формы колебаний.

Ключевые слова: автоколебание, предельный цикл, сухое кулоновское трение, stick-slip.

1. Постановка задачи. Рассмотрим автономную, автоколебательную систему, состоящую из двух грузов с массами m_1 и m_2 . Груз m_1 соединен невесомой линейной пружиной с жесткостью k_1 с неподвижной стенкой. Груз m_2 находится на горизонтальной ленте, движущейся с постоянной скоростью $V_0 \geq 0$ под действием внешнего привода. Между собой грузы соединены невесомой линейной пружиной жесткости k_2 . Лента моделирует движение смычка, первый груз — деку, второй груз — струну.

Смещения грузов от положения, в котором пружины недеформированы, обозначим через x_1 и x_2 (рис.1). При $x_1 = x_2 = 0$ в отсутствие силы трения система находится в устойчивом положении равновесия. Трением о воздух и внутренним трением в пружинах пренебрегаем. Примем кусочно-постоянную модель

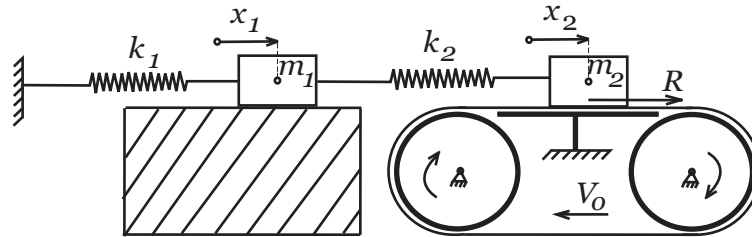


Рис. 1: Схема модели

сухого трения R между лентой и грузом m_2 из [1-3] (рис.2)

$$R = \begin{cases} F_s & \text{при } x'_2 < V_0, \\ F_s & \text{при } x'_2 = V_0 \text{ и } k_2(x_2 - x_1) > F_r, \\ k_2(x_2 - x_1) & \text{при } x'_2 = V_0 \text{ и } |k_2(x_2 - x_1)| \leq F_r, \\ -F_s & \text{при } x'_2 = V_0 \text{ и } k_2(x_2 - x_1) < -F_r, \\ -F_s & \text{при } x'_2 > V_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где F_s и F_r — силы трения скольжения и покоя, пропорциональные нормальной составляющей давления, действующего между поверхностями со стороны груза на ленту. Сила сухого трения является разрывной функцией, зависящей от скорости x'_2 и от разности координат $(x_2 - x_1)$ грузов. При $F_r = F_s$ сухое трение называется “кулоновским”. В данной работе рассмотрен случай $F_r \geq F_s$.

В [4] задача исследовалась в случае постоянства амплитуды колебаний, когда отношение частот есть рациональное число.

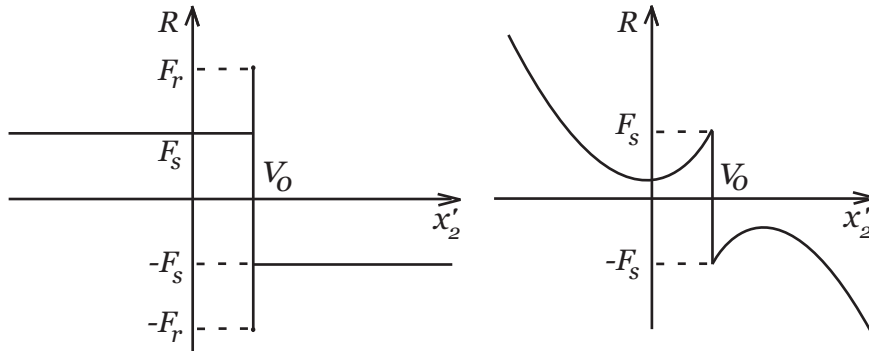


Рис. 2: Кусочно–постоянная [1-3] и кусочно–кубическая [4-9] модели сухого трения

Там рассматривалась кусочно-кубическая модель сухого “кулоновского”, трения (рис.2)

$$R = -m_2 g (\mu_0 \operatorname{sign}(V_0 - x'_2) - \mu_1 (V_0 - x'_2) + \mu_2 (V_0 - x'_2)^3), \quad (1.2)$$

где μ_0, μ_1, μ_2 — это некоторые коэффициенты трения. Эта модель сухого трения рассматривается также в работах [5-9].

2. Уравнения движения. Движение рассматриваемой системы (рис.1) описывается тремя системами дифференциальных уравнений. В случае $\dot{x}_2 < V$ уравнения движения имеют вид

$$m_1 x_1'' + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0, \quad m_2 x_2'' - k_2 (x_1 - x_2) = F_s, \quad (2.1)$$

где $d(\circ)/dt' = (\circ)'$. Обезразмерим время с помощью замены

$$t = \omega_3 t', \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}}, \quad \frac{d(\circ)}{dt} = (\circ)', \quad V = \frac{V_0}{\omega_3}. \quad (2.2)$$

Тогда уравнения движения (2.1) с учетом (2.2) примут вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 - \chi x_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \eta \chi (x_2 - x_1) = \eta U, \quad (2.3)$$

где

$$\chi = \frac{k_2}{k_1 + k_2}, \quad \eta = \frac{m_1}{m_2}, \quad U = \frac{F_s}{k_1 + k_2}, \quad U_r = \frac{F_r}{k_1 + k_2}. \quad (2.4)$$

Обезразмерим систему, приняв в качестве одной из единиц измерения величину U и во всем последующем изложении полагаем $U = 1$.

С помощью вещественного линейного преобразования

$$x_1 = a(z_1 \cos \alpha - z_2 \sin \alpha), \quad x_2 = b(z_1 \sin \alpha + z_2 \cos \alpha),$$

$$a = \sqrt{\chi}, \quad b = \sqrt{\chi\eta}, \quad D = (\chi\eta - 1)^2 + 4\chi^2\eta,$$

$$\cos 2\alpha = (\chi\eta - 1)/\sqrt{D}, \quad \sin 2\alpha = 2\chi\sqrt{\eta}/\sqrt{D},$$

$$c_\alpha = \cos \alpha = \sqrt{(1 + \cos 2\alpha)/2}, \quad s_\alpha = \sin \alpha = \sqrt{(1 - \cos 2\alpha)/2},$$

перейдем к нормальным координатам (z_1, z_2) , в которых уравнения (2.3) имеют вид

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 - \eta s_\alpha / \sqrt{\chi\eta} = 0, \quad \ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 - \eta c_\alpha / \sqrt{\chi\eta} = 0, \quad (2.5)$$

$$\omega_1^2 = (1 + \chi\eta - \sqrt{D})/2, \quad \omega_2^2 = (1 + \chi\eta + \sqrt{D})/2.$$

При этом

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \chi\eta(1 - \chi), \quad \omega_2^2 - \omega_1^2 = \sqrt{D}, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = 1 + \chi\eta. \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что $\omega_1 \neq \omega_2$ при любом значении параметров, так как иначе это приводит к условиям $\chi\eta = 1$ и $\chi^2\eta = 0$, которые противоречат друг другу.

Решение системы уравнений (2.5) имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = e_{11} \sin(\omega_1 t + e_{12}) + \eta s_\alpha / (\omega_1^2 \sqrt{\chi\eta}), \\ z_2 = e_{21} \sin(\omega_2 t + e_{22}) + \eta c_\alpha / (\omega_2^2 \sqrt{\chi\eta}), \end{cases} \quad (2.7)$$

где значения e_{ij} задаются начальными условиями. Для сокращения записи введем обозначения

$$\begin{aligned} s_i &= \sin(\omega_i t), \quad c_i = \cos(\omega_i t), \quad i = 1, 2 \\ c &= \cos t, \quad s = \sin t, \\ h_1 &= 1/(1 - \chi), \quad h_2 = 1/\chi(1 - \chi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тогда в исходных переменных (x_1, x_2) решение системы уравнений (2.3) примет вид

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{\chi}(e_1 s_1 c_\alpha + e_2 c_1 c_\alpha - e_3 s_2 s_\alpha - e_4 c_2 s_\alpha) + h_1, \\ x_2(t) = \sqrt{\chi\eta}(e_1 s_1 s_\alpha + e_2 c_1 s_\alpha + e_3 s_2 c_\alpha + e_4 c_2 c_\alpha) + h_2, \end{cases} \quad (2.9)$$

где величины e_j задаются начальными условиями

$$\begin{cases} e_1 = [\dot{x}_2(0)s_\alpha/\sqrt{\chi\eta} + \dot{x}_1(0)c_\alpha/\sqrt{\chi}]/\omega_1, \\ e_2 = (x_2(0) - h_2)s_\alpha/\sqrt{\chi\eta} + (x_1(0) - h_1)c_\alpha/\sqrt{\chi}, \\ e_3 = [\dot{x}_2(0)c_\alpha/\sqrt{\chi\eta} - \dot{x}_1(0)s_\alpha/\sqrt{\chi}]/\omega_2, \\ e_4 = (x_2(0) - h_2)c_\alpha/\sqrt{\chi\eta} - (x_1(0) - h_1)s_\alpha/\sqrt{\chi}. \end{cases} \quad (2.10)$$

В случае $\dot{x}_2 > V$ система уравнений имеет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 - \chi x_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \eta\chi(x_2 - x_1) = -\eta. \quad (2.11)$$

Решение системы (2.11) получается из случая $\dot{x}_2 < V$ заменой η на $-\eta$ в правой части второго уравнения (2.11), то есть заменой h_1 на $-h_1$ и h_2 на $-h_2$ в (2.9) и в (2.10).

В случае $\dot{x}_2 = V$ при выполнении условия нахождения в этом режиме

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq U_r/\chi, \quad (2.12)$$

система уравнений принимает вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 - \chi x_2 = 0, \quad \chi(x_2 - x_1) = F/(k_1 + k_2), \quad (2.13)$$

где $F_s \leq F \leq F_r$. Система (2.13) имеет решение

$$\begin{cases} x_1(t) = (\dot{x}_1(0) - \chi V)s + (x_1(0) - \chi x_2(0))c + \chi Vt + \chi x_2(0), \\ x_2(t) = Vt + x_2(0). \end{cases} \quad (2.14)$$

Проследим, как происходит движение исследуемой автоколебательной системы. Пусть в начальный момент $\dot{x}_2(0) > V$ и пусть в момент $t = t_1$ выполнено условие $\dot{x}_2(t_1) = V$.

Если $x_2(t_1) - x_1(t_1) > U_r/\chi$, то скорость второго тела относительно движущейся ленты поменяет знак ($\dot{x}_2 < V$), и движение относительно ленты начнется в обратном направлении в силу системы дифференциальных уравнений (2.3). При этом начальными условиями такого движения будут те значения координат и скоростей первого и второго грузов, которыми они обладали в конце предыдущего этапа движения. Это движение будет продолжаться до момента $t = t_2$, в котором $\dot{x}_2(t_2) = V$, и будет выполняться либо условие $x_2(t_2) - x_1(t_2) \geq -U_r/\chi$, либо $x_2(t_2) - x_1(t_2) < -U_r/\chi$. В случае выполнения первого неравенства движение в следующий момент времени будет описываться системой (2.13), в случае второго неравенства движение в следующий момент времени будет описываться системой уравнений (2.11).

Если в момент времени $t = t_1$ выполняется условие $x_2(t_1) - x_1(t_1) \leq U_r/\chi$, то второй груз будет двигаться вместе с лентой и движение описывается системой (2.13). Это движение будет продолжаться до момента $t = t_3$, в который $x_2(t_3) - x_1(t_3) = U_r/\chi$. Затем система входит в режим $\dot{x}_2 > V$, либо в режим $\dot{x}_2 < V$. И так далее.

3. Главные колебания. Если при заданных χ, η выполняется условие $\dot{x}_2 < V$ для любого t , то система находится только в одном режиме с постоянной силой трения. Имеются два периодических движения

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{\chi} (e_1 \sin(\omega_1 t)c_\alpha + e_2 \cos(\omega_1 t)c_\alpha) + h_1, \\ x_2(t) = \sqrt{\chi\eta}(e_1 \sin(\omega_1 t)s_\alpha + e_2 \cos(\omega_1 t)s_\alpha) + h_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

при

$$\dot{x}_2(0)c_\alpha/\sqrt{\eta} = \dot{x}_1(0)s_\alpha, \quad (x_2(0) - h_2)c_\alpha/\sqrt{\eta} = (x_1(0) - h_1)s_\alpha$$

и

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{\chi} (-e_3 \sin(\omega_2 t) s_\alpha - e_4 \cos(\omega_2 t) s_\alpha) + h_1, \\ x_2(t) = \sqrt{\chi \eta} (e_3 \sin(\omega_2 t) c_\alpha + e_4 \cos(\omega_2 t) c_\alpha) + h_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

при

$$\dot{x}_2(0) s_\alpha / \sqrt{\eta} = -\dot{x}_1(0) c_\alpha, \quad (x_2(0) - h_2) s_\alpha / \sqrt{\eta} = -(x_1(0) - h_1) c_\alpha.$$

Эти периодические движения (3.1) и (3.2) отвечают колебаниям системы около положения равновесия $(x_1, x_2) = (h_1, h_2)$. Такие колебания называют главными [3], так как для них отношение

$$\frac{x_1(t) - h_1}{x_2(t) - h_2} = const$$

при любом t в случае (3.1) и в случае (3.2). Полученные периодические решения получаются смещением главных колебаний в случае отсутствия силы трения вдоль x_1 на h_1 и вдоль x_2 на h_2 (рис.3). Линию $(x_1(t), x_2(t))$ на плоскости (x_1, x_2) называют главной траекторией [3].

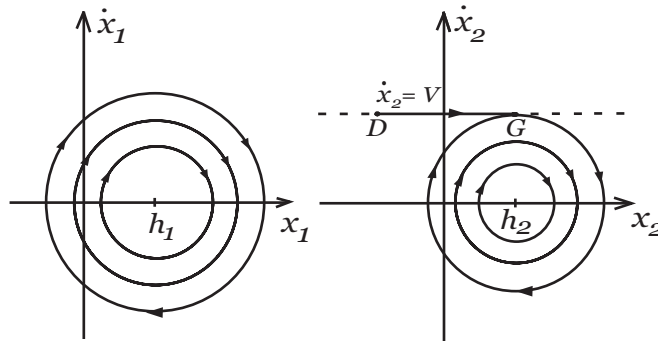


Рис. 3: Главные колебания

Рассмотрим предельный случай, когда траектория главных колебаний в фазовом пространстве касается в одной точке прямой $\dot{x}_2 = V$. В этом случае (рис.3) в силу автономности системы начальные условия для (3.1) задаются, как

$$x_1(0) = h_1, x_2(0) = h_2, \dot{x}_1(0) = Vc_\alpha/\sqrt{\eta}s_\alpha, \dot{x}_2(0) = V, \quad (3.3)$$

а начальные условия для (3.2) задаются, как

$$x_1(0) = h_1, x_2(0) = h_2, \dot{x}_1(0) = -Vs_\alpha/\sqrt{\eta}c_\alpha, \dot{x}_2(0) = V. \quad (3.4)$$

Такой случай возможен когда $h_2 - h_1 = U_r/\chi$, то есть, в силу (2.8) когда

$$U_r = 1 \quad (F_s = F_r). \quad (3.5)$$

4. Предельные циклы. Исследуем свойства искомого периодического кусочно-гладкого решения в общем случае поведения системы. На основании свойств фазовых траекторий при

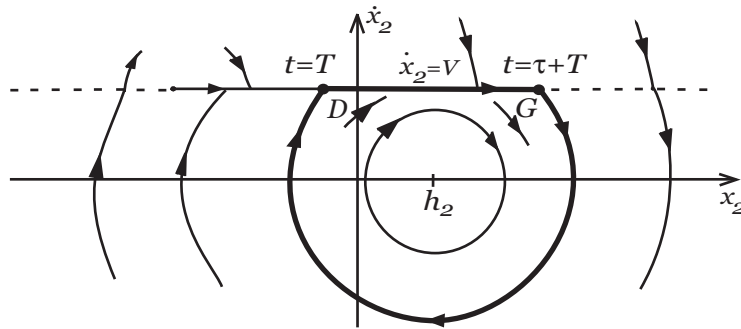


Рис. 4: Вид предельного цикла

заданных значения параметров χ , η и U_r , искомый предельный

цикл в проекции на плоскость (x_2, \dot{x}_2) имеет вид, изображенный на рис.4. Он состоит из дуги GD при $0 \leq t \leq T$ и DG при $T \leq t \leq T + \tau$. Пусть $\tau > 0$, $T > 0$. Начальные условия системы для точки G обозначим

$$\vec{X}_0 = (X_0, \dot{X}_0)^T, \quad X_0 = (x_1(0), x_2(0))^T, \quad \dot{X}_0 = (\dot{x}_1(0), V)^T.$$

При $0 \leq t \leq T$ фазовая траектория определяется из соотношений

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ \dot{X}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1(t) & \Gamma_2(t) \\ \Gamma_3(t) & \Gamma_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 + d_0 \\ \dot{X}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T, \quad \dot{X}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^T, \quad d_0 = (-h_1, -h_2)^T,$$

$$\Gamma_i(t) = \Lambda G_i(t) \Lambda^{-1}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad G_3(t) = \dot{G}_1(t),$$

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad G_2(t) = \begin{pmatrix} s_1/\omega_1 & 0 \\ 0 & s_2/\omega_2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} c_\alpha & -s_\alpha \\ \sqrt{\eta} s_\alpha & \sqrt{\eta} c_\alpha \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} c_\alpha & s_\alpha/\sqrt{\eta} \\ -s_\alpha & c_\alpha/\sqrt{\eta} \end{pmatrix},$$

причем для матриц $\Gamma_i(t)$, в силу диагональности $G_i(t)$, выполняются свойства

$$\Gamma_1^2 - \Gamma_2 \Gamma_3 = E, \quad \Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_j \Gamma_i, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

где E — единичная матрица. Данное свойство матриц Γ_i также обнаружено в работах [10,11], где исследуется автономная колебательная система с переключениями, у которой переключения происходят в зависимости от координат, а не от скоростей.

При $T \leq t \leq T + \tau$ в силу автономности системы предельный цикл определяется из

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ \dot{X}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1(t-T) & H_2(t-T) \\ H_3(t-T) & H_1(t-T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(T) \\ \dot{X}(T) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где

$$H_i(t) = \Sigma D_i(t) \Sigma^{-1}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad D_3(t) = \dot{D}_1(t),$$

$$D_1(t) = \begin{pmatrix} ct & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(t) = \begin{pmatrix} st & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \chi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\chi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что также, как и для матриц $\Gamma_i(t)$, для $H_i(t)$, в силу диагональности матриц $D_i(t)$, выполняются свойства

$$H_1^2 - H_2 H_3 = E, \quad H_i H_j = H_j H_i, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Заметим, что в начальный момент времени выполняется условие

$$x_2(0) - x_1(0) = U_r / \chi, \quad (4.5)$$

а в момент T переключения с режима GD на DG выполняется

$$\dot{x}_2(T) = V. \quad (4.6)$$

Обозначим $\vec{X}_G = (X(\tau+T), \dot{X}(\tau+T))^T$ – положения и скорости первого и второго грузов в конце предельного цикла в момент $\tau+T$. В силу периодичности

$$\vec{X}_G = \vec{X}_0. \quad (4.7)$$

Обозначим $\vec{X}_S = (x_1(-\tau), x_2(-\tau), \dot{x}_1(-\tau), \dot{x}_2(-\tau))^T$ – положения и скорости первого и второго грузов после обратного движения системы вдоль предельного цикла в сторону уменьшения времени на τ из начального положения \vec{X}_0 . Тогда условие периодичности решения запишется в виде

$$\vec{X}_S = \vec{X}_D \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}\vec{X}_S &= \begin{pmatrix} X(-\tau) \\ \dot{X}(-\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 X_0 - H_2 \dot{X}_0 \\ -H_3 X_0 + H_1 \dot{X}_0 \end{pmatrix}, \\ \vec{X}_D &= \begin{pmatrix} X(T) \\ \dot{X}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1(X_0 + d_0) + \Gamma_2 \dot{X}_0 - d_0 \\ \Gamma_3(X_0 + d_0) + \Gamma_1 \dot{X}_0 \end{pmatrix}, \\ H_i &= H_i(\tau), \quad \Gamma_i = \Gamma_i(T), \quad (i = 1, 2, 3).\end{aligned}$$

Тогда условие (4.7) переписется в виде

$$Q_1 = Q_2, \quad W_1 = W_2, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}Q_1 &= X(-\tau) - X_0 = (H_1 - E)X_0 - H_2 \dot{X}_0, \\ W_1 &= \dot{X}(-\tau) + \dot{X}_0 = -H_3 X_0 + (H_1 + E)\dot{X}_0, \\ Q_2 &= X(T) - X_0 = (\Gamma_1 - E)(X_0 + d_0) + \Gamma_2 \dot{X}_0, \\ W_2 &= \dot{X}(T) + \dot{X}_0 = \Gamma_3(X_0 + d_0) + (\Gamma_1 + E)\dot{X}_0.\end{aligned}$$

Из свойств (4.4) и (4.2) для матриц H_i и Γ_i получаем, что

$$W_i = P_i Q_i, \quad (i = 1, 2),$$

$$P_1 = -H_2^{-1}(H_1 + E), \quad P_2 = \Gamma_2^{-1}(\Gamma_1 + E).$$

Тогда условие (4.9) запишется в виде

$$Q_1 = Q_2, \quad P_1 Q_1 = P_2 Q_2. \quad (4.10)$$

Из (4.10) следует, что возможны два случая существования предельного цикла

$$I: \quad Q_1 = Q_2 = 0, \quad (4.11)$$

$$II: \quad Q_1 = Q_2, \quad \det[P_2 - P_1] = 0. \quad (4.12)$$

В случае (4.11) получаем

$$X(\tau) = X(0), \quad \dot{X}(\tau) = -\dot{X}(0) \quad (4.13)$$

В силу того, что $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_2(\tau) = V$, из (4.13) следует, что предельный цикл в случае (4.11) существует только при $V = 0$. В этом случае получаем периодическое решение с периодом $T = 2\pi$, которое в координатах (x_1, x_2) имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) = \dot{x}_1(0) \sin t + (x_1(0) - \chi x_2(0)) \cos t + \chi x_2(0), \\ x_2(t) = x_2(0), \end{cases} \quad (4.14)$$

причем на положения в любой момент t наложено условие (2.12).

В случае (4.12) и $V > 0$ получим замкнутую систему уравнений

$$\begin{cases} \det[H_2^{-1}(H_1 + E) + \Gamma_2^{-1}(\Gamma_1 + E)] = 0, \\ (H_1 - \Gamma_1)X_0 - (H_2 + \Gamma_2)\dot{X}_0 = (\Gamma_1 - E)d_0, \\ x_2(0) - x_1(0) = U_r/\chi, \quad \dot{x}_2(T) = V. \end{cases} \quad (4.15)$$

Найдем решение этой системы, аналитически доказав следующее свойство решения (4.12)

$$X_D + d_0 = -(X_0 + d_0), \quad \dot{X}_D = \dot{X}_0. \quad (4.16)$$

Условие (4.9) в новых переменных

$$\begin{aligned} y_i(t) &= x_i(t) - h_i, \quad (i = 1, 2), \\ Y_0 &= (y_1(0), y_2(0))^T, \quad \dot{Y}_0 = (y_1(0), V)^T \end{aligned} \quad (4.17)$$

примет вид

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2, \quad \tilde{W}_1 = \tilde{W}_2, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= Y(-\tau) - Y_0 = (H_1 - E)Y_0 - H_2\dot{Y}_0 - (H_1 - E)d_0, \\ \tilde{W}_1 &= \dot{Y}(-\tau) + \dot{Y}_0 = -H_3Y_0 + H_3d_0 + (H_1 + E)\dot{Y}_0, \\ \tilde{Q}_2 &= Y(T) - Y_0 = (\Gamma_1 - E)Y_0 + \Gamma_2\dot{Y}_0, \\ \tilde{W}_2 &= \dot{Y}(T) + \dot{Y}_0 = \Gamma_3Y_0 + (\Gamma_1 + E)\dot{Y}_0. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(H_1 - E)d_0 = (0, 0)^T, \quad H_3d_0 = (0, 0)^T, \quad (4.19)$$

так как в силу (2.8) $h_1 = \chi h_2$. Тогда условие (4.18) переписется в виде системы уравнений на (Y_0, \dot{Y}_0)

$$\begin{cases} (\Gamma_1 - H_1)Y_0 + (\Gamma_2 + H_2)\dot{Y}_0 = 0, \\ (\Gamma_3 + H_3)Y_0 + (\Gamma_1 - H_1)\dot{Y}_0 = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Аналогичным образом, как и для точки G (рис.4), запишем уравнения для точки D с координатами (Y_D, \dot{Y}_D) в фазовом пространстве. Для этого сдвинем начало отсчета времени в точку D , то есть введем новое время $\tilde{t} = t - \tau$.

Тогда при $0 \leq \tilde{t} \leq \tau$ точка предельного цикла в произвольный момент \tilde{t} определяется из

$$\begin{pmatrix} Y(\tilde{t}) \\ \dot{Y}(\tilde{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1(\tilde{t}) & H_2(\tilde{t}) \\ H_3(\tilde{t}) & H_1(\tilde{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_D - d_0 \\ \dot{Y}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А при $\tau \leq \tilde{t} \leq \tau + T$ точка предельного цикла определяется из

$$\begin{pmatrix} Y(\tilde{t}) \\ \dot{Y}(\tilde{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1(\tilde{t} - T) & \Gamma_2(\tilde{t} - T) \\ \Gamma_3(\tilde{t} - T) & \Gamma_1(\tilde{t} - T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_D \\ \dot{Y}_D \end{pmatrix}.$$

Условие периодичности предельного цикла запишется в виде

$$\vec{Y}_{\tilde{s}} = \vec{Y}_0, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{\tilde{s}} &= \begin{pmatrix} Y(-T) \\ \dot{Y}(-T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 Y_D - \Gamma_2 \dot{Y}_D \\ -\Gamma_3 Y_D + \Gamma_1 \dot{Y}_D \end{pmatrix}, \\ \vec{Y}_0 &= \begin{pmatrix} Y(\tau) \\ \dot{Y}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1(Y_D - d_0) + H_2 \dot{Y}_D + d_0 \\ H_3(Y_D - d_0) + H_1 \dot{Y}_D \end{pmatrix}, \\ H_i &= H_i(\tau), \quad \Gamma_i = \Gamma_i(T), \quad (i = 1, 2, 3).\end{aligned}$$

Тогда условие (4.21) перепишется в виде

$$\widehat{Q}_1 = \widehat{Q}_2, \quad \widehat{W}_1 = \widehat{W}_2, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_1 &= Y(-T) - Y_D = (\Gamma_1 - E)Y_D - \Gamma_2 \dot{Y}_D, \\ \widehat{W}_1 &= \dot{Y}(-T) + \dot{Y}_D = -\Gamma_3 Y_D + (\Gamma_1 + E)\dot{Y}_D, \\ \widehat{Q}_2 &= Y(\tau) - Y_D = (H_1 - E)Y_D + H_2 \dot{Y}_D - (H_1 - E)d_0, \\ \widehat{W}_2 &= \dot{Y}(\tau) + \dot{Y}_D = H_3 Y_D + (H_1 + E)\dot{Y}_D - H_3 d_0.\end{aligned}$$

В силу (4.19) условие (4.22) перепишется в виде системы уравнений на (Y_D, \dot{Y}_D)

$$\begin{cases} -(\Gamma_1 - H_1)Y_D + (\Gamma_2 + H_2)\dot{Y}_D = 0, \\ -(\Gamma_3 + H_3)Y_D + (\Gamma_1 - H_1)\dot{Y}_D = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Заметим, что при замене (Y_D, \dot{Y}_D) на $(-Y_0, \dot{Y}_0)$ система уравнений (4.23) переходит в (4.20). Пусть (Y, \dot{Y}) – решение (4.20), тогда в силу последнего свойства $(-lY, l\dot{Y})$ – решение (4.23), где l – некоторая постоянная, отличная от нуля. В силу того, что вторые компоненты \dot{Y} и $l\dot{Y}$ решений уравнений (4.20) и (4.23) одинаковы и в силу (4.6) равны V , то $l = 1$. Значит, для решений уравнений (4.23) и (4.20) выполняется $Y_D = -Y_0$ и $\dot{Y}_D = \dot{Y}_0$, что и доказывает соотношение (4.16).

Низший по частоте предельный цикл назовем основным тоном или первой гармоникой, а высшие по частоте – обертонами. Для основного тона выразим $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0)$ через τ, T и параметры задачи с помощью (4.16) и (4.5), которые примут вид

$$\begin{cases} -(x_1(0) - h_1) = x_1(-\tau) - h_1, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1(-\tau), \\ -(x_2(0) - h_2) = x_2(-\tau) - h_2, \quad x_2(0) = x_1(0) + U_r/\chi. \end{cases} \quad (4.24)$$

Эти уравнения не являются независимыми, так как если выразить $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0)$ из последних трех уравнений

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \frac{V\tau}{2} + \frac{1}{\chi(1-\chi)} - \frac{U_r}{\chi}, & x_2(0) &= \frac{V\tau}{2} + \frac{1}{\chi(1-\chi)}, \\ \dot{x}_1(0) &= \chi V + \operatorname{ctg}\left(\frac{\tau}{2}\right) \left[\frac{V\tau}{2}(1-\chi) + \frac{1-U_r}{\chi} \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

и подставить в первое уравнение (4.24), то получим тождественное равенство.

Систему (4.16) также можно записать в виде

$$-(X(0) + d_0) = X(T) + d_0, \quad (4.26)$$

что эквивалентно в силу (4.6) системе двух уравнений

$$\begin{cases} (\Gamma_{11} + 1)(\tau/2 - \sigma) + \Gamma_{12}\tau/2 + \Gamma_{21}\dot{x}_1(0)/V + \Gamma_{22} = 0, \\ \Gamma_{13}(\tau/2 - \sigma) + (\Gamma_{14} + 1)\tau/2 + \Gamma_{23}\dot{x}_1(0)/V + \Gamma_{24} = 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\sigma = (U_r - 1)/(\chi V)$$

и $\Gamma_i = \{\Gamma_{ij}(T)\}$, $j = 1..4$. Уравнения (4.27) при подстановке в них (4.25) образуют замкнутую систему уравнений относительно τ и T . При этом τ , как функция T , задается в виде

$$\tau = \frac{2(\Gamma_{22}\Gamma_{23} - \Gamma_{24}\Gamma_{21}) - 2(\Gamma_{23}(\Gamma_{11} + 1) - \Gamma_{13}\Gamma_{21})\sigma}{(\Gamma_{13} + \Gamma_{14} + 1)\Gamma_{21} - (\Gamma_{11} + \Gamma_{12} + 1)\Gamma_{23}}. \quad (4.28)$$

Подставив (4.28) в первое уравнение (4.27), получим уравнение $\Phi(T, \sigma, \chi, \eta) = 0$.

Численное решение $\Phi(T, \sigma) = 0$ при $\eta = 1$ и $\chi = 0,6$ дает два типа основных тонов, которые существуют одновременно: прямой и обратный циклы. Первый предельный цикл называется прямым в том смысле, что массы m_1 и m_2 движутся синхронно (рис.7). Второй предельных цикл – обратный в том смысле,

что массы m_1 и m_2 движутся с противоположными по знаку скоростями (рис.6).

Вид кривой $\Phi(T, \sigma) = 0$ для прямого и обратного циклов изображен на рис.5. Кривая, расположенная ближе к оси 0σ отвечает обратному циклу, а вторая кривая – прямому циклу. Все остальные решения $\Phi(T, \sigma) = 0$ являются либо обертонами, либо кратным повторением прямого и обратного циклов, либо композицией обертонов с прямым и обратным циклами, и на рис.5 не представлены.

В силу того, что $\omega_1 < \omega_2$, прямой цикл является основным тоном в скрипичных музыкальных инструментах.

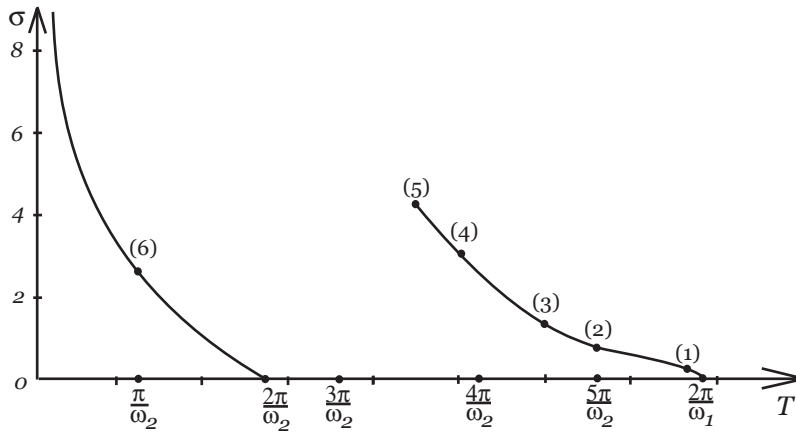


Рис. 5: Вид $\Phi(T, \sigma) = 0$ для обратного и прямого циклов

Обратный цикл рождается из главного колебания (3.4) с периодом $T = 2\pi/\omega_2$, причем $\sigma = 0$ ($U_r = 1$) и $\tau = 0$. При увеличении σ , величина T уменьшается, а τ и период обратного цикла $T + \tau$ увеличиваются. При $\tau = \pi$, $T = \pi/\omega_2$ и

$$\sigma = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{s_\alpha}{c_\alpha} \right) + \left(\frac{\chi}{\omega_1} + \frac{s_\alpha}{\omega_1 c_\alpha} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_1}{2\omega_2} \quad (4.29)$$

проекция фазового пространства на плоскости (x_1, \dot{x}_1) , (x_2, \dot{x}_2) и форма колебаний для обратного цикла изображены на рис.6. Численно получено, что при стремлении σ к ∞ , T стремится к 0, а τ и период $T + \tau$ стремятся к 2π .

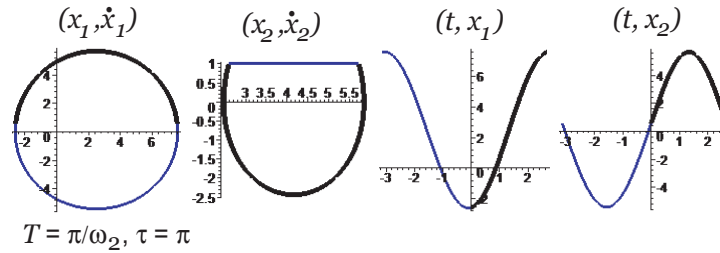


Рис. 6: Фазовый портрет и форма колебаний обратного цикла

Прямой цикл рождается из главного колебания (3.3) с периодом $T = 2\pi/\omega_1$, причем $\sigma = 0$ ($U_r = 1$) и $\tau = 0$. Численно показано, что при увеличении σ , величина T уменьшается (рис.5), а τ и период $\tau + T$ увеличиваются. При малых σ форма колебаний прямого цикла близка к форме чистого синуса (рис.7 (1)). При увеличении σ первый обертона, то есть колебание с удвоенной частотой влияет на прямой цикл, вследствие чего на плоскости (t, x_2) появляются четыре дополнительные точки перегиба (рис.7 (2)), а затем с ростом σ первый обертона становится доминирующим (рис.7 (3)-(5)).

Прямой цикл существует до $\sigma_{kp} = 4.53$ (рис.7 (5)), выше которого он пропадает. Это происходит в силу того, что на плоскости (x_2, \dot{x}_2) при σ , близких к σ_{kp} появляется петля, которая с ростом σ поднимается к отрезку $\dot{x}_2 = V$. При $\sigma = \sigma_{kp}$ эта петля достигает $\dot{x}_2 = V$ и предельный цикл вырождается в колебание, не являющиеся предельным циклом, в силу нарушения условия (4.16). Так как $\sigma = (U_r - 1)/V\chi$, полученные при $\chi = 0.6$ и $\eta = 1$

результаты означают, что обратный цикл существует при всех значениях U_r, V . При больших отношениях между силой трения скольжения и покоя прямой цикл исчезает, причем пределы этого отношения увеличиваются с увеличением скорости ленты V .

5. Заключение. В данной работе получено аналитическое решение для точных уравнений движения с кусочно-постоянной моделью сухого трения (1.1), аналитически найдено их решение, найдены периодические движения и предельные циклы. Найдены формы колебаний и построены проекции фазовых траекторий на плоскости (x_1, \dot{x}_1) и (x_2, \dot{x}_2) для обратного цикла (рис.6) и прямого цикла (рис.7). Для них численно изучена зависимость времен T, τ и периода колебаний $(T + \tau)$ от σ .

Численно показано, что обратный цикл существует при всех значениях параметров задачи σ . При больших отношениях между силой трения скольжения и покоя прямой цикл исчезает, причем пределы этого отношения увеличиваются с увеличением скорости ленты V .

Автор благодарит С.Я. Степанова за помощь в постановке и решении задачи и М. Паскаль за ценные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05–01–00454) и программы “Ведущие научные школы” (НШ–6667.2006.1.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хизгияев С.В.* Аналитическое исследование автоколебательной механической системы с кусочно-постоянной моделью сухого трения// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.:ВЦ РАН. 2006. С. 85–93.
2. *Andreaus U., Casini P.* Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force// Journal of Sound and Vibration. 2001. V. 245. №4. P. 685–699.
3. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз. 1959. – 916 с.

4. *Awrejcewicz J.* Analysis of Self-Excited Vibration Due to Dry Friction in a System with Two Degrees of Freedom // *Sci. Bull. Lodz Technical University.* 1993. Z. 82. №635. P. 23–24.
5. *Awrejcewicz J.* Identification of Dynamic Nonlinear Dependence of Coefficients of Dry Friction From Velocity // *Sci. Bull. Lodz Technical University.* 1984. Z. 67. №429. P. 5–12. (in Polish)
6. *Аврейцевич Я., Дзюбак Л.П.* Регулярное и хаотическое движение нелинейного квазиавтономного осциллятора с Кулоновым и вязким трением // *Вісник технологічного університету Поділля.* 2003. Т 1. Ч. 1. №56. С. 59–66.
7. *Liu C.-S., Chang W.-T.* Frictional behaviour of a belt-driven and periodically excited oscillator // *Journal of Sound and Vibration.* 2002. V. 258. №2. P. 247–268.
8. *Awrejcewicz J., Dzyubak L., Grebogi C.* Estimation of chaotic and regular (stick-slip and slip-slip) oscillations exhibited by coupled oscillators with dry friction // *Nonlinear Dynamics.* 2005. V. 42. №2. P. 383–394.
9. *Awrejcewicz J., Olejnik P.* Friction pair modeling by a 2-dof system: numerical and experimental investigations // *Special Issue of International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2005. V. 15. №6. P. 1931–1944
10. *Pascal M.* Dynamics and stability of a two degrees of freedom oscillator with an elastic stop // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.* 2006. V.1. №1. P. 94–102.
11. *Pascal M., Stepanov S.Ya.* Periodic solutions and stability of piecewise-linear vibratory systems // *Избранные труды 4-тых Поляковских чтений.* Санкт-Петербург. 2006. С. 84–94.

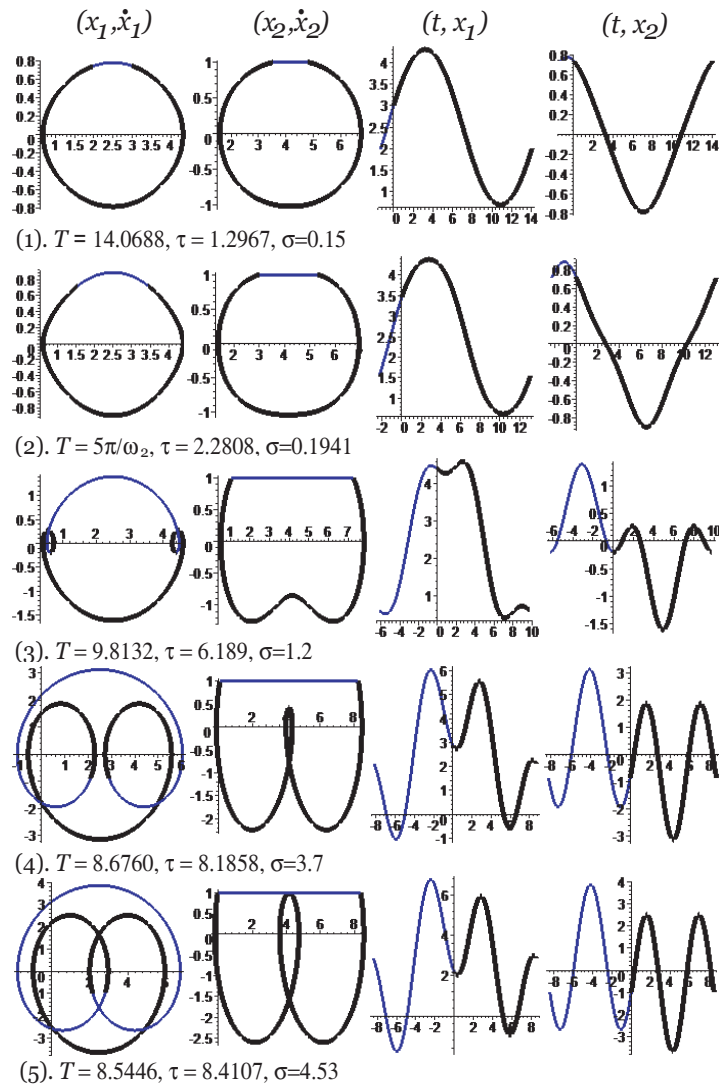


Рис. 7: Фазовый портрет и форма колебаний прямого цикла

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ И
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНЫХ ПАР
РЕЛЬСОВЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

В.С. Сергеев

Исследуется динамика и устойчивость прямолинейного движения железнодорожной колесной пары, катящейся с постоянной скоростью по расположенным в горизонтальной плоскости рельсам, которые допускают малые отклонения в этой плоскости от прямолинейного направления пути (постоянно действующие возмущения). Колесная пара соединена с платформой вязкоупругими пружинами, свойства материала которых задаются интегральным оператором Вольтерра. Движение описывается интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра. Анализируется устойчивость при постоянно действующих возмущениях и предельно периодические движения колесной пары.

Задача о движении колесной пары является одной из основных в динамике железнодорожного состава. Фундаментальные результаты по взаимодействию колеса с металлическим рельсом, базирующиеся на теории крипа, принадлежат Калкери [1] и достаточно хорошо подтверждаются экспериментами [2,3] при не слишком больших величинах сил крипа. Данное направление исследований до настоящего момента получило значительное развитие; обзор основных результатов в данной области можно найти, например, в работах [1,2,4-8]. В настоящей публикации некоторые аспекты задачи о движении колесной пары рассматриваются с точки зрения теории интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Ключевые слова: устойчивость, железнодорожная колесная пара, интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра.

1. Постановка задачи. Будем считать, что центр масс колесной пары движется так, что проекция его вектора скорости на некоторую прямую ℓ (направление пути) во все время движения остается постоянной и равной v . При этом центр масс совершает малые поперечные движения вдоль оси x , проходящей через центр масс и перпендикулярной ℓ . Начало оси x расположено на прямой ℓ . Ось колесной пары может поворачиваться в горизонтальной плоскости на малый угол y . Будем рассматривать движения без касания рельса ребордой колеса.

Колесная пара соединена вязкоупругими пружинами с платформой, движущейся поступательно вдоль прямой ℓ со скоростью v .

Величины силы F_v и момента M_v сил, действующих на колесную пару со стороны вязкоупругих пружин, будем представлять в виде

$$F_v = k_1 x + \int_0^t K_1(t-s)x(s)ds, \quad M_v = k_2 y + \int_0^t K_2(t-s)y(s)ds, \quad (1.1)$$

где k_1, k_2 – модули упругости для поперечного и углового движений, соответственно, $K_1(t), K_2(t)$ – ядра релаксации, описывающие вязкоупругие свойства пружин [9]. Правые части соотношений (1.1), вообще говоря, могут содержать также нелинейные функции, характеризующие нелинейные свойства пружин.

Линейные члены сил крипа взаимодействия колес с рельсами возьмем в форме, предложенной Калкером, так что уравнения движения можем записать в виде [3] с учетом сил, задава-

емых формулами (1.1), добавив нелинейные члены:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + \frac{2\kappa}{v}\dot{x} + k_1x + P\delta\tilde{x} + \int_0^t K_1(t-\tau)x(\tau)d\tau + 2\kappa y &= F_1(z, t, \mu), \\
 I\ddot{y} + \frac{2\kappa l^2}{v}\dot{y} + k_2y + \int_0^t K_2(t-\tau)x(\tau)d\tau - \frac{2\kappa\alpha l}{r_0}\tilde{x} &= F_2(z, t, \mu).
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

$$z = \text{col}(x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

В уравнениях (1.2) точка обозначает производную по времени, m – масса колесной пары, I – ее момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, l – длина путевого шаблона, P – вертикальная нагрузка на колесную пару (с учетом ее веса), α, δ – коэффициенты, связанные с углом конусности колеса [3], κ – коэффициент крипа, r_0 – средний радиус колеса, $F_i(z, t, \mu)$ ($i = 1, 2$) – нелинейные члены, связанные с силами крипа и нелинейной частью вязкоупругих сил, $\mu \geq 0$ – малый параметр, \tilde{x} – разность координат точек касания рельсов правым и левым колесами с учетом малых отклонений рельсов от прямолинейного направления,

$$\tilde{x} = x + \mu\varphi(s), \quad s = vt,$$

s – пройденный путь.

Будем предполагать, что $F_i(z, t, \mu)$ – непрерывно дифференцируемые по z функции в некоторой окрестности нуля, а интегральные ядра $K_i(t)$ ($i = 1, 2$) – непрерывные функции при $t \geq 0$, удовлетворяющие неравенству

$$|K_i(t)| \leq C \exp(-\beta t), \quad i = 1, 2, \quad C, \beta = \text{const} > 0. \tag{1.3}$$

Кроме того, будем считать, что функция $\varphi(vt)$ и функции $F_i(z, t, \mu)$ ($i = 1, 2$) в некоторой окрестности нуля $\|z\| \leq \epsilon$ и при $\mu < \mu_0$ ($\epsilon, \mu_0 > 0$ – некоторые малые постоянные) непрерывны и ограничены по t при $t \in [0, +\infty)$.

2. Асимптотическая устойчивость. Исследование асимптотической устойчивости нулевого решения линеаризованного невозмущенного уравнения (1.2) приводится к анализу корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + \frac{2\kappa}{v}\lambda + (k_1 + P\delta) + K_1^*(\lambda) & 2\kappa \\ -\frac{2\kappa\alpha l}{r_0} & I\lambda^2 + \frac{2\kappa l^2}{v}\lambda + k_2 + K_2^*(\lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

в котором $K_i^* = \int_0^\infty K_i(s)e^{-\lambda s} ds$ – преобразование Лапласа функции $K_i(t)$ ($i=1,2$). На основании условия (1.3) левая часть уравнения (2.1) определена и является аналитической функцией переменной λ в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > -\beta$. Уравнение (2.1) в общем случае трансцендентное. Пусть λ_k ($k = 1, \dots, N$) – все корни этого уравнения в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq -\beta'$ ($0 < \beta' < \beta$), причем $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ($k = 1, \dots, N$). Тогда, принимая во внимание структуру общего решения [10], представляемого суммой функций, убывающих, как $t^{p_k} \exp(-\lambda_k)$ (p_k – некоторое целое), и функции, убывающей быстрее, чем функция $\exp(-\beta')$, получаем, что тривиальное решение невозмущенной линеаризованной системы (1.2) асимптотически устойчиво. В дальнейшем будем полагать, что условия асимптотической устойчивости выполнены.

Задача определения корней характеристического уравнения и построения в явном виде самого решения линеаризованного уравнения существенно упрощается, если интегральные ядра $K_i(t)$ ($i = 1, 2$) имеют экспоненциально-полиномиальную структуру [11]. Тогда характеристическое уравнение (2.1) приводится к полиномиальному виду. Рассмотрим классическую модель вязкоупругого материала, позволяющую свести исследование устойчивости к этому указанному частному случаю.

Модель вязкоупругого тела Кельвина, объединяющая упругие элементы Гука и ньютоновскую жидкость, состоит из ча-

стиц, представляющих собой частицы тела Фойхта (параллельно соединенные упругая пружина с модулем упругости E_1 и вязкий элемент с коэффициентом вязкости η) и присоединенную к ней последовательно упругую пружину с модулем упругости E_2 . Зависимость напряжения σ , возникающего в частице при растяжении, от деформации e в конструкции Кельвина дается зависимостью [9]

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = E_2(\dot{e} + \mu e), \quad \lambda = (E_1 + E_2)/\eta, \quad \mu = E_1/\eta,$$

интегрирование которой приводит к выражению

$$\sigma = E_2 \left(e + \int_0^t (\mu - \lambda) \exp[-\lambda(t - \tau)] e(\tau) d(\tau) \right). \quad (2.2)$$

Для тела Кельвина ядра релаксации $K_i(t)$ ($i = 1, 2$) согласно (2.2) представим в виде

$$K_i(t) = -\kappa_i \exp(-\beta_i t), \quad \kappa_1 = E_2^2/\eta_1, \quad \kappa_2 = E_2'^2/\eta_2, \quad (2.3)$$

$$\beta_1 = (E_1 + E_2)/\eta_1, \quad \beta_2 = (E_1' + E_2')/\eta_2$$

и $E_1, E_2 \equiv k_1, \eta_1$ – постоянные тела Кельвина, относящиеся к поперечному движению, $E_1', E_2' \equiv k_2, \eta_2$ – постоянные, соответствующие угловому движению. В этом случае в уравнении (2.1) имеем

$$K_i^*(\lambda) = -\frac{\kappa_i}{\beta_i + \lambda}, \quad i = 1, 2,$$

и левая часть характеристического уравнения приводится к полиному шестой степени, приравненному нулю.

Несложно составить условия Рауса-Гурвица отрицательности вещественных частей всех корней этого уравнения, однако для анализа они несколько громоздки. Отметим, что в случае

упругих пружин (т.е. при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$) условия Рауса-Гурвица сводятся к неравенству

$$v^2 < \frac{(f_1 + f_2)(f_2\omega_1^2 + f_1\omega_2^2)}{(f_1 + f_2)^2\lambda_0^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, \quad (2.4)$$

если

$$(f_1 + f_2)^2\lambda_0^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 > 0,$$

где

$$f_1 = \frac{2\kappa}{m}, \quad f_2 = \frac{2\kappa l^2}{I}, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1 + P\delta}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{I}, \quad \lambda_0^2 = \frac{\alpha}{lr_0}. \quad (2.5)$$

Условие (2.4), накладывающее ограничение на скорость перемещения центра масс колесной пары, согласуется с аналогичным неравенством в [3] при отсутствии упругих сил и с неравенством, указанным [6] для случая отсутствия нагрузки P .

Для построения общего решения линейного интегродифференциального уравнения с интегральными ядрами экспоненциально-полиномиальной структуры, в частности для ядер вида (2.3), можно воспользоваться процедурой, указанной в монографии [11], либо стандартным методом для дифференциальных уравнений, сведя уравнения (1.2), (2.3) к дифференциальным с помощью замены

$$u = - \int_0^t \kappa_1 \exp[-\beta_1(t - \tau)] x(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

$$v = - \int_0^t \kappa_2 \exp[-\beta_2(t - \tau)] y(\tau) d\tau.$$

Преобразование (2.6) дает два дополнительных уравнения

$$\dot{u} = -\kappa_1 x - \beta_1 u, \quad \dot{v} = -\kappa_2 y - \beta_2 v, \quad (2.7)$$

которые следует присоединить к системе

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{2\kappa}{v}\dot{x} + (k_1 + P\delta)x + u + 2\kappa y &= 0, \\ I\ddot{y} + \frac{2\kappa l^2}{v}\dot{y} + k_y y + v - \frac{2\kappa\alpha l}{r_0}x &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях, периодические возмущения. Рассмотрим движение возмущенной (полной) системы (1.2). Все члены уравнений (1.2) с малым параметром μ , а также все нелинейные члены будем считать постоянно действующим возмущением. При сделанных предположениях относительно свойств функций в уравнениях (1.2) и условии отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения (2.1) применима теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [12] в смысле Малкина [13] невозмущенного движения $x = y = 0, \dot{x} = \dot{y} = 0$. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, такие что при $|z(0)| < \delta_1, |\mu\varphi(t)| < \delta_1, |F_i(z, t, \mu)| < \delta_2$ для $\|z\| < \varepsilon, t \in [0, +\infty)$ выполняется $\|z(t)\| < \varepsilon$ для $t \in [0, +\infty)$. Решение может быть построено, например, в форме последовательных приближений.

Возмущенное движение с точностью до членов, линейных по μ , дается соотношением

$$z(t) = X(t)z(0) + \mu \int_0^t X(t - \tau)F_\mu(\tau)d\tau, \quad (3.1)$$

в котором $X(t)$ – фундаментальная матрица линеаризованного невозмущенного уравнения, такая что $X(0)$ – единичная матрица, и $F_\mu(t) = \text{col}(0, P\delta\varphi(vt), 0, -2\kappa\alpha l r_0^{-1}\varphi(vt))$. Формула (3.1) позволяет получить оценку величины возмущения порядка μ для функции $\varphi(s)$ произвольного типа.

Остановимся на случае, когда возмущение пути периодическое. Тогда $\varphi(vt)$, $F_i(z, t, \mu)$ – периодические функции времени t с некоторым периодом T , и оказываются выполненными все условия теоремы о предельно периодических движениях [14]. Всякое решение уравнений (1.2) с начальными условиями, заданными при $t = 0$, представляется предельно периодическими функциями, т.е.

$$x(t) = x_e(t) + x_p(t), \quad y(t) = y_e(t) + y_p(t),$$

где $x_e(t)$, $y_e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и $x_p(t)$, $y_p(t)$ – периодические функции, являющиеся периодическим решением системы

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{2\kappa}{v}\dot{x} + k_1x + P\delta\tilde{x} + \int_0^\infty K_1(\tau)x(t-\tau)d\tau + 2\kappa y &= F_1(z, t, \mu), \\ I\ddot{y} + \frac{2\kappa l^2}{v}\dot{y} + k_1y + \int_0^\infty K_2(\tau)x(t-\tau)d\tau - \frac{2\kappa\alpha l}{r_0}\tilde{x} &= F_2(z, t, \mu). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если функции $\varphi(vt)$, $F_i(z, t, \mu)$ представляются рядами Фурье по t , то периодическое решение нелинейной системы также может быть найдено в форме рядов Фурье [15]. Построим такое решение, ограничиваясь случаем $F_i(z, t, \mu) \equiv 0$ ($i = 1, 2$).

Пусть $\varphi(vt)$ может быть задано сходящимся рядом Фурье:

$$\varphi(vt) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (3.3)$$

а искомые функции $x_p(t)$, $y_p(t)$ представляются в виде

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (c_k^{(1)} \cos k\omega t + d_k^{(1)} \sin k\omega t), \\ y_p(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (c_k^{(2)} \cos k\omega t + d_k^{(2)} \sin k\omega t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\omega = 2\pi/T = 2\pi v/L$ и L – длина пройденного пути за время T .

На основании уравнений (3.2) и соотношений (3.3), (3.4) получаем для постоянных $c_k^{(i)}$, $d_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$) выражения

$$\begin{aligned}
c_k^{(1)} &= [(-\alpha_1 a_{21} - \alpha_2 a_{22} + \beta_1 f_1)(a_{22} a_{12} - a_{21} a_{11} - \lambda_0^2 f_1 f_2) + \\
&\quad + (\alpha_1 a_{22} - \alpha_2 a_{21} + \beta_2 f_1)(a_{21} a_{12} + a_{22} a_{11})] \Delta^{-1}, \\
d_k^{(1)} &= [-(-\alpha_1 a_{21} - \alpha_2 a_{22} + \beta_1 f_1)(a_{21} a_{12} - a_{22} a_{11}) + \\
&\quad + (\alpha_1 a_{22} - \alpha_2 a_{21} + \beta_2 f_1)(a_{22} a_{12} - a_{21} a_{11} - \lambda_0^2 f_1 f_2)] \Delta^{-1}, \\
c_k^{(2)} &= [(\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \lambda_0^2 \alpha_1 f_2)(a_{11} a_{21} - a_{12} a_{22} + \lambda_0^2 f_1 f_2) - \\
&\quad - (-\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{11} + \lambda_0^2 \alpha_2 f_2)(a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21})] \Delta^{-1}, \\
d_k^{(2)} &= [(\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \lambda_0^2 \alpha_1 f_2)(a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) + \\
&\quad + (-\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{11} + \lambda_0^2 \alpha_2 f_2)(a_{11} a_{21} - a_{12} a_{22} + \lambda_0^2 f_1 f_2)] \Delta^{-1},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\Delta = (a_{22} a_{12} - a_{21} a_{11} - \lambda_0^2 f_1 f_2)^2 + (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21})^2,$$

в которых использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -k^2 \omega^2 + (k_1 + P\delta)/m + C_k^{(1)}, & \alpha_1 &= -\mu f_1^* a_k^{(2)}, \\
a_{12} &= k\omega f_1/v - S_k^{(1)}, & \alpha_2 &= -\mu f_1^* b_k^{(2)}, \\
a_{21} &= -k^2 \omega^2 + k_2/I + C_k^{(2)}, & \beta_1 &= \mu f_2 \lambda_0^2 a_k^{(1)}, \\
a_{22} &= k\omega f_2/v - S_k^{(2)}, & \beta_2 &= \mu f_2 \lambda_0^2 b_k^{(1)},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$S_k^{(i)} = \int_0^\infty K_i(\tau) \sin k\omega\tau d\tau, \quad C_k^{(i)} = \int_0^\infty K_i(\tau) \cos k\omega\tau d\tau, \quad i = 1, 2,$$

причем $f_1^* = P\delta/m$, и f_1, f_2, λ_0 введены формулами (2.5).

В формулах (3.5), (3.6) для упрощения записи опущены индексы k у величин $a_{ij}, \alpha_i, \beta_i$.

Если скорость v велика (но удовлетворяет условиям Рауса-Гурвица), то из выражений (3.5) следует, что

$$c_k^{(1)} = -\frac{\alpha_1}{v^2} \left(\frac{L}{2\pi k} \right)^2 + O(v^{-4}), \quad d_k^{(1)} = -\frac{\alpha_2}{v^2} \left(\frac{L}{2\pi k} \right)^2 + O(v^{-4}),$$

$$c_k^{(2)} = \frac{\beta_1}{v^2} \left(\frac{L}{2\pi k} \right)^2 + O(v^{-4}), \quad d_k^{(2)} = \frac{\beta_2}{v^2} \left(\frac{L}{2\pi k} \right)^2 + O(v^{-4}),$$

и амплитуды установившихся в пределе при $t \rightarrow +\infty$ поперечных колебаний A_k и угловых колебаний B_k , а именно

$$A_k = \left(\frac{L}{2\pi k} \right)^2 \frac{\mu f_1^*}{v^2} \sqrt{(a_k^{(2)})^2 + (b_k^{(2)})^2} + O(v^{-4}),$$

$$B_k = \left(\frac{L}{2\pi k} \right)^2 \frac{\mu f_2 \lambda_0^2}{v^2} \sqrt{(a_k^{(1)})^2 + (b_k^{(1)})^2} + O(v^{-4}),$$

при больших v будут убывать как $1/v^2$. Зависимость от вязкости будет проявляться лишь в членах порядка $1/v^4$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-08-65470, 05-01-00454) и федеральной программы Ведущие научные школы (НШ-6667.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalker J.J.* Survey of wheel-rail rolling contact theories. // *Vehicle System Dynamics*. 1979. V. 8. P. 317-379.
2. *Гарг В.К., Дуккипати Р.В.* Динамика подвижного состава. М.: Транспорт, 1988.

3. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520. с.
4. *Коган А.Я.* Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом // М.: Транспорт, 1997. 326 с.
5. *Kalker J.J.* Review of wheel-rail rolling contact theory // Trans. ASME Appl. Mech. Division. 1980. V. 40. P. 77-92.
6. *Шестаков А.А., Дружинина О.В.* Совершенствование математической модели устойчивости движения колеса по рельсу с учетом нестационарных возмущений от пути. Научный отчет. М.: РГОТУПС. 2004. 67 с.
7. *Kalker J.J.* Three dimensional elastic bodies in rolling contact. Dordrecht: Kluwer, 1990.
8. *Харрис У.Дж., Захаров С.М., Лангрэн Дж., Турне Х., Эберсен В.* Обобщение передового опыта тяжеловесного движения: вопросы взаимодействия колеса и рельса. М.: Интекст, 2002.
9. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердого тела. М.: Наука, 1977. 383 с.
10. *Jordan G.S., Wheeler R.L.* Structure of resolvents of Volterra integral and integrodifferential systems // SIAM J. Math. Anal. Vol. 11. N 1. 1980. P.119-132.
11. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. гос. ун-та, 1957. 327 с.
12. *Сергеев В.С.* Об устойчивости в системах с последействием при наличии особенностей в интегральных ядрах. // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 968-978.

13. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
14. *Сергеев В.С.* О предельно периодических движениях в некоторых системах с последствием. // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 857-869.
15. *Рябов Ю.А., Хусанов Д.Х.* Периодические решения интегродифференциального уравнения второго порядка в нерезонансном случае. // Укр. Математ. журнал. 1982. Т. 34. № 5. С. 644-647.

О НЕГЕРЦЕВОМ КОНТАКТЕ КОЛЕСА И РЕЛЬСА

В. Г. Вильке

На основе классического решения контактной задачи упругих тел предложена инвариантная форма силовой функции, зависящая от геометрических характеристик пересечения двух недеформированных тел, а именно от объема пересечения, площади проекции пересечения на общую касательную плоскость и периметра этой проекции. Полученное выражение силовой функции предлагается использовать в случаях, когда гипотезы классической теории контакта не выполняются. Предложенное инвариантное выражение силовой функции использовано для числового расчета нормальной силы в задаче о контакте колеса с рельсом. Результаты расчета нормальных сил, полученные на основе предложенной силовой функции, согласуются с результатами в ряде решенных задач о негерцевом контакте упругих тел.

Ключевые слова: контактная задача теории упругости, задача Герца.

1. Введение. Если поверхности двух упругих контактирующих тел регулярны в окрестности точки контакта, т. е. они имеют общую касательную плоскость, и уравнения поверхностей тел в окрестности точки контакта представляются квадратичными формами в системе координат, две оси которой находятся в касательной плоскости, а третья является общей нормалью (рис. 1), то задача и контакте двух тел при их сближении друг с другом по

направлению нормали сводится к классической проблеме, которая была решена Г. Герцем [1] на базе частных решений теории упругости для полупространств найденных Ж. Буссинеском [2].

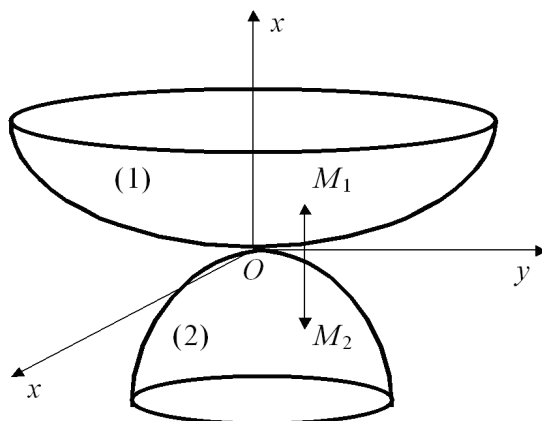


Рис. 1. Окрестность области контактирования

Существуют задачи контакта двух упругих тел, когда гипотезы Г. Герца не выполняются. Это в первую очередь может касаться аппроксимации поверхностей двух недеформированных тел квадратичными формами с постоянными коэффициентами в зоне контакта. Например, при контакте колеса с рельсом существует область на поверхности рельса, где кривизна рельса претерпевает скачок. Далее на поверхности колеса иногда обнаруживаются две близких друг к другу зоны контакта, которые объединяются с ростом нагрузки сопровождаемым перемещением колеса. Зоны контакта в этих случаях отличаются от эллиптических зон классического случая контакта Герца.

Известны различные методы решения контактной проблемы в случае негерцевого контакта [3-6]. Однако чис-

ловой расчет нормальных сил на базе этих методов либо требует слишком много времени (программа “CONTACT”, базирующаяся на методе конечных элементов), либо предполагает не всегда обоснованную замену негерцевого контакта двумя классическими герцевыми контактами [5]. В этом случае получается алгоритм числового расчета контактных сил, используемый при моделировании динамики поезда, который в ряде случаев приводит к результатам согласующимся с результатами эксперимента [5].

Ниже предлагается метод определения нормальных контактных сил, базирующийся на «инвариантной» форме силовой функции, соответствующей контактному взаимодействию упругих тел. В случаях, когда известны аналитические решения контактной задачи, предложенная методика определения нормальных контактных сил приводит к результатам, согласующимся с теоретическими с определенной степенью точности. Для определения касательных сил при негерцевом контактном взаимодействии тел предложена замена негерцевого контакта в некотором смысле эквивалентным герцевым контактом с последующим использованием программы числовых расчетов “FASTSIM” [7].

2. Инвариантная форма силовой функции для нормальных сил в классическом и негерцевом случаях взаимодействия упругих тел. Рассмотрим основные соотношения классической теории герцевого контакта. Пусть два тела касаются друг друга в точке O и Oxy — общая касательная плоскость, а ось z направлена к первому телу (рис. 1). Расстояние между точками двух

тел M_1 и M_2 в окрестности точки O равно

$$d \approx Ax^2 + By^2, \quad (2.1)$$

если эти точки принадлежат поверхностям тел и имеют соответственно координаты (x, y, z_1) , (x, y, z_2) . Коэффициенты A и B — постоянные величины. В общем случае в правой части выражения (2.1) может существовать член вида $2Cxy$. Однако его можно всегда исключить соответствующим выбором осей x и y . Если первое тело перемещается на расстояние α в отрицательном направлении оси Oz и если предполагается, что тела проникают друг в друга без деформаций, то возникает область их пересечения ν , проекция которой на плоскость Oxy

$$\sigma = \{x, y : Ax^2 + By^2 \leq \alpha\}$$

будет ограничена эллипсом

$$E = \{x, y : Ax^2 + By^2 = \alpha\}$$

Без ограничения общности будем считать, что $A \leq B$. В противном случае следует повернуть систему координат на угол $\pi/2$ вокруг оси Oz . Найдем характеристики рассматриваемых областей, которые в дальнейшем будут играть важную роль, а именно объем V области ν , площадь S области σ и периметр p эллипса E . Имеем

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\sigma} (\alpha - Ax^2 - By^2) dx dy = \frac{\pi\alpha^2}{2\sqrt{AB}}, \\ S &= \iint_{\sigma} dx dy = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{AB}}, \\ p &= \frac{4\sqrt{\alpha}E\left(\sqrt{1 - A/B}\right)}{\sqrt[4]{A}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$E\left(\sqrt{1-A/B}\right) = \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - A/B) \sin^2 \varphi]^{1/2} d\varphi,$$

где $E\left(\sqrt{1-A/B}\right)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Согласно классическим результатам Г. Герца зона контакта

$$\sigma' = \left\{ x, y : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

ограничивается эллипсом $\partial\sigma'$. Нагрузка и полуоси эллипса $\partial\sigma'$ связаны соотношениями [8]

$$A = \frac{3P(\theta_1 + \theta_2) I_1(k)}{2a^3}, \quad B = \frac{3P(\theta_1 + \theta_2) I_2(k)}{2b^3}, \quad (2.3)$$

$$\alpha = \frac{3P(\theta_1 + \theta_2) F_1(k)}{2a},$$

$$I_1(k) = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)^3}}, \quad I_2(k) = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^{-2}z^2)^3}},$$

$$F_1(k) = F(k_1) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$k = \frac{b}{a} < 1, \quad k_1^2 = 1 - k^2, \quad \theta_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}, \quad i = 1, 2,$$

где $F_1(k)$ — эллиптический интеграл первого рода, E_i, ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона i -го тела. Затем находим

$$\frac{A}{B} = \frac{k^3 I_1(k)}{I_2(k)}. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что отношение $b/a = k < 1$ не зависит от нагрузки P и определяется геометрическими характеристиками поверхностей в точке контакта. Величина силы задается выражением

$$P = \frac{2 [I_1(k)I_2(k)]^{1/4} \alpha^{3/2}}{3 (\theta_1 + \theta_2) k^{3/4} (F_1(k))^{3/2} (AB)^{1/4}}.$$

Силовая функция U взаимодействия двух контактирующих тел вычисляется из условия $\delta U = -P\delta\alpha$ в виде

$$U(\alpha) = -\frac{4 [I_1(k)I_2(k)]^{1/4} \alpha^{5/2}}{15 (\theta_1 + \theta_2) k^{3/4} (F_1(k))^{3/2} (AB)^{1/4}}. \quad (2.5)$$

Правая часть отношения (2.5) представляется в форме

$$U(\alpha) = -f(k)V^\beta S^\gamma p^\delta, \quad (2.6)$$

где величины V , S , p определены в (2.2). Сравнивая степени величин α и (AB) в выражениях (2.5) и (2.6) функции U , получим уравнения

$$2\beta + \gamma + \delta/2 = 5/2, \quad \beta + \gamma + \delta/2 = 1/2,$$

из которых найдем $\beta = 2$, $\gamma = -(3+\delta)/2$. Попытаемся найти δ и γ таким образом, чтобы функция $f(k)$ была почти постоянной. Имеем

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{4^{2-\delta} f_1(k)}{15\pi^{(1-\delta)/2} (\theta_1 + \theta_2)}, \\ f_1(k) &= \frac{[I_1(k)]^{(1+\delta)/4} [I_2(k)]^{(1-\delta)/4}}{k^{3(1-\delta)/4} [F_1(k)]^{3/2} E_1^\delta(\sqrt{A/B})}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для оценки значений функции $f_1(k)$ выразим $I_1(k)$ и $I_2(k)$ через эллиптические интегралы. Согласно (2.3) имеем

$$k \frac{dF_1(k)}{dk} = \int_0^\infty \frac{-k^2 z^2 dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2 z^2)^3}} = I_1(k) - F_1(k),$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^{-2}z^2)}} = \int_0^\infty \frac{k du}{\sqrt{(1+u^2)(1+k^2 u^2)}} =$$

$$= kF_1(k), \quad z = ku,$$

$$k \frac{d(kF_1(k))}{dk} = \int_0^\infty \frac{k^{-2} z^2 dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^{-2}z^2)^3}} = kF_1(k) - I_2(k),$$

Следовательно,

$$I_2(k) = -k^2 \frac{dF_1(k)}{dk}.$$

Далее имеем [9]

$$\frac{dF_1(k)}{dk} = \frac{1}{1-k^2} [kF_1(k) - k^{-1}E_1(k)],$$

откуда следует

$$I_1(k) = \frac{F_1(k) - E_1(k)}{1-k^2}, \quad I_2(k) = \frac{k[E_1(k) - k^2 F_1(k)]}{1-k^2}.$$

Окончательно для функции $f_1(k)$ получим выражение

$$f_1(k) = \frac{(1 - E_1 F_1^{-1})^{(1+\delta)/4} (E_1 F_1^{-1} - k^2)^{(1-\delta)/4}}{k^{(1-\delta)/2} (1 - k^2)^{1/2} F_1 E_1^\delta \left(\sqrt{A/B} \right)}. \quad (2.8)$$

Функция $f_1(k)$ остается ограниченной, если k стремится к единице, поскольку согласно [9]

$$\lim_{k \rightarrow 1} \frac{F_1(k) - E_1(k)}{1 - k^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{k \rightarrow 1} F_1(k) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \sqrt{\frac{A}{B}} = 1,$$

$E_1(1) = \pi/2$ и, значит, $\lim_{k \rightarrow 1} f_1(k) = 2^{1/2+\delta}\pi^{-1-\delta}$. Анализируя числовые значения функции (2.8), отметим, что при $\delta = 1/2$ функция $f_1(k)$ близка к постоянной (см. табл. 2.1, в которой $k_1 = \sqrt{1 - k^2}$).

Таблица 2.1.

$\theta(^{\circ})$	$\frac{A}{B}$	k	k_1	$F_1(k)$	$E_1(k)$	$E_1\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right)$	$f_1(k)$
10	0.007654	0.04704	0.99889	4.45519	1.00449	1.01279	0.361185
20	0.031091	0.10801	0.99415	3.62145	1.01823	1.04114	0.356123
30	0.071797	0.18057	0.98356	3.11635	1.04281	1.08074	0.355783
40	0.132474	0.26562	0.96408	2.74390	1.07960	1.13030	0.356504
50	0.217443	0.36524	0.93091	2.44357	1.13101	1.19008	0.357392
60	0.333333	0.48263	0.87582	2.18830	1.20015	1.26118	0.358163
70	0.490291	0.62225	0.78282	1.96372	1.29147	1.35440	0.357544
80	0.704088	0.79155	0.61110	1.75960	1.41180	1.44722	0.359070
90	1.000000	1.00000	0.00000	1.57080	1.57080	1.57080	0.359174

Величины θ и A/B удовлетворяют уравнению $A/B = \text{tg}^2(\theta/2)$. При изменении угла θ от 20° до 90° среднее значение функции $f_1(k)$ равно 0.357469. Отклонение функции $f_1(k)$ от своего среднего значения составляет 0.477% для $\theta = 90^{\circ}$ (максимум) и -0.472% для $\theta = 30^{\circ}$ (минимум). Отсюда следует, что силовая функция (2.6) может быть представлена в виде

$$U = -0.357469 \frac{8}{15\pi^{1/4}(\theta_1 + \theta_2)} \frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}}. \quad (2.9)$$

График функции $f_1(k)$ при $\delta = 1/2$ и ее значения в ряде точек (см. рис. 2 и табл. 2.2) были получены численными методами на основе формул, следующих из формул в соотношениях (2.3), (2.4), а именно

$$f_1(k) = \frac{D_2^{1/2} (D_2 D_1^{-1} - 1)^{3/8}}{F_1^{3/2} E_1^{1/2} (D_2 D_1^{-1} - 1)^{1/2}},$$

$$D_1(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1 - (1 - k^2) \sin^2 \varphi]^{3/2}},$$

$$D_2(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{[1 - (1 - k^2) \sin^2 \varphi]^{3/2}}.$$

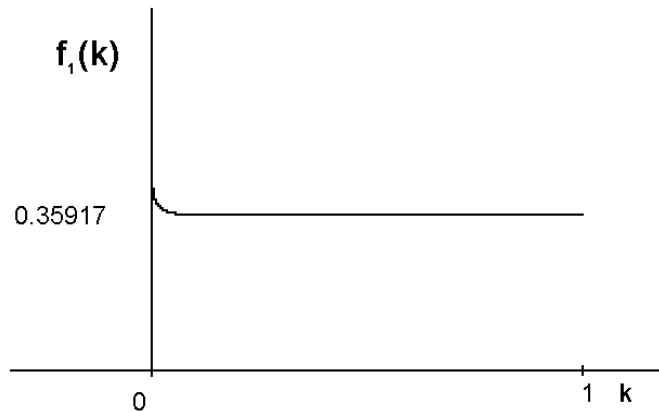


Рис. 2. График функции $f_1(k)$

Среднее значение функции $f_1(k)$ по данным табл. 2.2 равно 0.35803, а максимальные отклонения от среднего значения составляют -0.564% и 0.318% . Кроме того, $f_1(k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow 0$. Эллиптическая зона контакта вырождается в отрезок, что не соответствует предположениям теории контакта Герца. Однако следует заметить,

Таблица 2.2.

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f_1(k)$	0.35655	0.35601	0.35688	0.35767	0.35825
k	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f_1(k)$	0.35865	0.35891	0.35907	0.35915	0.35917

что уже для довольно вытянутых эллиптических зон контакта ($k=0.1$) функция $f_1(k)$ близка к своему среднему значению.

Сделаем еще одно замечание о границах применимости контактной теории Герца. Аппроксимация расстояния между точками контактирующих поверхностей формулой (2.1) будет достаточно хорошей, если главные радиусы кривизны поверхности, порождаемой функцией расстояний между точками контактирующих поверхностей, в окрестности точки контакта будут значительно больше полуосей эллипса контактной зоны.

Положение первого тела относительно второго задается шестью обобщенными координатами (\mathbf{R}, \mathbf{q}) , где $(\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3))$ — координаты какой-либо точки первого тела в системе координат, связанной со вторым телом, а $(\mathbf{q} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3))$ — углы Крылова, определяющие ориентацию первого тела относительно второго (три последовательных поворота относительно оси Ox и образов осей Oy , Oz) [10]. Зная функции $V(\mathbf{R}, \mathbf{q})$, $S(\mathbf{R}, \mathbf{q})$, $p(\mathbf{R}, \mathbf{q})$ и используя выражение (2.9), определим силу и проекции момента на соответствующие оси (обобщенные силы) при взаимо-

действии двух тел в форме

$$\mathbf{F} = \text{grad}_{bfR} U = \left(\frac{\partial U}{\partial X_1}, \frac{\partial U}{\partial X_2}, \frac{\partial U}{\partial X_3} \right), \quad (2.10)$$

$$M_1 = \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}, \quad M_2 = \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}, \quad M_3 = \frac{\partial U}{\partial \varphi_3}.$$

В частности, если система координат, связанная со вторым телом, совпадает с системой координат, связанной с первым телом, то производные в (2.10) следует вычислять при нулевых значениях всех аргументов. При этом формулы (2.10) будут определять проекции сил и моментов на оси выбранных систем координат. Силовая функция (2.9), зависящая только от характеристик пересечения двух тел V , S , p в предположении, что тела проникают друг в друга без деформаций, имеет инвариантную форму, поскольку она не зависит от исходной точки контакта двух тел и представления поверхностей в окрестности этой точки в виде квадратичных функций в подходящей системе координат. Очевидно, что объем области пересечения двух тел V должен быть положительным.

3. Обобщение контактной задачи теории упругости. В качестве обобщения рассмотрим следующую ситуацию. Пусть два упругих тела имеют одну общую точку O и общую касательную плоскость Oxy , а расстояние между двумя точками поверхностей двух тел с координатами (x, y, z_1) , (x, y, z_2) не выражаются квадратичной формой с постоянными коэффициентами. Пусть второе тело неподвижно, а первое смещено таким образом, что пересечение двух тел $\nu = \nu_1 \cap \nu_2$ не пусто (ν_1 и ν_2 — области занимаемые телами). Пусть σ — проекция области ν на плоскость Oxy и $l = \partial\sigma$ — граница

области σ . Обозначим через V, S, p объем области ν , площадь σ и длину l . Величины V, S, p являются функциями вектора перемещений точки O первого тела и углов Крылова \mathbf{q} , которые определяют ориентацию первого тела относительно второго. Поскольку взаимодействующие тела предполагаются упругими, то существует силовая функция. Примем эту функцию в инвариантной форме (2.9). Это утверждение невозможно доказать аналитически в общем случае, но оно может быть проверено с помощью числовых расчетов в каждом конкретном случае или путем сравнения с экспериментом. Сила и проекции момента на соответствующие оси контактирующих упругих тел вычисляются по формулам (2.10). В предложенной методике предполагается, что в окрестности точки контакта функция расстояния $d(x, y)$ в соотношении (2.1) определяет поверхность с положительными главными кривизнами. В обобщенном случае относительно этих кривизн $C_k(x, y)$ ($k = 1, 2$) и размеров области контакта будем предполагать выполненными условия

$$0.1 < C_1(x, y)C_2^{-1}(x, y) < 10, \dim \sigma \ll \min (C_1^{-1}, C_2^{-1}) \quad (3.1)$$

при $(x, y) \in \sigma$. Здесь $\dim \sigma$ — размер области контакта. Первое условие в (3.1) в случае классического контакта Герца обеспечивает удовлетворительную аппроксимацию константой функции $f_1(k)$, а второе — аппроксимацию поверхности $z = d(x, y)$ в зоне контакта.

Замечание 1. Если в общем случае поверхности тел в окрестности контакта не представляются квадратичными формами в окрестности точки контакта, то компоненты обобщенных сил, вычисляемые по формулам (2.10), могут быть отличными от нуля, т. е. результирующая сила

взаимодействия двух тел, вообще говоря, не направлена по общей нормали к поверхностям тел в точке первоначального соприкосновения тел.

Полученный таким образом закон распределения нормальных сил качественно совпадает с точными решениями в ряде случаев симметричных поверхностей контактирующих тел [3, 11]. Если упругое тело, поверхность которого задана функцией $z = A\rho^\lambda$ в окрестности точки контакта (ρ, φ, z — цилиндрические координаты) контактирует с абсолютно жесткой плоскостью [3, 11], то функция (2.1) имеет вид $d = \alpha - A\rho^\lambda$. Заметим, что в этом случае условия (3.1) не выполняются. Однако найдем силу контактного взаимодействия по формуле (2.10). Имеем $d = \alpha - A\rho^\lambda$, $r = (\alpha/A)^{1/\lambda}$ где r — радиус окружности области пересечения контактирующих тел. Далее найдем

$$p = 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\alpha}{A}\right)^{1/\lambda}, \quad S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{\alpha}{A}\right)^{2/\lambda}, \quad V = \frac{\pi \alpha^{1+2/\lambda} \lambda}{A^{2/\lambda}(\lambda + 2)}.$$

В результате сила контактного взаимодействия оказывается равной

$$P = \frac{E}{1 - \nu^2} \kappa_0(\lambda) \frac{\alpha^{1+1/\lambda}}{A^{1/\lambda}}, \quad \kappa_0(\lambda) = \frac{2\lambda(2\lambda + 1)}{2(\lambda + 2)^2} \quad (3.2)$$

В работе [3] приведена формула для силы контактного взаимодействия рассмотренных выше тел, совпадающая с формулой (3.2), в которой коэффициент $\kappa_0(\lambda)$ обозначен через $\kappa(\lambda)$ и выражается через гамма-функции. Значения полученных коэффициентов и их относительная погрешность представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

λ	1	2	3	4
$\kappa(\lambda)$	0.636	0.942	1.127	1.253
$\kappa_0(\lambda)$	0.5	0.937	1.26	1.5
$\frac{\kappa_0 - \kappa}{\kappa} 100$	-21.3	-0.53	11.8	19.7

Как следует из табл. 3.1, коэффициенты, полученные на основе предложенной методики, отличаются от коэффициентов, найденных в процессе решения задачи об упругом взаимодействии контактирующих тел, примерно на 20% в рассмотренном диапазоне изменения параметра λ . Отметим, что при $\lambda \neq 2$ кривизна поверхности упругого тела в точке контакта равна либо бесконечности ($\lambda < 2$), либо нулю ($\lambda > 2$) и при этом нарушается первое условие в (3.1).

4. Пример численного расчета нормальных сил.

Вычислим нормальную силу в случае негерцевого контакта, основываясь на информации из статьи [5], где представлены графики функций взаимного проникновения недеформированных поверхностей колеса и рельса в трех случаях их сближения. Эти функции соответствуют сечениям областей пересечения цилиндрической поверхности рельса и поверхности вращения колеса плоскостью, проходящей через ось колеса и перпендикулярной образующим рельса. Аппроксимируем эти «контактные» кривые функцией $G(y)$, состоящей из половинок двух парабол и отрезка прямой K_1K_2 (рис. 3). Ось Oy горизонтальна и проходит через точки контакта, когда колесная пара расположена симметрично относительно правого и левого рельса, а ее

ось также горизонтальна. Начало системы координат, точка O , соответствует точке контакта левого рельса в невозмущенном ненагруженном состоянии. Ось Oz вертикальна, а ось Ox направлена вдоль рельса на нас. Функция $G(y)$ описывает расстояния между точками колеса и рельса, имеющими одинаковые координаты y и $x = 0$, в каком-либо их взаимном расположении. Имеем

$$G(y) = \begin{cases} G_1(y) = h_1 - h_1 \frac{(y-y_1)^2}{(y_1-y_0)^2}, & y_0 \leq y \leq y_1, \\ G_2(y) = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, & y_1 \leq y \leq y_2, \\ G_3(y) = h_2 - h_2 \frac{(y-y_2)^2}{(y_3-y_2)^2}, & y_2 \leq y \leq y_3. \end{cases} \quad (4.1)$$

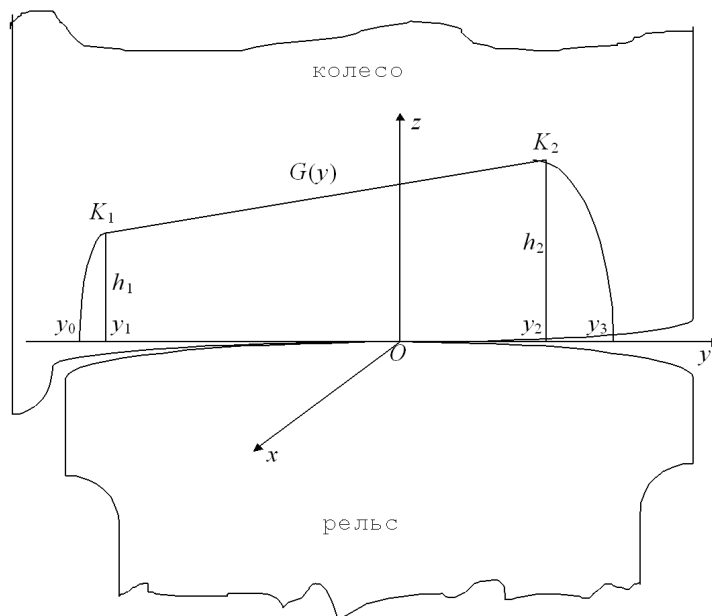


Рис. 3. Контакт колеса и рельса

Невозмущенное расстояние между точками поверхностей двух тел представляется в виде

$$w(x, y) = G(y) - 1.11x^2, \quad 1.11 = (2R_W)^{-1},$$

где $R_W = 0.45\text{м}$ — радиус колеса. Основываясь на этом представлении, необходимо вычислить характеристики пересечений колеса с рельсом V , S , p . Прямая линия в области $y_1 < y < y_2$ выбрана как аппроксимация выпуклой дуги малой кривизны для облегчения подсчета упомянутых выше характеристик пересечений колеса с рельсом. То обстоятельство, что в этой области одна из кривизн поверхности $w(x, y)$ равна нулю, не вносит существенных поправок в определяемые ниже величины и их производные. Область $y_1 < y < y_2$ соответствует зоне контакта колеса и рельса, в которой кривые, образующие цилиндрическую поверхность рельса и поверхность вращения колеса, почти конгруэнтны. На основании данных работы [5], где на фигурах 8 и 9 приведены графики взаимного проникновения недеформированных профилей колеса и рельса, определим значения y_j , h_j в зависимости от бокового смещения Δ левого колеса относительно рельса по оси Oy и представим их в табл. 4.1 (за единицу измерения принят метр).

Далее найдем

$$V = \sum_{i=1}^3 \iint_{\sigma_i} w(x, y) dx dy, \quad S = \sum_{i=1}^3 \iint_{\sigma_i} dx dy, \quad p = 2 \sum_{i=1}^3 p_i.$$

Таблица 4.1.

$\Delta 10^3$	$y_0 10^3$	$y_1 10^3$	$y_2 10^3$	$y_3 10^3$	$h_1 10^4$	$h_2 10^4$
0	-11.6	-7.5	3.5	13.0	0.59	$0.67 \cdot 10^{-4}$
0.5	-13.0	-8.5	0	11.8	0.71	0.61
1	-14.2	-9.4	-3.0	9.6	0.84	0.60

$$\sigma_i = \{x, y : G_i(y) \geq 1.1q1x^2, y_{i-1} \leq y \leq y_i\},$$

$$i = 1, 2, 3;$$

$$p_{2k-1} = \sqrt{h_k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{0.9 \sin^2 \varphi + \frac{(y_{2k-1} - y_{2k-2})^2}{h_k} \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

$$k = 1, 2;$$

$$p_2 \approx \left[(y_2 - y_1)^2 + 0.9 \left(h_1 + h_2 - 2\sqrt{h_1 h_2} \right) \right].$$

Область пересечения двух тел и зона их контакта разбивается на три части плоскостями $y = y_1$ и $y = y_2$. Объемы полученных частей, площади частей зоны контакта и периметры их общих границ с границей зоны контакта обозначены через V_i , S_i , p_i ($i = 1, 2, 3$) соответственно. Используя формулы (2.2), получим

$$V_{2k-1} = 0.74547 h_k^{3/2} (y_{2k-1} - y_{2k-2}), \quad k = 1, 2$$

$$V_2 = 0.50622 (y_2 - y_1) \frac{h_2^{5/2} - h_1^{5/2}}{h_2 - h_1},$$

$$S_{2k-1} = 1.4909 h_k^{1/2} (y_{2k-1} - y_{2k-2}), \quad k = 1, 2$$

$$S_2 = 1.2655 (y_2 - y_1) \frac{h_2^{3/2} - h_1^{3/2}}{h_2 - h_1}.$$

Результаты вычислений представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2.

Боковое смещение (м)	V (м ³)	S (м ²)	p (м)
0	$1.2234 \cdot 10^{-8}$	$3.2860 \cdot 10^{-4}$	$6.7459 \cdot 10^{-2}$
$0.5 \cdot 10^{-3}$	$1.1970 \cdot 10^{-8}$	$3.2498 \cdot 10^{-4}$	$6.7632 \cdot 10^{-2}$
10^{-3}	$1.2086 \cdot 10^{-8}$	$3.1406 \cdot 10^{-4}$	$6.6614 \cdot 10^{-2}$

Если колесо перемещается вдоль оси Oz на расстояние ζ , то это означает, что его недеформированный профиль перемещается на ту же величину вдоль оси Oz . Следовательно, расстояния между точками профилей колеса и рельса изменяются на эту величину и необходимо заменить кривую в (4.1) на кривую $G(y) - \zeta$, заменяя также интервалы изменения переменной y , так как границы области пересечения колеса и рельса в рамках принятой аппроксимации меняются, а именно

$$\begin{aligned} G_1(y) - \zeta = 0 &\Rightarrow \left[y_0 + (y_1 - y_0) \left(1 - (1 - \zeta / h_1)^{1/2} \right), y_1 \right], \\ G_3(y) - \zeta = 0 &\Rightarrow \left[y_2, y_3 + (y_3 - y_2) \left(1 - (1 - \zeta / h_2)^{1/2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В результате характеристики пересечения рельса и колеса становятся функциями их взаимного перемещения. Подставляя выражения (4.2) в формулы (4.1), получим зависимость характеристик пересечения поверхностей колеса и рельса от вариации их взаимного перемещения ζ по оси Oz и, исходя из этих зависимостей путем прямых вычислений, найдем для производных функций V , S , p по переменной ζ при $\zeta = 0$ следующие выражения:

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta} = -S,$$

$$\frac{\partial S_{2k-1}}{\partial \zeta} = -\frac{S_{2k-1}}{h_k}, \quad \frac{\partial p_{2k-1}}{\partial \zeta} = -\frac{p_{2k-1}}{2h_k}, \quad k = 1, 2,$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial \zeta} = -\frac{3S_2}{2(h_1 + h_2 + \sqrt{h_1 h_2})},$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \zeta} = -\frac{0.45}{p_2} \left(2 - \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} - \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \right),$$

Из этих формул можно вычислить величины, представленные в табл. 4.3.

Таблица 4.3.

Боковое смещение (м)	$-\frac{2S}{V} \text{ (м}^{-1}\text{)}$	$-\frac{7}{4S} \frac{\partial S}{\partial \zeta} \text{ (м}^{-1}\text{)}$	$-\frac{1}{2p} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \text{ (м}^{-1}\text{)}$	$\frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} \text{ (м}^3\text{)}$
0	$5.3720 \cdot 10^4$	$2.0462 \cdot 10^4$	$0.2645 \cdot 10^4$	$0.4847 \cdot 10^{-10}$
$0.5 \cdot 10^{-3}$	$5.4302 \cdot 10^4$	$2.1768 \cdot 10^4$	$0.2891 \cdot 10^4$	$0.4737 \cdot 10^{-10}$
10^{-3}	$5.1973 \cdot 10^4$	$2.1867 \cdot 10^4$	$0.2932 \cdot 10^4$	$0.5088 \cdot 10^{-10}$

Используя формулы (2.9), (2.10) и выражения для производных, представленные в таблице 4.3, находим

$$P_z = -0.4945 \cdot 10^{11} \frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} \left[\frac{2S}{V} - \frac{7}{4S} \frac{\partial S}{\partial \zeta} + \frac{1}{2p} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right],$$

где принято $\theta_1 = \theta_2 = (1 - \nu^2) \pi^{-1} E^{-1}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ нм}^{-2}$, $\nu = 0.3$. Отсюда следует, что $P_z(0) = 86.05 \text{ кн}$, $P_z(0.5) = 82.98 \text{ кн}$, $P_z(1) = 83.12 \text{ кн}$.

Аргументом P_z является боковое смещение в мм. Отметим хорошее соответствие с экспериментальным значением нормальной силы 88 кн [5].

Замечание 2. Для вычисления касательных сил при контактном взаимодействии колеса с рельсом можно использовать программу “FASTSIM” [7], заменив рассмотренный выше негерцев контакт в некотором смысле эквивалентным герцевым контактом. Зная основные характеристики негерцевого контакта V , S , p и нормальную контактную силу P , примем эти значения для герцевого контакта, который назовем эквивалентным. Согласно (2.2) получим

$$\alpha = \frac{2V}{S}, \quad \sqrt{AB} = \frac{2\pi V}{S^2}, \quad \left(\frac{B}{A}\right)^{1/4} \cdot E_1\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = \frac{p}{4} \left(\frac{\pi}{S}\right)^{1/2}.$$

Вычисляя отношение B/A , находим согласно (2.4) величину $k = b/a$. Затем получим α из третьего уравнения (2.3) и, наконец, b , A и B . Определенные таким образом характеристики эквивалентного герцевого контакта используются в качестве входных данных программы “FASTIM” для вычисления касательных сил реакции при контакте колеса с рельсом.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05–08–65470.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hertz H.* Ges. Werken. B.1, Leipzig, 1895. S. 155–174.
2. *Boussinesq J.* Applications des potentiels a l' étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Mémoires suivis de notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse. Paris: Gautier Villars, 1885. 722 p.

3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
4. *Kalker J. J.* Three-dimensional elastic bodies in rolling contact. Kluwer Academic Publishers., 1990. 344 p.
5. *Pascal J. P.* About multi-hertzian-contact hypothesis and equivalent conicity in the case of S1002 and UIC60 analytical wheel/rail profiles. // Vehicle System Dynamics. 1993. Vol. 22. P. 57–78.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. *Kalker J. J.* A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. // Vehicle System Dynamics. 1982. Vol. 11. P. 1–13.
8. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674с.
9. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 516 с.
10. *Голубев Ю. Ф.* Основы теоретической механики. М.: Изд. Моск. ун-та, 2000. 720 с.
11. *Jaeger J.* Analytical solutions of contact impact problems // Appl. Mech. Rev.. 1994. Vol. 47. No. 2. P.35 – 54.

УДК 531/534+681.3.06

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ КОНТАКТНОЙ
ЗАДАЧИ ГЕРЦА

И. И. Косенко, Е. Б. Александров

Рассматривается методика компьютерной реализации модели упругого контакта твердых тел в рамках задачи Герца. Подробно анализируется алгоритм преобразования геометрических характеристик поверхностей тел в локальную систему координат контакта, что играет важную роль для применения объектно-ориентированного подхода при моделировании процесса контактирования. Вычисления проводятся в рамках формулировок так называемой задачи «Герц-точка», когда поверхности тел приходят в соприкосновение в точности по одной точке. В заключение представлен один из вариантов вычисления нормальной упругой силы и полуосей контактной площадки, обеспечивающий последовательную редукцию задачи к одному скалярному трансцендентному уравнению, зависящему от полных эллиптических интегралов первого и второго рода.

Ключевые слова: контактная задача теории упругости, модель Герца.

1. Редукция в окрестности точки контакта. В рамках формализма, применяемого для моделирования односторонней связи [1], рассматривается ее частный случай, соответствующий механике контактного взаимодействия двух упругих тел (в наших обозначениях идентификации тел A и B), ограниченных достаточно регулярными внешними поверхностями (рис. 1).

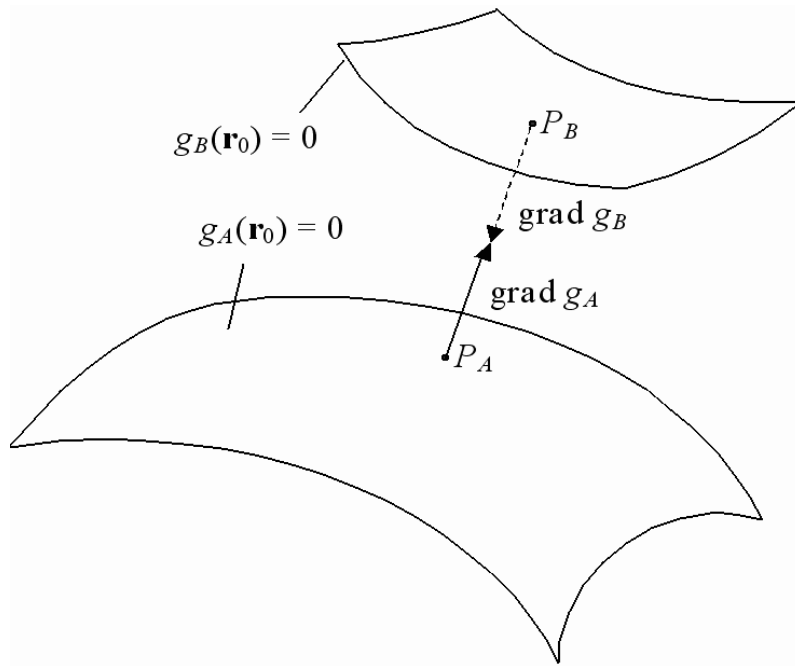


Рис. 1. Окрестность области контактирования

Предполагается, что внешние поверхности тел задаются в их главных центральных осях инерции при помощи уравнений $f_\alpha(\mathbf{r}_\alpha) = 0$ ($\alpha = A, B$), где \mathbf{r}_A и \mathbf{r}_B — радиусы-векторы точек поверхностей относительно координатных осей $O_A x_A y_A z_A$, $O_B x_B y_B z_B$ тел A и B . Тогда в инерциальной системе координат $O_0 x_0 y_0 z_0$ (связанной с базовым телом), по отношению к которой строится динамика всех тел механической системы, эти же уравнения будут иметь вид $g_\alpha(\mathbf{r}_0) = 0$ ($\alpha = A, B$). Функции $g_\alpha(\mathbf{r}_0) = f_\alpha [T_\alpha^T (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{O_\alpha})]$ ($\alpha = A, B$) косвенно зависят от времени через переменные \mathbf{r}_{O_A} , \mathbf{r}_{O_B} , T_A , T_B ($T_A^{-1} = T_A$, $T_B^{-1} = T_B$), где \mathbf{r}_{O_A} , \mathbf{r}_{O_B} — текущие радиусы-векторы положений центров масс тел A и B , а T_A , T_B — ортогональные матрицы текущих ориентаций этих тел.

Объект связи в нашей модели должен в каждый теку-

щий момент времени вычислять положения ближайших точек P_A и P_B взаимодействующих тел. В силу сделанных предположений такие точки определяются единственным образом. Пусть \mathbf{r}_{P_A} , \mathbf{r}_{P_B} — радиусы-векторы этих точек относительно инерциальной системы координат. Из геометрических соображений получим систему уравнений для \mathbf{r}_{P_A} , \mathbf{r}_{P_B} :

$$\begin{aligned} \text{grad } g_A(\mathbf{r}_{P_A}) &= \lambda \cdot \text{grad } g_B(\mathbf{r}_{P_B}), & g_A(\mathbf{r}_{P_A}) &= 0, \\ \mathbf{r}_{P_A} - \mathbf{r}_{P_B} &= \mu \cdot \text{grad } g_B(\mathbf{r}_{P_B}), & g_B(\mathbf{r}_{P_B}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Градиенты вычисляются по формулам

$$\text{grad } g_\alpha(\mathbf{r}_{P_\alpha}) = T_\alpha \text{grad } f_\alpha [T_\alpha^T (\mathbf{r}_{P_\alpha} - \mathbf{r}_{O_\alpha})] \quad (\alpha = A, B).$$

где λ , μ — вспомогательные переменные. Уравнения (1.1) можно использовать при отсутствии или при наличии контакта тел. Как показывает вычислительный опыт [1], вместо алгебраических уравнений удобнее и надежнее пользоваться уравнениями связи в дифференциальной форме, которые также часто применяются в динамическом анализе механических систем. При этом вместо (1.1) связь задается системой дифференциально-алгебраических уравнений, дифференциальная подсистема которой имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}_{P_A}}{dt} = \mathbf{u}_{P_A}, \quad \frac{d\mathbf{r}_{P_B}}{dt} = \mathbf{u}_{P_B}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \xi, \quad \frac{d\mu}{dt} = \eta,$$

а алгебраическая подсистема задается уравнениями, линейными относительно правых частей дифференциальной

ПОДСИСТЕМЫ

$$\begin{aligned} & [\boldsymbol{\omega}_A, \text{grad } g_A] + T_A \text{Hess } f_A T_A^T (\mathbf{u}_{P_A} - \mathbf{v}_{P_A}) - \\ & - \xi \text{grad } g_B - \\ & - \lambda ([\boldsymbol{\omega}_B, \text{grad } g_B] + T_B \text{Hess } f_B T_B^* (\mathbf{u}_{P_B} - \mathbf{v}_{P_B})) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{P_A} - \mathbf{u}_{P_B} - \eta \text{grad } g_B - \\ & - \mu ([\boldsymbol{\omega}_B, \text{grad } g_B] + T_B \text{Hess } f_B T_B^T (\mathbf{u}_{P_B} - \mathbf{v}_{P_B})) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$(\text{grad } g_A, \mathbf{u}_{P_A}) - (\text{grad } f_A, T_A^T \mathbf{v}_{P_A}) = 0,$$

$$(\text{grad } g_B, \mathbf{u}_{P_B}) - (\text{grad } f_B, T_B^T \mathbf{v}_{P_B}) = 0.$$

При использовании дифференциальной формы связей в начале процесса моделирования необходимо позаботиться о совместности системы начальных условий для переменных \mathbf{r}_{P_A} , \mathbf{r}_{P_B} , λ , μ . В системе линейных алгебраических уравнений (1.2) векторы \mathbf{v}_{P_A} и \mathbf{v}_{P_B} являются скоростями материальных точек тел и вычисляются по формуле Эйлера

$$\mathbf{v}_{P_\alpha} = \mathbf{v}_{O_\alpha} + [\boldsymbol{\omega}_\alpha, \mathbf{r}_{P_\alpha} - \mathbf{r}_{O_\alpha}] \quad (\alpha = A, B).$$

Матрицы $\text{Hess } f_A$, $\text{Hess } f_B$ являются матрицами Гессе от функций, а $\boldsymbol{\omega}_A$, $\boldsymbol{\omega}_B$ представляют векторы угловых скоростей тел A и B .

Если тела A и B не создают геометрических препятствий для движения друг относительно друга, т. е. трехмерные области, ограниченные внешними поверхностями тел, не пересекаются, то объект связи (контакта) генерирует радиусы-векторы \mathbf{r}_{P_A} , \mathbf{r}_{P_B} точек P_A и P_B , доставляющих минимум расстояния между внешними поверхностями тел.

Из (1.1) следует, что переменная μ является индикатором наличия контакта тел A и B . Для определенности положим, что в окрестностях точек P_A, P_B векторы $\text{grad } g_A(\mathbf{r}), \text{grad } g_B(\mathbf{r})$ направлены наружу от каждого из тел. Тогда случай $\mu > 0$ соответствует отсутствию контакта, а $\mu \leq 0$ — его наличию. При $\mu < 0$ тела, точнее, их твердотельные оболочки, считаются проникающими друг в друга. В этом случае тела деформируются в области контакта. В дальнейшем применяется модель контактирования упругих тел Герца [2]. Вычислительный анализ проводится только для случая контакта (рис. 1). На рис. 1 поверхности тел в окрестности контакта считаются выпуклыми, хотя в общем случае это не обязательно.

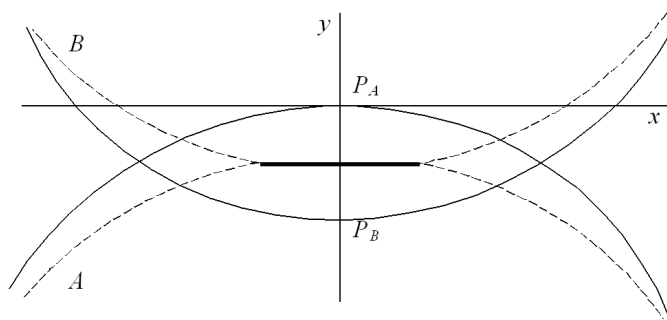


Рис. 2. Локальная система координат

Для представления контактной модели Герца в окрестности контакта построим вспомогательный ортономированный базис $\alpha, \beta, \gamma = \mathbf{n}_A$. Критерий выбора векторов α, β достаточно условен и зависит от расположения вектора γ по отношению к векторам инерциального базиса $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$. Основная задача состоит в том, чтобы избежать

потери точности от малых знаменателей при вычислении матриц перехода. Если угол между ортом $\boldsymbol{\gamma}$ и вектором \mathbf{i}_0 достаточно велик, что проверяется при помощи неравенства $\gamma_x \leq 1/\sqrt{3}$, то вектор $\boldsymbol{\alpha}$ строится при помощи векторного произведения

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{i}_0]/|[\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{i}_0]|.$$

В противном случае при $\gamma_y \leq 1/\sqrt{3}$ применяется формула

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{j}_0]/|[\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{j}_0]|.$$

Если оба условия не выполнены, т. е. имеют место неравенства $\gamma_x > 1/\sqrt{3}$ и $\gamma_y > 1/\sqrt{3}$, то $\gamma_z < 1/\sqrt{3}$, и остается воспользоваться формулой

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{k}_0]/|[\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{k}_0]|.$$

Третий базисный вектор вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}].$$

Для построенного базиса $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ строится матрица $T = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}]$, столбцы которой состоят из координат этих ортов. T является матрицей перехода от координат инерциального базиса к координатам базиса $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$. Задача состоит в вычислении уравнений внешних поверхностей тел в локальной системе координат контакта, с базисом $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ и началом P_A (Рис. 1).

Учитывая соотношение $T^{-1} = T^T$, получим матрицу перехода к собственной для тела A или B координатной системе

$$R_\alpha = T^T T_\alpha \quad (\alpha = A, B).$$

Вводя временные обозначения $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ для вектора-столбца координат точки по отношению к локальной системе P_Axyz получим

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}_{O_\alpha} + R_\alpha \mathbf{r}_\alpha \quad (\alpha = A, B),$$

где $\boldsymbol{\rho}_{O_\alpha} = (\xi_{O_\alpha}, \eta_{O_\alpha}, \zeta_{O_\alpha})^T$ — вектор-столбец координат центра масс тела α в локальной координатной системе контакта.

Пусть, как и выше, внешняя поверхность тела α в его собственных осях задается уравнением

$$f_\alpha(\mathbf{r}_\alpha) = 0 \quad (\alpha = A, B).$$

В системе координат контакта это уравнение примет вид

$$h_\alpha(\mathbf{r}) = 0 \quad (\alpha = A, B), \quad (1.3)$$

$$h_\alpha(\mathbf{r}) = f_\alpha(R_\alpha^T(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_{O_\alpha})) \quad (\alpha = A, B).$$

Разложим уравнения (1.3) в ряд в окрестности точки

$$\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha} = \boldsymbol{\rho}_{O_\alpha} + R_\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha \quad (\alpha = A, B),$$

где $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ — радиус-вектор точки P_α в собственной системе координат тела α . Если поверхности тел достаточно гладкие в зоне контакта, то имеют место разложения

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r}_\alpha) &= f_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha) + (\text{grad} f_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha), \Delta \mathbf{r}_\alpha) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\text{Hess} f_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha) \Delta \mathbf{r}_\alpha, \Delta \mathbf{r}_\alpha) + O(|\Delta \mathbf{r}_\alpha|^3), \\ h_\alpha(\mathbf{r}) &= h_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}) + (\text{grad} h_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}), \Delta \mathbf{r}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\text{Hess} h_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}) \Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}) + O(|\Delta \mathbf{r}|^3), \end{aligned}$$

где $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}$, $\Delta \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \boldsymbol{\rho}_\alpha$. Поскольку $\Delta \mathbf{r} = R_\alpha \Delta \mathbf{r}_\alpha$, то

$$\begin{aligned} \text{grad} h_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}) &= R_\alpha \text{grad} f_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha), \\ \text{Hess} h_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}) &= R_\alpha \text{Hess} f_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha) R_\alpha^T. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Поскольку в точке $\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}$ поверхности тела α функция h_α имеет нулевое значение, то с точностью до членов третьего порядка в системе координат $P_\alpha xyz$ уравнение (1.3) принимает вид

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial z} z + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\alpha & c_\alpha \\ c_\alpha & b_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad (1.5)$$

где учитываемые элементы матрицы Гесса выражаются по формулам

$$a_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial x^2}, \quad b_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial y^2}, \quad c_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial x \partial y},$$

с использованием результатов (1.4). Уравнение (1.5) имеет простой вид благодаря тому, что в точке $\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}$ в силу выбора базиса системы локальных координат имеют место равенства

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial x}(\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}) = 0, \quad \frac{\partial h_\alpha}{\partial y}(\boldsymbol{\rho}_{P_\alpha}) = 0. \quad (1.6)$$

Замечание 1. Всюду предполагается, что вектор градиента $\text{grad} f_\alpha$ направлен наружу от тела α . Если это условие не выполняется, вместо функции f_α можно рассмотреть функцию $-f_\alpha$.

В силу невырожденности поверхностей в точках P_α и равенств (1.6), выполнены условия

$$|\text{grad} h_\alpha(\mathbf{r}_\alpha)| > 0, \quad \frac{\partial h_\alpha}{\partial z}(\mathbf{r}_\alpha) \neq 0,$$

обеспечивающие разрешимость уравнений (1.5) относительно z

$$z = a'_\alpha x^2 + 2c'_\alpha xy + b'_\alpha y^2, \quad (1.7)$$

$$a'_\alpha = -\frac{a_\alpha}{\frac{\partial h_\alpha}{\partial z}}, \quad b'_\alpha = -\frac{b_\alpha}{\frac{\partial h_\alpha}{\partial z}}, \quad c'_\alpha = -\frac{c_\alpha}{\frac{\partial h_\alpha}{\partial z}}.$$

Дальнейшая редукция состоит в приведении квадратичной формы

$$q(x, y) = ax^2 + 2cxy + by^2, \quad (1.8)$$

$$a = a'_B - a'_A, \quad b = b'_B - b'_A, \quad c = c'_B - c'_A.$$

к сумме квадратов путем поворота системы координат P_Axyz вокруг оси z , задаваемого ортогональной 2×2 -матрицей:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cs & -sn \\ sn & cs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Это приводит к системе двух алгебраических уравнений

$$cs^2 + sn^2 - 1 = 0, \quad (b - a)cs \cdot sn + c(cs^2 - sn^2) = 0 \quad (1.9)$$

относительно неизвестных величин cs , sn . Система (1.9) вырождается при

$$J = 2[(b - a)(cs^2 - sn^2) - 4c \cdot cs \cdot sn] = 0,$$

где J — определитель матрицы Якоби. Вырождение возможно только при

$$(b - a)^2 + 4c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b, \quad c = 0.$$

Последние два равенства соответствуют круговой контактной площадке. В самом деле, пусть сначала $b - a \neq 0$. Исключение из системы произведения $cs \cdot sn$ приводит к уравнению

$$((b - a)^2 + 4c^2) (cs^2 - sn^2) = 0.$$

Так как в силу второго уравнения (1.9) $|cs| = |sn| = 1/\sqrt{2}$, то $cs^2 - sn^2 \neq 0$. Следовательно, выполнены равенства $b - a = 0$, $c = 0$.

После поворота квадратичная форма (1.8) примет вид

$$q(x, y) = Ax^2 + By^2, \quad 0 < A \leq B. \quad (1.10)$$

Случай $A > B$ сводится к (1.10) дополнительным поворотом системы координат на угол $\pi/2$.

Замечание 2. Положительная определенность формы (1.8) следует из предположения о соприкосновении внешних поверхностей тел в одной точке (Герц-точка), выполненного для членов наинизшей степени в уравнениях поверхностей, т. е. для квадратичных форм (1.7).

2. Методика вычисления нормальной силы. Зная коэффициенты A и B в представлении (1.10) и следуя известной методике [3–5] для вычисления суммарной силы нормального давления и полуосей эллипсоидальной контактной площадки, решим систему трех трансцендентных

уравнений

$$\begin{aligned} \frac{FD}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(\alpha + \xi)(\beta + \xi)\xi}} &= h, \\ \frac{FD}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\alpha + \xi)\sqrt{(\alpha + \xi)(\beta + \xi)\xi}} &= A, \\ \frac{FD}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\beta + \xi)\sqrt{(\alpha + \xi)(\beta + \xi)\xi}} &= B \end{aligned} \quad (2.1)$$

относительно неизвестных α, β, F . Здесь A, B и величина $h = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|$ считаются заданными. Параметр

$$D = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \nu_A^2}{E_A} + \frac{1 - \nu_B^2}{E_B} \right)$$

зависит от упругих свойств материалов тел, ν_A, ν_B — коэффициенты Пуассона, E_A, E_B — модули Юнга, α, β — квадраты полуосей контактного эллипса вдоль осей x и y , F — сумма нормальных упругих сил взаимодействия тел, распределенных по эллиптической площадке. Нормальное давление в соответствии с моделью Герца [2] вычисляется по формуле

$$p(x, y) = \frac{3F}{2\pi\sqrt{\alpha\beta}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta}}.$$

Последние два уравнения системы (2.1) отделяются при подстановке $\xi \mapsto \eta$, $\xi = \lambda\eta$ в интегралах левой сто-

роны (2.1), после чего с учетом обозначения

$$I_1(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\alpha + \xi)\sqrt{(\alpha + \xi)(\beta + \xi)}\xi}$$

эти уравнения примут вид

$$\frac{FD}{\pi} \cdot \frac{I_1(\alpha, \beta)}{\lambda^{3/2}} = A, \quad \frac{FD}{\pi} \cdot \frac{I_1(\beta, \alpha)}{\lambda^{3/2}} = B,$$

где неизвестная величина λ играет роль масштабного множителя и вычисляется из условия

$$\frac{FD}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^{3/2}} = 1. \quad (2.2)$$

Вместо неизвестных α, β введем новые масштабированные переменные $\alpha' = \alpha/\lambda, \beta' = \beta/\lambda$, удовлетворяющие системе двух трансцендентных уравнений

$$I_1(\alpha', \beta') = A, \quad I_1(\beta', \alpha') = B. \quad (2.3)$$

Для численного решения системы (2.3) полезно провести дальнейшую редукцию размерности, разделив первое уравнение на второе. Вычислив интегралы левых частей системы (2.3). Так как эти интегралы равномерно сходятся при

$\eta \rightarrow 0, \infty$, то можно воспользоваться для их вычисления формулой дифференцирования по параметрам α', β'

$$I_1(\alpha', \beta') = -2 \frac{\partial I(\alpha', \beta')}{\partial \alpha'}, \quad I_1(\beta', \alpha') = -2 \frac{\partial I(\alpha', \beta')}{\partial \beta'}, \quad (2.4)$$

$$I(\alpha', \beta') = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(\alpha' + \xi)(\beta' + \xi)}\xi}.$$

В силу (2.3) условие $A \leq B$ эквивалентно $\alpha' \geq \beta'$. Тогда

$$I(\alpha', \beta') = \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} \mathbf{K}(k), \quad k = \sqrt{\frac{\alpha' - \beta'}{\alpha'}},$$

где k — модуль эллиптического интеграла, равный в силу последней формулы эксцентриситету эллипса контакта.

Пусть $c = k^2$ (ср. [6]). В силу регулярности эллиптических интегралов по $c = 1 - \beta'/\alpha'$ получим

$$I_1(\alpha', \beta') = \frac{2}{\alpha'^{3/2}} \left(\mathbf{K}(c) - 2(1-c) \frac{d\mathbf{K}(c)}{dc} \right),$$

$$I_1(\beta', \alpha') = \frac{4}{\alpha'^{3/2}} \frac{d\mathbf{K}(c)}{dc}.$$

Искомое уравнение относительно величины c имеет вид

$$\frac{1}{2} \mathbf{K}(c) \left(\frac{d\mathbf{K}(c)}{dc} \right)^{-1} - (1-c) = A/B. \quad (2.5)$$

Зная решение $\mathbf{K}(c)$ уравнения (2.5), можно при помощи, например, второго из уравнений (2.3) получить величину

$$\alpha' = \left(\frac{4}{B} \frac{d\mathbf{K}(c)}{dc} \right)^{2/3}$$

после чего величина β' может быть найдена по формуле

$$\beta' = \alpha'(1-c).$$

Затем при помощи первого уравнения (2.1) находится значение λ , которое с учетом зависимости (2.2) силы от λ имеет вид

$$\lambda = \frac{h}{I(\alpha', \beta')}. \quad (2.6)$$

Таким образом, получаем следующие величины нормальной силы и полуосей контактного эллипса

$$F = \frac{\pi}{D} \lambda \sqrt{\lambda}, \quad a = \sqrt{\lambda \alpha'}, \quad b = \sqrt{\lambda \beta'}.$$

Для решения уравнения (2.5) воспользуемся формулой для производной от полного эллиптического интеграла первого рода по квадрату модуля [6]:

$$\frac{dK(c)}{dc} = \frac{E(c) - (1-c)K(c)}{2c(1-c)}. \quad (2.7)$$

Для вычисления полных эллиптических интегралов первого и второго рода применим гипергеометрическую функцию [7]

$$K(c) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; c\right), \quad E(c) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; c\right). \quad (2.8)$$

Гипергеометрический ряд Гаусса вычисляется по формуле

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n \quad (2.9)$$

с обобщенной факториальной функцией

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$$

для любого вещественного a .

Сингулярность правой части (2.7) по c при $c = 0$ устранима, что следует из гипергеометрического разложения (2.8)

$$K(c) = K_0 + cK_1(c), \quad E(c) = E_0 + cE_1(c),$$

с постоянными величинами $K_0 = E_0 = \pi/2$. Поэтому

$$\frac{dK(c)}{dc} = \frac{1}{2} \left(\frac{K_0 + E_1(c)}{1-c} - K_1(c) \right).$$

$$K_1(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!(1)_n} c^n, \quad E_1(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!(1)_n} c^n. \quad (2.10)$$

Замечание 3. В силу использования гипергеометрических разложений (2.8) наиболее точно вычислительный алгоритм работает в случае, близком к случаю круговой контактной площадки $\alpha = \beta$. В случае больших эксцентриситетов точность вычислений падает. Для обеспечения точности необходимо удерживать большое количество членов степенных разложений (2.8) и (2.10). В случае, близком к вырождению эллипса контакта в отрезок прямой $\beta' = 0$ ($A=0$), необходимо менять вычислительный алгоритм. С другой стороны, в достаточно широкой окрестности кругового случая имеется более надежный и быстрый алгоритм вычисления упругой силы [8], чем алгоритм “Герц-точка”. Алгоритм В. Г. Вильке не предусматривает вычисления полуосей контактной площадки и обеспечивает вычисление нормальной силы с точностью 0,5% по отношению к значению, получаемому по алгоритму Герца.

Напомним, что нормальное давление тел A и B друг на друга должно быть направлено во внешнюю от каждого из тел сторону. Площадка контакта должна быть перпендикулярна оси z локальной системы координат, а её геометрический центр определяется в соответствии с упругими свойствами материалов контактирующих тел по формуле

$$\mathbf{r}_{\text{contact}} = \varkappa_A \mathbf{r}_{P_B} + \varkappa_B \mathbf{r}_{P_A},$$

где коэффициенты α_A и α_B задают относительную линейную податливость материалов тел:

$$\alpha_A = \frac{\theta_A}{\theta_A + \theta_B}, \quad \alpha_B = 1 - \alpha_A = \frac{\theta_B}{\theta_A + \theta_B},$$

причем характеристики упругой податливости материалов тел рассчитываются по формулам [4]

$$\theta_A = \frac{1 - \nu_A^2}{E_A}, \quad \theta_B = \frac{1 - \nu_B^2}{E_B}.$$

Работа выполнена при поддержке грантов Научные школы НШ-6667.2006.1, РФФИ 05-01-00454, 05-08-65470, 05-01-00308, 06-01-90505.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Косенко И. И.* Реализация компьютерной модели динамики систем твердых тел с освобождающими связями // *Мат. моделир.* Т. 18. № 2. 2006. С. 95–106.
2. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // *J. reine und angew. Math.* В. 92. 1882. S. 156–171.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 тт. Т. VII. Теория упругости. — М.: Наука, 1987. 248 с.
5. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.

6. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 516 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе. М.: Наука, 1967. 300 с.
8. Вильке В. Г. О негерцевом контакте колеса и рельса // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2007. С. 137–157.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Буров А.А.</i> Об “ограниченной” постановке задачи о движении твердого тела в идеальной жидкости	3
<i>Шевальье Д.П.</i> Динамика с лагранжевой и эйлеровой точек зрения. Продолжение: нетранзитивные действия групп	19
<i>Буров А.А., Валле В., Степанов С.Я., Фортюне Д.</i> Об операторных методах в задаче о движении твердого тела	72
<i>Блинов А.П., Сумбатов А.С.</i> К задачам о теплопроводности и акустических колебаниях эллипсоида	86
<i>Рева Т.Ю.</i> Параметрический анализ динамики несимметричного трехколесного робота	91
<i>Хизгияев С.В.</i> Автоколебания двухмассовой механической системы с кусочно-постоянной моделью сухого трения	105
<i>Сергеев В.С.</i> Некоторые вопросы динамики и устойчивости движения колесных пар рельсовых транспортных средств	125
<i>Вильке В.Г.</i> О негерцевом контакте колеса и рельса .	137
<i>Косенко И.И., Александров Е.Б.</i> Компьютерная модель контактной задачи Герца	158

CONTENTS

<i>Burov A.A.</i> On the “restricted” formulation of the problem on motion of a rigid body in an ideal fluid	3
<i>Chevallier D.P.</i> Dynamics from Eulerian and Lagrangian points of view. Continuation: non-transitive actions of groups	19
<i>Burov A.A., Vallée C., Stepanov S.Ya., Fortuné D.</i> On operator methods in the problem on motion of a rigid body ..	72
<i>Blinov A.P., Sumbatov A.S.</i> To the problems of the heat conductivity and the acoustic oscillations of an ellipsoid	86
<i>Reva T.Yu.</i> Parametric analysis of an asymmetric three-wheeled robot	91
<i>Khizgiyaev S.V.</i> Auto-oscillations of a two-mass mechanical system with a piece-wise constant model of the dry friction.	105
<i>Sergeev V.S.</i> Some problems of dynamics and motion stability of rolling wheel pair for railway transport	125
<i>Vilke V.G.</i> On non-hertzian contact of wheel and rail ...	137
<i>Kosenko I.I., Aleksandrov E.B.</i> A computer model for the hertz contact problem	158

УДК 531.36

Об “ограниченной” постановке задачи о движении твердого тела в идеальной жидкости. Буров А. А.

On the “restricted” formulation of the problem on motion of a rigid body in an ideal fluid. Burov A.A. Problems of the investigation of stability and stabilization of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences. 2007. P. 3–18.

Рассматривается задача о движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости в “ограниченной постановке”: в инерционные параметры системы вводится малый параметр таким образом, что он присутствует в качестве множителя как в правых, так и в левых частях некоторых из уравнений движения. Исследуются динамика предельных уравнений движения и их первые интегралы. В некоторых случаях изучаются условия существования и устойчивость установившихся движений, рассматривается вопрос о частичном разделении движений и об условиях существования дополнительных первых интегралов.

The problem on motion of a rigid body in an ideal fluid is considered in the “restricted” formulation: a small parameter is introduced in the equations of motion in such a way, that this parameter is presented both in the RHS and LHS of some of equations of motion. The dynamics of the limiting equations of motion and their first integrals are written, the existence and stability of steady motions are studied within the supplementary assumptions. The partial separation of motions and the conditions of existence of supplementary first integrals are discussed.

Keywords: Kirchhof equation, motion of a rigid body in liquid, restricted problem, integrability.

УДК 531.01

Динамика с лагранжевой и эйлеровой точек зрения.
Продолжение: нетранзитивные действия групп.
Шеваллье Д. П.

Dynamics from Eulerian and Lagrangian points of view.
Continuation: non-transitive actions of groups. Chevallier
D.P. Problems of the investigation of stability and stabiliza-
tion of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre
of the Russian Academy of Sciences. 2007. P. 19–71.

В работе продолжено изучение динамики с лагранжевой
и эйлеровой точек зрения в случае нетранзитивного действия
групп. Выписаны уравнения движения в бескоординатной
форме.

In the paper the author continues investigation of Eulerian
and Lagrangian description of dynamics in the case of the in-
transitive group action.

Keywords: Dynamics, Eulerian description, Lagrangian des-
cription, principal fibre bundle, intransitive group action.

УДК 531.36

Об операторных методах в задаче о движении твердо-
го тела. Буров А. А., Валле В., Степанов С. Я., Фор-
тюне Д.

On operator methods in the problem on motion of a rigid
body. Burov A.A., Vallée C., Stepanov S.Ya., Fortuné D.
Problems of the investigation of stability and stabilization
of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of the
Russian Academy of Sciences. 2007. P. 72–85.

Работа посвящена применению операторных методов в задаче о движении твёрдого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах – компонентах ортогональной матрицы поворота и производных от них. С их помощью исследован вопрос об исключении неопределённых множителей, вводимых из-за зависимости координат. В случае осесимметричного силового поля построено уравнение Эйлера – Пуассона с исключёнными угловыми скоростями.

Выведенные уравнения с множителями Лагранжа удобны для численного исследования движения твёрдого тела и позволяют обнаружить интересные свойства его динамики.

The paper is devoted to the operator methods in the problem on motion of a rigid body about a fixed point in redundant coordinates - the components of the orthogonal matrix of rotations and their time derivative. With their use the problem on elimination of Lagrange multipliers, introduced because of the dependence of the coordinates. The Euler-Poisson equations is constructed eliminated of angular velocity, if the force field is axisymmetric.

The equations with Lagrange multipliers are convenient for numerical investigation of motion of the rigid body and allow to find out interesting properties of its dynamics.

Keywords: Rigid Body Dynamics, Cayley-Hamilton theorem, operator methods.

УДК 531.36

К задачам о теплопроводности и акустических колебаниях эллипсоида. Блинов А. П., Сумбатов А. С.

To the problems of the heat conductivity and the acoustic oscillations of an ellipsoid. Blinov A.P., Sumbatov A.S. Problems of the investigation of stability and stabilization of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences. 2007. P. 86–90.

Данные задачи приходится решать при моделировании процесса сушки зерна перед закладкой на хранение. В отличие от классического подхода, использующего функции Ламе, для однородного тела в форме эллипсоида удобно применить эллиптические координаты и метод сведения к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

The given tasks have to be solved for simulation of the process of drying grain which takes place before a bookmark of grain on storage. A separate grain is considered as a triaxial ellipsoid. Unlike the classical approach using the Lamé functions, we use the elliptic coordinates and the method of transforming the problem to the Fredholm equation of the second kind

Keywords: heat conductivity, grain drying, Lamé equations, Fredholm integral equation.

УДК 531.36

Параметрический анализ динамики несимметричного трехколесного робота. Рева Т. Ю.

Parametric analysis of an asymmetric three-wheeled robot. Reva T. Yu. Problems of the investigation of stability and stabilization of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences. 2007. P. 91–104.

Изучаются вопросы существования, устойчивости и ветвления стационарных движений трехколесного робота на горизонтальной плоскости с учетом несимметричного распределения масс и асимметрии трения, а также вопросы существования и устойчивости периодических движений (предельных циклов). Результаты представлены в виде атласа бифуркационных диаграмм.

The problems of existence, stability and bifurcation of steady motions of the three-wheeled robot on the horizontal plane are

considered within the hypothesis on asymmetry of mass distribution and friction. The problems of existence and stability of periodic motions (limit cycles) are also analyzed. The results are presented in the form of the atlas of bifurcation diagrams.

Keywords: robot, periodic motion, stability, friction.

УДК 531.36

Автоколебания двухмассовой механической системы с кусочно-постоянной моделью сухого трения. Хизгияев С. В.

Auto-oscillations of a two-mass mechanical system with a piece-wise constant model of the dry friction. Khizgiyaev S.V. Problems of the investigation of stability and stabilization of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences. 2005. P. 105–124.

В настоящей работе исследуются автоколебания системы, моделирующей движение струны в скрипичных музыкальных инструментах, связанные с наличием сухого трения между струной и смычком. Рассматривается кусочно-постоянная модель сухого трения. Построены аналитические решения для главных колебаний и условия их существования. Найдены предельные циклы, исследованы их формы и период колебаний.

The oscillations of the system, modeling the motions of a string in the musical instruments, related to the presence of the dry friction between the string and the bow, are investigated. The piece-wise constant model of the friction is considered. The analytical solutions for the natural oscillations are found. The limit cycles are found. The phase portrait, the mode and period of oscillations are studied.

Keywords: Musical instruments, violin, string, bow, dry friction.

УДК 531.36

Некоторые вопросы динамики и устойчивости движения колесных пар рельсовых транспортных средств. Сергеев В.С.

Some problems of dynamics and motion stability of rolling wheel pair for railway transport. Sergeev V.S. Problems of the investigation of stability and stabilization of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences. 2007. P. 125–136.

Исследуется динамика и устойчивость прямолинейного движения железнодорожной колесной пары, катящейся с постоянной скоростью по расположенным в горизонтальной плоскости рельсам, которые допускают малые отклонения в этой плоскости от прямолинейного направления пути (постоянно действующие возмущения). Колесная пара соединена с платформой вязкоупругими пружинами, свойства материала которых задаются интегральным оператором Вольтерра. Движение описывается интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра. Анализируется устойчивость при постоянно действующих возмущениях и предельно периодические движения колесной пары.

Dynamics and stability of rectilinear motion of a wheel pair are investigated with using integrodifferential equations of the Volterra type. A railway line has small disturbances in horizontal plan. The total stability and ultimately periodic motions of the wheel pair are examined.

Keywords: stability, railway wheel pair, integrodifferential equations of the Volterra type.

УДК 531.391

О негерцевом контакте колеса и рельса. Вильке В.Г.

On non-hertzian contact of wheel and rail. Vilke V.G. Problems of the investigation of stability and stabilization of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences. 2007. P. 137–157.

На основе классического решения контактной задачи упругих тел предложена инвариантная форма силовой функции, зависящая от геометрических характеристик пересечения двух недеформированных тел, а именно, от объема пересечения, площади проекции пересечения на общую касательную плоскость и периметра этой проекции. Полученное выражение силовой функции предлагается использовать в случаях, когда гипотезы классической теории контакта не выполняются. Предложенное инвариантное выражение силовой функции использовано для числового расчета нормальной силы в задаче о контакте колеса с рельсом. Результаты расчета нормальных сил, полученные на основе предложенной силовой функции, согласуются с результатами в ряде решенных задач о негерцевом контакте упругих тел.

Based on the contact problem classic solution an invariant form for the force function which depends on the geometric properties of an intersection for the undeformed rigid bodies volumes is proposed. The properties are the following ones: amount of the volumes indeed intersected, area of this volume projection onto the outer surfaces common tangent plane, and a perimeter of the area mentioned. The resulting expression for the force function supposed to be in use in cases of the classic contact theory hypotheses are broken. As an example the expression derived has been applied to compute numerically the normal force in the problem of the contact for a wheel and rail. In

addition, the results are in an agreement with ones produced in several resolved problems for non-Hertzian contact of elastic bodies.

Keywords: contact problem of elasticity, Hertz's problem.

УДК 531/534+681.3.06

Компьютерная модель контактной задачи Герца. Косенко И.И., Александров Е.Б.

A computer model for the Hertz contact problem. Kosenko I.I., Aleksandrov E.B. Problems of the investigation of stability and stabilization of motion. Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences. 2007. P. 158–174.

Рассматривается методика компьютерной реализации модели упругого контактирования твердых тел в рамках задачи Герца. Подробно анализируется алгоритм преобразования геометрических характеристик поверхностей тел в локальную систему координат контакта, что играет важную роль для применения объектно-ориентированного подхода при моделировании процесса контактирования. Вычисления проводятся в рамках формулировок так называемой задачи “Герц-точка”, когда поверхности тел приходят в соприкосновение в точности по одной точке. В заключение представлен один из вариантов вычисления нормальной упругой силы и полюсей контактной площадки, обеспечивающий последовательную редукцию задачи к одному скалярному трансцендентному уравнению, зависящему от полных эллиптических интегралов первого и второго рода.

A method of computer implementation of an elastic contact model for rigid bodies in frame of the Hertz contact problem is

considered. An algorithm to transform the outer surfaces geometric properties to the local contact coordinates system is analyzed in details. This plays an important role when applying the object-oriented approach to simulate the process of contacting. All computations are performed supposing the frames of so-called the Hertz-point problem are imposed. Finally an approach to compute the normal elastic force is represented. That one deals with the reduction to one transcendental scalar equation that includes the complete elliptic integrals of the first and second kinds.

Keywords: Hertz contact problem, elasticity theory.

Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения

Подписано в печать 18 .10.2007

Формат бумаги 60x84 1/16

Уч.-изд.л. 8,3. Усл.-печ. л. 12,25

Тираж 120 экз. Заказ 42

Отпечатано на ротапринтах в Вычислительном центре

им. А.А. Дородницына Российской академии наук

119333, Москва, ул. Вавилова, 40



**Вычислительный центр
им. А.А.Дородницына
Российской академии наук
119991, Москва, ул. Вавилова, 40**