

ISBN 978-5-91601-018-3

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
им. А.А. Дородницына РАН

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ
И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ



МОСКВА

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА РАН

**ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ
И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ**



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2009

О т в е т с т в е н н ы е р е д а к т о р ы

доктор физ.-матем. наук С. Я. Степанов,
канд. физ.-матем. наук А. А. Буров

В сборник включены статьи по динамике твердых и деформируемых колес, о свободном вращении трёхточечного двузвенника, орбитального лифта и массивной точки в поле гравитирующего вращающегося тела, о равновесии массивной нарстяжимой нити в линейном однородном поле сил притяжения и отталкивания. Также исследуется неинтегрируемость в задаче о движении тяжелого твердого тела и тяжёлого двойного маятника. Изучаются симметрии и геометрически обусловленные нелинейности в механике и теории поля.

Рецензенты: Ю.Н. Павловский,
В.А.Бойков

Научное издание

©Вычислительный центр им. А.А.Дородницына
Российской академии наук, 2009

УДК 531.36; 625.1; 517.96

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ

В.С. Сергеев

Исследуется модель движения железнодорожной колёсной пары при учете нелинейных членов сил крипа и вязко-упругих свойств материала с использованием интегрального оператора Вольтерра. Интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра, которыми описывается движение, анализируются в критическом случае пары чисто мнимых корней. Указывается определяемая по членам 3-го порядка постоянная Ляпунова, решающая задачу об устойчивости прямолинейного движения колесной пары.

Ключевые слова: устойчивость, железнодорожная колесная пара, интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра.

1. Постановка задачи. Модель контактного взаимодействия. Рассмотрим движение железнодорожной колесной пары на прямолинейном участке пути без касания рельса ребордой колеса. Колесную пару будем моделировать твердым телом, состоящим из двух идентичных, имеющих конусность однородных круговых дисков со средним радиусом r , которые соединены твердым однородным стержнем. Система катится без проскальзывания так, что проекция v вектора скорости центра масс на направление пути остается постоянной во все время движения.

Центр масс колесной пары может совершать малое поперечное движение вдоль оси Ox , начало которой расположено на срединной линии пути. Кроме того, ось колесной пары может поворачиваться в горизонтальной плоскости на малый угол y (Рис. 1).

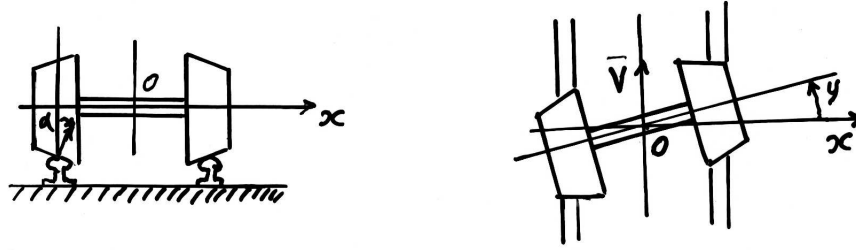


Рис 1.

Контактное взаимодействие колеса с рельсом будем описывать на основе модели Картера с учетом нелинейной зависимости силы взаимодействия от смещения [1]

$$F = \kappa \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\mu\varepsilon)^2 + 1}}, \quad (1)$$

где κ – коэффициент крипа, ε – относительное смещение (боковое ε_1 или угловое ε_2), μ – некоторый постоянный параметр. Для смещений ε_1 и ε_2 будем использовать стандартные линейные выражения [1]

$$\varepsilon_1 = 2 \left(\frac{\dot{x}}{v} + y \right), \quad \varepsilon_2 = 2 \left(l \frac{\dot{y}}{v} - \frac{\alpha}{r} x \right), \quad (2)$$

в которых $2l$ – расстояние между кругами катания колес, α – постоянная, характеризующая конусность колеса.

Скорректируем модель контактного взаимодействия введением вязкости в линейные члены сил крипа (1). Для этого применим интегральный оператор Вольтерра [2] к силам $\kappa\varepsilon_i$ ($i = 1, 2$) и заменим их на выражения

$$\kappa \left(\varepsilon_i + \int_0^t \kappa'(t-s) \varepsilon_i(s) ds \right), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

В результате модификации (1), (3) стандартные уравнения движения колесной пары [1] преобразуются к виду

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{2\kappa}{v} \left(\dot{x} + \int_0^t \kappa'(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \right) + P\delta x + 2\kappa \left(y + \int_0^t \kappa'(t-\tau) y(\tau) d\tau \right) &= F_1, \\ I\ddot{y} + \frac{2\kappa l^2}{v} \left(\dot{y} + \int_0^t \kappa'(t-\tau) \dot{y}(\tau) d\tau \right) - \frac{2\kappa\alpha l}{r} \left(x + \int_0^t \kappa'(t-\tau) x(\tau) d\tau \right) &= lF_2. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (4) m – масса колесной пары, I – ее момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, P – сила вертикальной нагрузки на колесную пару, δ – коэффициент, характеризующий угол наклона к горизонтальной плоскости площадки контакта колеса с рельсом, F_i ($i = 1, 2$) – нелинейные члены разложения в степенной ряд функции F (1) для малых ε_i ($i = 1, 2$).

В качестве модели вязко-упругого тела возьмем тело Кельвина [4], элементарная частица которого моделируется соединенными параллельно пружиной Гука и демпфером с жидкостью Ньютона, а также еще одной линейной пружиной Гука, присоединенной последовательно к первым двум элементам. Для тела Кельвина интегральное ядро $\kappa'(t)$ в выражении (3) имеет следующую структуру:

$$\kappa'(t) = -\kappa_0 \exp(-\beta t), \quad \kappa_0 = \text{const}, \quad \beta = \text{const}, \quad \beta > \kappa_0 > 0. \quad (5)$$

Исследуем устойчивость прямолинейного движения колесной пары (нулевого решения уравнения (4)).

2. Анализ характеристического уравнения. Характеристическое уравнение, отвечающее системе (4) с условием (5), приводится к полиному 6-й степени

$$\Phi(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^6 a_k \lambda^{6-k}, \quad (6)$$

где

$$a_0 = mI, \quad a_1 = \frac{2\kappa}{v}(I + ml^2) + 2mI\beta,$$

$$a_2 = \frac{4\kappa^2 l^2}{v^2} + \frac{2\kappa}{v}(2\beta - \kappa_0)(I + ml^2) + I(P\delta + m\beta^2),$$

$$a_3 = \frac{8\kappa^2 l^2}{v^2}(\beta - \kappa_0) + \frac{2\kappa}{v}[Pl^2\delta + \beta(\beta - \kappa_0)(I + ml^2)] + 2PI\beta\delta,$$

$$a_4 = \frac{4\kappa^2 l^2}{v^2}(\beta - \kappa_0)^2 + \frac{2\kappa}{v}Pl^2\delta(2\beta - \kappa_0) + PI\beta^2\delta + \frac{4\kappa^2 \alpha l}{r},$$

$$a_5 = \frac{2\kappa}{v}Pl^2\delta\beta(\beta - \kappa_0) + \frac{8\kappa^2 \alpha l}{r}(\beta - \kappa_0),$$

$$a_6 = \frac{4\kappa^2 \alpha l}{r}(\beta - \kappa_0)^2.$$

Для тела Кельвина коэффициенты a_k удовлетворяют условиям

$$a_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, 6.$$

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение (6) допускает 2 чисто мнимых корня $\pm i\omega$. Для этого должны выполняться условия

$$-a_0\omega^6 + a_2\omega^4 - a_4\omega^2 + a_6 = 0, \quad (7)$$

$$a_1\omega^5 - a_3\omega^3 + a_5\omega = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) определяет два значения $\omega^2 = \omega_1^2 > 0$, и $\omega^2 = \omega_2^2 > 0$, если справедливо неравенство

$$a_3^2 - 4a_1a_5 > 0, \quad (9)$$

которое при больших скоростях v выполняется всегда, если

$$P^2 \delta^2 \beta I - 16m(\beta - \kappa_0) \frac{\kappa^2 \alpha l}{r} > 0, \quad (10)$$

что может быть достигнуто при больших P . Если условие (10) не имеет места, то неравенство (9) выполняется при фиксированных величинах $l, \beta, \kappa, \kappa_0, P, I, m, \delta, \alpha, r$, когда $0 \leq v \leq v^*$ для некоторого v^* – наименьшего вещественного корня уравнения, отвечающего неравенству (9). Уравнение (7) также может быть удовлетворено, например, подбором P при больших v .

При выполнении условий существования пары чисто мнимых корней характеристическое уравнение принимает вид

$$(a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a'_2 \lambda^2 + a'_3 \lambda + a'_4)(\lambda^2 + \omega^2) = 0, \quad (11)$$

где коэффициенты a'_k ($k = 2, 3, 4$) и a_i ($i = 0, 1, \dots, 6$) связаны соотношениями

$$a'_k = a_k - a_{r-2} \omega^2, \quad a_{s+2} = a'_s \omega^2, \quad s = 3, 4. \quad (12)$$

Условия Рауса-Гурвица отрицательности вещественных частей нулей полинома 4-й степени в уравнении (11), (12) дают неравенства

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_0 a_3 &> 0 \\ a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 + a_0 a_1 a_5 &> 0, \\ a_4 + (a_0 \omega^2 - a_2) \omega^2 &> 0, \end{aligned} \quad (13)$$

которые в дальнейшем будем считать выполненными. Таким образом, исследование устойчивости прямолинейного движения приводится к анализу критического случая пары чисто мнимых

корней. Поскольку интегральное ядро (5) имеет экспоненциальную структуру, уравнения (4) заменой

$$z_p = \int_0^t \kappa_0 \exp[-\beta(t - \tau)] x_p(\tau) d\tau, \quad p = 1, 2,$$

$$z_{p+2} = \int_0^t \kappa_0 \exp[-\beta(t - \tau)] y_p(\tau) d\tau,$$
(14)

в которой положено

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad y_1 = y, \quad y_2 = \dot{y},$$

приводятся к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad p = 1, 2,$$

$$\dot{x}_2 = \left[-\frac{2\kappa}{v}(x_2 - z_2) - P\delta x_1 - 2\kappa(y_1 - z_3) + F_1 \right] / m,$$

$$\dot{y}_2 = \left[-\frac{2l^2\kappa}{v}(y_2 - z_4) + \frac{2\alpha l}{r}\kappa(x_1 - z_1) + lF_2 \right] / I,$$

$$\dot{z}_p = \kappa_0 x_p - \beta z_p, \quad \dot{z}_{p+2} = \kappa_0 y_p - \beta z_{p+2}.$$
(15)

Задача устойчивости для уравнений (4) с начальным условием в момент времени $t = 0$ ввиду соотношений (14) переходит в задачу условной устойчивости для уравнений (15) при ограничениях $z_k(0) = 0$ ($k = 1, \dots, 4$) на начальные значения переменных.

3. Исследование устойчивости в критическом случае.

Характеристическое уравнение для системы (15) имеет вид

$$(\lambda + \beta)^2 \Phi(\lambda) = 0, \tag{16}$$

где $\Phi(\lambda)$ – полином в уравнении (6), и двум корням $\lambda = -\beta$ уравнения (16) отвечают простые элементарные делители. Обозначим корни уравнения (16) через

$$\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 = -\beta, \lambda_8 = -\beta.$$

Дадим общее выражение для постоянной Ляпунова g_3 , решающей задачу устойчивости по членам 3-го порядка функций F_1 и F_2 . С этой целью приведем матрицу A правой части линейризованных уравнений (15) заменой

$$\begin{aligned} u &= Bw, & u &= \text{col}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \dots, z_4), \\ B &= \|b_{ij}\|, & w &= \text{col}(w_1, \dots, w_8) \end{aligned} \quad (17)$$

к жордановой форме

$$\frac{dw}{dt} = \Lambda w, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_8),$$

для чего следует построить решение матричного уравнения

$$AB = B\Lambda,$$

которое распадается на подсистемы

$$\begin{aligned} -b_{1k}\lambda_k + b_{2k} &= 0, & k &= 1, 2, \dots, 8, \\ -\frac{P\delta}{m}b_{1k} - \left(\frac{2\kappa}{vm} + \lambda_k\right)b_{2k} - \frac{2\kappa}{m}b_{3k} + \frac{2\kappa}{vm}b_{6k} + \frac{2\kappa}{m}b_{7k} &= 0, \\ -b_{3k}\lambda_k + b_{4k} &= 0, \\ \frac{2\alpha\kappa l}{rI}b_{1k} - \left(\frac{2\kappa l^2}{vI} + \lambda_k\right)b_{4k} - \frac{2\kappa\alpha l}{rI}b_{5k} + \frac{2\kappa l^2}{vI}b_{8k} &= 0, \\ (\lambda_k + \beta)b_{4+i,k} + \kappa_0 b_{i,k} &= 0, & i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (18)$$

Будем в дальнейшем предполагать, что корни λ_k – простые. Тогда, если обозначить через Δ_{1j}^k алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы линейной системы (18) относительно b_{jk} , то для λ_k ($k=1,2,\dots,6$) будем иметь

$$b_{jk} = \Delta_{1j}^k, \quad j = 1, 2, \dots, 8.$$

Для определения постоянных b_{jk} ($k = 7, 8$), отвечающих корням $\lambda_7 = -\beta$ и $\lambda_8 = -\beta$, исключим из системы (18) первое и третье уравнения и будем считать постоянные b_{7k}, b_{8k} ($k = 7, 8$) произвольными. Детерминант

$$\tilde{\Delta} = \frac{4l\alpha\kappa^2}{vrmI} \kappa_0^4$$

системы для определения величин b_{j7}, b_{j8} ($j = 1, \dots, 6$) отличен от нуля. Поэтому при вычислении постоянных b_{j7} ($j = 1, \dots, 8$) положим $b_{77} = \tilde{\Delta}$ и $b_{78} = 0$, а вычисляя b_{j8} , будем считать, что $b_{88} = \tilde{\Delta}$ и $b_{87} = 0$. Таким образом, преобразование (17) будет определено, и система уравнений (15) примет вид

$$\frac{dw}{dt} = \Lambda w + B^{-1}F', \quad B^{-1} = \|\tilde{b}_{ij}\|, \quad (19)$$

$$F' = \text{col}(0, F_1/m, 0, lF_2/I, 0, 0, 0, 0).$$

Первые два скалярных уравнения, отвечающих уравнению (19), являются комплексно сопряженными и составляют критическую подсистему. Преобразуем их с помощью замены

$$w_1 = e^{-i\omega t} w_1, \quad w_2 = e^{-i\omega t} w_2. \quad (20)$$

Тогда, учитывая (1),(2),(19),(20) и выписывая в явном виде лишь члены до 3-го порядка включительно, представим крити-

ческую подсистему в такой форме:

$$\frac{dv_1}{dt} = -4\kappa\mu^2 e^{-i\omega t} \left(\frac{\tilde{b}_{12}}{m} D_1^3 + \frac{\tilde{b}_{14}l}{I} D_2^3 \right), \quad (21)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -4\kappa\mu^2 e^{i\omega t} \left(\frac{\tilde{b}_{22}}{m} D_1^3 + \frac{\tilde{b}_{24}l}{I} D_2^3 \right),$$

$$D_1 = \left(\frac{b_{21}}{v} + b_{31} \right) v_1 e^{i\omega t} + \left(\frac{b_{22}}{v} + b_{32} \right) v_2 e^{-i\omega t}, \quad (22)$$

$$D_2 = \left(\frac{lb_{41}}{v} - \frac{\alpha}{r} b_{11} \right) v_1 e^{i\omega t} + \left(\frac{lb_{42}}{v} - \frac{\alpha}{r} b_{12} \right) v_2 e^{-i\omega t}.$$

На основании системы (21) составим следующее уравнение ($v_1 v_2 = r^2$ – вещественное число):

$$\begin{aligned} \frac{dv_1 v_2}{dt} &= v_2 e^{-i\omega t} \left(A_{30} v_1^3 e^{3i\omega t} + A_{21} v_1^2 v_2 e^{i\omega t} + \right. \\ &+ A_{12} v_1 v_2^2 e^{-i\omega t} + A_{03} v_2^3 e^{-3i\omega t} \left. \right) + \\ &+ v_1 e^{i\omega t} \left(A'_{30} v_1^3 e^{3i\omega t} + A'_{21} v_1^2 v_2 e^{i\omega t} + \right. \\ &+ A'_{12} v_1 v_2^2 e^{-i\omega t} + A'_{03} v_2^3 e^{-3i\omega t} \left. \right) + \dots, \end{aligned} \quad (23)$$

в котором постоянные A_{ij} , A'_{ij} определяются правыми частями уравнений (21) и формулами (22), причем A_{ij} , и A'_{ij} – комплексно сопряженные величины. Правая часть уравнения (23) представляет собой сходящийся степенной ряд относительно переменных $v_1 e^{i\omega t}$ и $v_2 e^{-i\omega t}$.

Упростим уравнение (23), исключив из него ряд членов. С

этой целью проведем преобразование

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 + \sum_{k,n=0(k+n=4)}^4 C'_{kn}(t) v_1^k v_2^n, \\ v_2' &= v_2 + \sum_{k,n=0(k+n=4)}^4 D'_{kn}(t) v_1^k v_2^n \end{aligned} \quad (24)$$

в котором $C'_{kn}(t)$, $D'_{kn}(t)$ – периодические (комплексно сопряженные) функции, подлежащие определению. Уравнение (23) будет иметь такую структуру:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1' v_2'}{dt} &= \frac{dv_1 v_2}{dt} + v_2 \sum_{k,n=0(k+n=4)}^4 \frac{dC'_{kn}(t)}{dt} v_1^k v_2^n + \\ &+ v_1 \sum_{k,n=0(k+n=4)}^4 \frac{dD'_{kn}(t)}{dt} v_1^k v_2^n, \end{aligned}$$

где многоточие означает члены более 4-го порядка.

Для определения функций $C'_{kn}(t)$, $D'_{kn}(t)$ получаются дифференциальные уравнения, интегрирование которых дает периодические функции для всех коэффициентов, за исключением коэффициента при члене $v_1^2 v_2^2$, для которого имеем уравнение

$$\frac{dC'_{21}(t)}{dt} + \frac{dD'_{12}(t)}{dt} = A_{21} + A'_{12}.$$

Следовательно, выбирая в преобразовании (24) периодические функции $C'_{kn}(t)$, $D'_{kn}(t)$ согласно указанной процедуре, можно исключить из уравнения для $d(r^2)/dt$ все члены 4-й степени, кроме члена $(A_{21} + A'_{12})v_1^2 v_2^2$.

Коэффициент $A_{21} + A'_{12}$, по построению вещественное число,

будет постоянной Ляпунова g_3 ,

$$g_3 = -24\kappa\mu^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\tilde{b}_{12}}{m} \left(\frac{b_{21}}{v} + b_{31} \right)^2 \left(\frac{b_{22}}{v} + b_{32} \right) + \frac{\tilde{b}_{14}l}{I} \left(\frac{lb_{42}}{v} - \frac{\alpha b_{12}}{r} \right)^2 \left(\frac{lb_{41}}{v} - \frac{\alpha b_{11}}{r} \right) \right]. \quad (25)$$

При выполнении условий (7), (9), (13) и неравенства $g_3 < 0$ прямолинейное движение колесной пары будет асимптотически устойчивым, а при $g_3 > 0$ – неустойчивым.

Возможный анализ общей формулы (25) требует дополнительного рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 08-08-00553, 08-01-00600).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520. с.
2. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1976. 286 с.
3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1979. 431 с.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1956. С. 7-263.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ ТОЧКИ В
ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ПРЕЦЕССИРУЮЩЕГО
ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

М. А. Муницына

Рассматривается задача о движении массивной точки в поле притяжения прецессирующего осесимметричного твердого тела. Изучаются её равновесия в равномерно вращающейся вместе с осью тела системе координат, их ветвление и устойчивость.

Ключевые слова: Обобщенная ограниченная задача двух тел, точки либрации, относительные равновесия, устойчивость, бифуркации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение материальной точки P в гравитационном поле прецессирующего динамически симметричного твердого тела. Будем считать, что воздействие точки на движение тела пренебрежимо мало, а расстояние от нее до центра масс притягивающего тела велико по сравнению с размерами этого тела.

Как известно (см., например, [1]), в случае Эйлера на прецессионных движениях ось тела вращается вокруг вектора своего кинетического момента, постоянного в абсолютном пространстве, с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi}$. При этом скорость прецессии, угол нутации θ , экваториальный момент инерции A и постоянные линейных первых интегралов p_ψ и p_φ связаны соотношением

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{A \sin^2 \theta}. \quad (1.1)$$

В силу (1.1) по заданному углу нутации θ можно подобрать эти постоянные первых интегралов так, что угловая скорость

прецессии будет принимать любое наперёд заданное, в том числе - нулевое, значение. В дальнейшем случай нулевой скорости прецессии рассматриваться не будет, как тривиальный.

Введем вращающую систему координат $Oxyz$, начало которой — точка O совпадает с центром масс тела, ось Oz направлена вдоль вектора кинетического момента тела, ось Oy лежит в плоскости, образованной осью Oz и осью динамической симметрии тела, ось Ox дополняет их до правой тройки.

Единицы длины, времени и массы выберем так, что бы угловая скорость прецессии тела, его масса и гравитационная постоянная равнялись единице.

Вводя параметр, выражающий отношение размеров тела и его расстояния до точки P , представим её потенциальную энергию точки V с точностью до членов второго порядка малости в виде

$$\frac{V}{m_0} = -\frac{1}{R} - \frac{J}{3R^3} - \frac{J(y \sin \theta + z \cos \theta)^2}{R^5}, \quad J = \frac{3(C - A)}{2},$$

Так как система координат $Oxyz$ вращается со скоростью прецессии $\dot{\psi} = 1$, то кинетическая энергия T точки P имеет вид

$$\frac{T}{m_0} = \frac{1}{2}((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2),$$

где m_0 — масса рассматриваемой точки, (x, y, z) — её координаты, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от неё до центра масс притягивающего тела, C — осевой моменты инерции притягивающего тела соответственно.

Для определения равновесий точки относительно системы координат $Oxyz$ рассмотрим функцию

$$W = V - (x^2 + y^2)/2$$

и выпишем условия ее стационарности

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} &= \left(-1 + \frac{1}{R^3} + \frac{J}{R^5} - \frac{5J(y \sin \theta + z \cos \theta)^2}{R^7} \right) x = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= -y + \frac{y}{R^3} + \frac{J(y(1+2 \sin^2 \theta) + z \sin 2\theta)}{R^5} - \frac{5Jz(y \sin \theta + z \cos \theta)^2}{R^7} = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{z}{R^3} + \frac{J(z(1+2 \cos^2 \theta) + y \sin 2\theta)}{R^5} - \frac{5Jz(y \sin \theta + z \cos \theta)^2}{R^7} = 0.\end{aligned}$$

Полученные уравнения допускают тривиальные решения I вида

$$x_0 = \pm R, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad (1.2)$$

где значение R удовлетворяет уравнению

$$R^5 - R^2 = J, \quad (1.3)$$

и семейство нетривиальных решений II вида

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \pm(1 + J/3 - J \sin^2 \theta), \quad z_0 = \mp J \sin 2\theta \quad (1.4)$$

где значения y_0 и z_0 определены с точностью до членов второго порядка малости.

Решениям (1.2) соответствуют такие относительные равновесия, при которых точка расположена на оси Ox — прямой, перпендикулярной вектору кинетического момента и оси динамической симметрии притягивающего тела. Решениям (1.4) соответствуют такие относительные равновесия, при которых точка расположена в плоскости, образованной вектором кинетического момента и осью динамической симметрии притягивающего тела. Следуя [2,3] будем называть решения (1.2) треугольными, а решения (1.4) — коллинеарными.

2. Треугольные относительные равновесия. Для исследования достаточных условий устойчивости и неустойчивости относительных равновесий (1.2) рассмотрим на них вторую

вариацию приведенного потенциала

$$2\delta^2 W \Big|_I = \mathbf{q}^T \Omega \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = (x, y, z)^T,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \sin^2 \theta & \gamma \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \gamma \sin \theta \cos \theta & 1 + \gamma \cos^2 \theta \end{pmatrix},$$

$$\omega_0 = \frac{2}{R^3} - 5, \quad \gamma = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{J}{R^2}.$$

Она будет положительно определена при следующих условиях:

$$1) \omega_0 > 0, \quad 2) \gamma \sin^2 \theta > 0.$$

Первое из них выполнено при $R < R_* = \sqrt[3]{2/5}$, второе — при $J > 0, \theta \neq 0$. В силу соотношения (1.3) одновременно эти условия не выполнены никогда и относительные равновесия I неустойчивы в вековом смысле. Кривая (1.2) представлена на рис. 1. Цифрами указана степень неустойчивости (при $\theta \neq 0$).

Неравенствам $J > 0$ и $J < 0$ соответствуют случаи сжатого или вытянутого вдоль оси динамической симметрии притягивающего тела. От точки смены устойчивости M_0 решения (1.2) ответвляется многообразие решений, при которых точка расположена на расстоянии $R = 1$ до центра притягивающего тела, являющегося динамическим шаром.

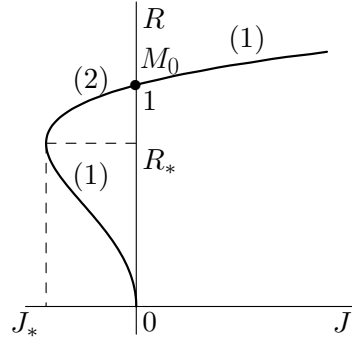


Рис. 1

Поскольку линейные размеры притягивающего тела малы по сравнению с расстоянием от его центра масс до точки, справедливы равенства $A/R^2 \ll 1$ и $C/R^2 \ll 1$. В окрестности точки M_0 на рис. 1 эти неравенства эквивалентны неравенству $|J| \ll 1$.

Для исследования необходимых условий устойчивости относительных равновесий I рассмотрим линеаризованные уравнения возмущенного движения точки в окрестности точки M_0 . Они имеют вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + G\dot{\mathbf{q}} + \Omega\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)^T \quad (2.1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы (2.1) имеет вид

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^4 + \lambda^2 - 6J \sin^2 \theta) + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (2.2)$$

При $J < 0$ уравнение (2.2) не имеет корней с положительной вещественной частью. Следовательно, треугольные относительные равновесия устойчивы в линейном приближении в случае вытянутого вдоль оси симметрии притягивающего тела.

3. Коллинеарные относительные равновесия. Линеаризованные уравнения возмущенного движения точки в окрестности решений (1.4) имеют вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + G\dot{\mathbf{q}} + \Omega'\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)^T \quad (3.1)$$

$$\Omega' = \begin{pmatrix} -2J \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & -3 + J(6 \sin^2 \theta - 2) & -J \sin 2\theta \\ 0 & -J \sin 2\theta & 1 + 2J \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы (3.1) имеет вид (2.2). Следовательно коллинеарные относительные равновесия гироскопически устойчивы в линейном приближении в случае сжатого вдоль оси динамической симметрии притягивающего тела. В случае вытянутого вдоль оси динамической симметрии притягивающего тела коллинеарные относительные равновесия неустойчивы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№07-01-00290).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березкин Е.Н.* Курс теоретической механики (2-е изд.). М.: Изд. МГУ, 1974. 648 С.
2. *Белецкий В.В.* Модельная задача динамики двойного астероида // Труды IX Международной Четаевской конференции “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. Иркутск. 2007. Т. 1. С. 33 – 48.
3. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Устойчивость стационарных движений в модельной задаче динамики системы двойного астероида // Труды IX Международной Четаевской конференции “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. Иркутск. 2007. Т. 5. С. 8 – 19.

УДК 629.195.1

О ПЛОСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ
ОРБИТАЛЬНОГО ЛИФТА

А.А. Буров, И.И. Косенко

Рассматривается движение в центральном поле ньютоновского притяжения гантелеобразного тела — пары массивных точек, соединенных между собой невесомым стержнем, вдоль которого по заданному закону движется лифт — третья массивная точка. Такую механическую систему можно рассматривать, в частности, как упрощенную модель орбитальной тросовой системы, оснащённой лифтом. Изучается наиболее интересный с практической точки зрения случай, когда кабина совершает периодические, «челночные» движения между двумя концами гантели. Для большей аналитической простоты, что, с другой стороны, не слишком ограничивает общность анализа, рассматривается случай движений всей орбитальной системы в плоскости орбиты её центра масс.

В предположении о малости массы лифта по сравнению с массой гантели при помощи теории Пуанкаре определяются условия существования семейств периодических движений системы, аналитически зависящих от возникающего малого параметра и переходящих в то или иное устойчивое радиальное установившееся движение невозмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Доказывается, что каждое из радиальных относительных равновесий порождает при достаточно малых значениях параметра в точности одно семейство

таких периодических движений. В линейном приближении изучается устойчивость получившихся периодических решений, а сами эти решения вычисляются с точностью до членов первого порядка малости по малому параметру.

Современные изучения движения орбитальных гантелеобразных систем восходят, вероятно, к работам Ю. М. Окунева [1, 2]. Эти исследования были продолжены в работе [3], где рассматривались плоские движения орбитальной связки, представленной в виде гантелеобразного спутника, на круговой орбите в спутниковом приближении. В статье [4] в случае равных масс и в неограниченной постановке для динамической редукции задачи и для анализа устойчивости положений относительного равновесия применялся метод энергии-момента. Аналогичная техника применялась в работе [5], где в отличие от упомянутых массивные точки были соединены при помощи упругой пружины, сопротивляющейся сжатию, образуя гантель с упругими свойствами. В таких предположениях в этой работе исследовалась устойчивость радиальных конфигураций, бифуркации и устойчивость стационарных конфигураций деформируемой упругой гантели изучены также в [6]. Различные препятствия для создания орбитальных тросовых систем, в частности, сильная деформируемость известных материалов, обсуждались в работе [7].

В работе [8] в точной постановке рассмотрена задача об орбитальном движении пары массивных точек, связанных между собой нерастяжимым, невесомым тросом. Иными словами, считалось, что на массивные точки наложена односторонняя неударживающая связь. По-

лученные там условия устойчивости вертикальных положений относительного равновесия тросовой системы пригодны для любых отношений масс субспутника и станции. Эти результаты согласуются, в свою очередь, с полученными еще раньше результатами исследования устойчивости этих положений для случая равных масс концевых тел системы [3, 4].

Среди основополагающих работ по динамике трёхмассовых орбитальных тросовых систем укажем публикацию [9]. Стационарные движения, их бифуркации и устойчивости в зависимости от положения кабины лифта изучались в [10].

Ключевые слова: орбитальный лифт, периодические решения, теорема Пуанкаре.

1. Основные обозначения и выражения для кинетической и потенциальной энергии. Рассматривается полет трех материальных точек M_0 (станция), M_1 (субспутник) и M_2 (кабина) в поле сил гравитации неподвижного центра P (планета). Обозначим массы точек m_0 , m_1 и m_2 соответственно. Точки M_0 и M_1 соединены невесомым стержнем, а точка M_2 остаётся все время на этом стержне, совершая вдоль него движение по заданному закону, например, периодическое движение между станцией и субспутником. В такой упрощённой постановке естественно рассматривать задачу о движении трёхмассовой орбитальной тросовой системы в том случае, когда масса кабины достаточно мала, а натяжение троса велико. Это имеет место, например, в случае, когда система станция–субспутник находится в состоянии, близком к устойчивым радиальным конфигурациям [3, 8]. На таких конфигура-

циях трос натянут, и его приближенно можно считать стержнем. Всю систему при этом можно рассматривать как протяжённый орбитальный объект, оснащённый космическим лифтом.

Опишем движение системы с помощью уравнений Лагранжа [11]. Пусть $Pxyz$ — фиксированная в абсолютном пространстве инерциальная система отсчёта, оси которой ориентированы «по неподвижным звездам». При этом движение всех трех точек будем ограничивать для простоты плоскостью Pxy , получая, таким образом, плоскую задачу, допускаемую исходными пространственными уравнениями движения, и уменьшая общее число степеней свободы на две единицы. Положение центра масс системы — точки C — относительно этой системы координат задаётся вектором $\overrightarrow{PC} : \mathbf{r}_c = (x_c, y_c)^T$. Для описания относительного движения системы в целом полезно использовать систему координат M_0xy с началом «на станции».

Обозначим имеющий постоянную длину r вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ как $\mathbf{r} = (x, y)^T$, а векторы $\overrightarrow{CM_i}$ — как $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)^T$, $i = 0, 1, 2$ соответственно. Тогда текущее положение кабины определяется вектором $\overrightarrow{M_0M_2} : \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = s(t)\mathbf{r}$, причём кабина остаётся «внутри» гантели при $0 \leq s(t) \leq 1$ и за точками M_0 и M_1 при $s(t) < 0$ и при $s(t) > 1$ соответственно. Величина $s(t)$, определяющая координаты кабины на тресе, считается заданной функцией времени. Векторы, определяющие относительное положение входящих в систему точек, связаны соотношениями (ср. [10]):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= -\frac{m_1 + m_2 s}{m} \mathbf{r}, & \mathbf{r}_1 &= \frac{m_0 + m_2(1 - s)}{m} \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{m_0 s + m_1(s - 1)}{m} \mathbf{r}, \end{aligned}$$

где $m = m_0 + m_1 + m_2$ — масса всей системы. Поэтому скорости относительного движения могут быть выражены при помощи формул

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0 &= -\frac{m_1 + m_2 s}{m} \mathbf{v} - \frac{m_2 \dot{s}}{m} \mathbf{r}, \\ \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{v}_1 &= \frac{m_0 + m_2(1-s)}{m} \mathbf{v} - \frac{m_2 \dot{s}}{m} \mathbf{r}, \\ \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_2 &= \frac{m_0 s + m_1(s-1)}{m} \mathbf{v} + \frac{m_0 \dot{s} + m_1 \dot{s}}{m} \mathbf{r},\end{aligned}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

Используя теорему Кёнига, постоянство длины вектора \mathbf{r} и перпендикулярность векторов \mathbf{v} и \mathbf{r} , кинетическую энергию можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} (mV^2 + m_t v^2) + \dots,$$

Здесь и далее

$$m_t = m^{-1} [m_0 (m_1 + m_2 s)^2 + m_1 (m_0 + m_2(1-s))^2 + m_2 (m_0 s + m_1(s-1))^2]$$

— приведённая масса системы, $V = (\dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}}_c)^{1/2}$ — величина абсолютной скорости центра масс ОТС, $v = |\mathbf{v}|$. Многоточие выражает члены, зависящие только от времени и не влияющие на динамику системы.

Силовая функция имеет выражение

$$U = GM \sum_{i=0}^2 \frac{m_i}{\sqrt{R^2 + r_i^2 + 2Rr_i \cos \gamma}},$$

где γ — угол между векторами \overrightarrow{PC} и $\overrightarrow{M_0 M_1}$, $R = |\overrightarrow{PC}|$ — расстояние от притягивающего центра до центра масс

системы, G — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего центра. Проекции r_i , $i = 0, 1, 2$ векторов \mathbf{r}_i на прямую M_0M_1 имеют вид

$$\begin{aligned} r_0 &= -\frac{m_1 + m_2 s}{m} r, & r_1 &= \frac{m_0 + m_2(1 - s)}{m} r, \\ r_2 &= \frac{m_0 s + m_1(s - 1)}{m} r, \end{aligned}$$

причем величина $r = |\mathbf{r}|$ является длиной троса.

Выберем единицы измерения времени и массы так, чтобы выполнялись равенства $GM = 1$, $m = 1$. Единица длины будет выбрана позднее.

2. Основное предположение. Изучим движение космического лифта с помощью теории возмущений. Предположим, что масса кабины много меньше массы системы в целом: $\varepsilon = m_2 \ll 1$. Обозначим $\alpha = m_1$, $\beta = 1 - \alpha$ (ср. [8]), при этом $m_0 = \beta - \varepsilon$.

Разложение кинетической энергии по малому параметру имеет вид

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots, \quad T_0 = \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta v^2, \quad T_1 = \frac{1}{2}s(s - 2\alpha)v^2,$$

причем кинетическая энергия претерпевает возмущение только в том слагаемом, которое отвечает за относительное движение

$$T = \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{2}a(\varepsilon)v^2, \quad a(\varepsilon) = \alpha\beta + \varepsilon[s(s - 2\alpha)] + \dots$$

Разложение силовой функции по степеням малого параметра имеет вид

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots,$$

$$\begin{aligned}
U_0 &= \frac{\beta}{\sqrt{R^2 + \alpha^2 r^2 - 2R\alpha r \cos \gamma}} + \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 + \beta^2 r^2 + 2R\beta r \cos \gamma}}, \\
U_1 &= -\frac{1}{\sqrt{R^2 + \alpha^2 r^2 - 2R\alpha r \cos \gamma}} - \\
&\quad - \frac{s\beta r(\alpha r - R \cos \gamma)}{(R^2 + \alpha^2 r^2 - 2R\alpha r \cos \gamma)^{3/2}} + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (s - \alpha)^2 r^2 + 2R(s - \alpha)r \cos \gamma}} + \\
&\quad + \frac{s\alpha r(\beta r + R \cos \gamma)}{(R^2 + \beta^2 r^2 + 2R\beta r \cos \gamma)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, разложение функции Лагранжа по степеням малого параметра записывается как

$$L = L_0 + \varepsilon L_1 + \dots, \quad L_0 = T_0 + U_0, \quad L_1 = T_1 + U_1.$$

В силу инвариантности системы относительно поворотов вокруг начала координат в абсолютном пространстве её кинетический момент сохраняется во всё время движения. Иными словами кинетический момент — первый интеграл уравнений движения.

Воспользуемся этим обстоятельством и осуществим понижение порядка по Раусу. Введём полярные координаты (R, Λ) , задающие положение точки C относительно системы координат Pxy , и полярные координаты (r, λ) , задающие положение точки M_1 относительно системы координат M_0xy . Тогда Λ — долгота центра масс C ; λ — долгота субспутника. Справедливы формулы перехода

$$\begin{aligned}
X &= R \cos \Lambda, & x &= r \cos \lambda, \\
Y &= R \sin \Lambda, & y &= r \sin \lambda, \\
\overrightarrow{PC} &= (X, Y)^T, & \overrightarrow{M_0M_1} &= (x, y)^T,
\end{aligned}$$

из которых получается выражение

$$\cos \gamma = \frac{(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{M_0M_1})}{Rr} = \cos(\lambda - \Lambda).$$

В отличие от [8] в данном случае величина r (длина гантели) считается постоянной. В этих координатах формулы для квадратов скоростей орбитального и относительного движений имеют вид

$$V^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\Lambda}^2, \quad v^2 = r^2\dot{\lambda}^2. \quad (2.1)$$

Переходя от долгот Λ, λ к новым конфигурационным переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \lambda - \Lambda, \quad \eta = \lambda/2 + \Lambda/2,$$

замечаем, что функция Лагранжа не зависит от циклической переменной η .

Выражая зависимость между обобщёнными скоростями в виде

$$\dot{\Lambda} = \dot{\eta} - \frac{1}{2}\dot{\xi}, \quad \dot{\lambda} = \dot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\xi}, \quad (2.2)$$

представим циклический интеграл как

$$R^2 \left(\dot{\eta} - \frac{1}{2}\dot{\xi} \right) + a(\varepsilon)r^2 \left(\dot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\xi} \right) = c.$$

Исключая из интеграла обобщённую скорость $\dot{\eta}$, имеем

$$\dot{\eta} = \frac{c}{R^2 + a(\varepsilon)r^2} + \frac{1}{2} \frac{R^2 - a(\varepsilon)r^2}{R^2 + a(\varepsilon)r^2} \dot{\xi}.$$

Подставляя это выражение в (2.2), получим

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda} &= \frac{c}{R^2 + a(\varepsilon)r^2} - \frac{a(\varepsilon)r^2}{R^2 + a(\varepsilon)r^2}\dot{\xi}, \\ \dot{\lambda} &= \frac{c}{R^2 + a(\varepsilon)r^2} + \frac{R^2}{R^2 + a(\varepsilon)r^2}\dot{\xi}.\end{aligned}$$

Тогда составляющие приведённой кинетической энергии второй, первой и нулевой степени по скоростям принимают вид:

$$\begin{aligned}\Theta_2 &= \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{R^2 + a(\varepsilon)r^2}\dot{\xi}^2, \\ \Theta_1 &= -\frac{c}{2}\frac{R^2 - a(\varepsilon)r^2}{R^2 + a(\varepsilon)r^2}\dot{\xi}, \\ \Theta_0 &= -\frac{1}{2}\frac{c^2}{R^2 + a(\varepsilon)r^2},\end{aligned}$$

При этом функция Рауса $\Gamma = L - c\eta = \Theta - \Pi$ образована приведенным потенциалом $\Pi = -(\Theta_0 + U)$ и функцией $\Theta = \Theta_2 + \Theta_1$, играющей роль приведённой кинетической энергии.

Введем для обобщенных координат единообразные обозначения

$$q_1 = R, \quad q_2 = \xi, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2)^T.$$

В этих координатах составляющие кинетической энергии запишем как

$$\Theta_2 = \frac{1}{2}(A(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \Theta_1 = (\mathbf{b}(t, \mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}}),$$

$$\begin{aligned}A(t, \mathbf{q}) &= A_0(\mathbf{q}) + \varepsilon A_1(t, \mathbf{q}) + \dots, \\ \mathbf{b}(t, \mathbf{q}) &= \mathbf{b}_0(\mathbf{q}) + \varepsilon \mathbf{b}_1(t, \mathbf{q}) + \dots,\end{aligned}$$

$$A_0(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} a_{0,11} & 0 \\ 0 & a_{0,22} \end{pmatrix}, \quad A_1(t, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{1,22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{0,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1(t, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{1,2} \end{pmatrix},$$

Ненулевые элементы введённых таким образом матриц и векторов имеют вид

$$a_{0,11} = 1, \quad a_{0,22} = \frac{q_1^2}{q_1^2 + \alpha\beta r^2}, \quad a_{1,22} = -\frac{s(s-2\alpha)r^2 q_1^2}{(q_1^2 + \alpha\beta r^2)^2},$$

$$b_{0,2} = -\frac{c q_1^2 - \alpha\beta r^2}{2 q_1^2 + \alpha\beta r^2}, \quad b_{1,2} = c \frac{s(s-2\alpha)r^2 q_1^2}{(q_1^2 + \alpha\beta r^2)^2}.$$

Разложение формы нулевой степени имеет вид

$$\Theta_0 = \Theta_{0,0} + \varepsilon\Theta_{0,1} + \dots,$$

$$\Theta_{0,0} = -\frac{1}{2} \frac{c^2}{q_1^2 + \alpha\beta r^2}, \quad \Theta_{0,1} = \frac{c^2}{2} \frac{s(s-2\alpha)r^2}{(q_1^2 + \alpha\beta r^2)^2}.$$

Эти слагаемые присутствуют в разложении приведённого потенциала

$$\Pi = \Pi_0 + \varepsilon\Pi_1 + \dots$$

$$\Pi_0 = -(\Theta_{0,0} + U_0), \quad \Pi_1 = -(\Theta_{0,1} + U_1).$$

В итоге систему уравнений Рауса можно записать в виде

$$(A\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b})' - \left[\frac{1}{2} (A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - (\mathbf{b}, \dot{\mathbf{q}}) \right]_{\mathbf{q}} = -\Pi_{\mathbf{q}},$$

или с учетом разложений по малому параметру — в виде

$$(A_0(\mathbf{q}) + \varepsilon A_1(t, \mathbf{q}) + \dots) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \varepsilon \mathbf{Q}_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \dots, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial (A_0(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial (A_0(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \\
&+ \frac{\partial (\mathbf{b}_0(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{b}_0(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \Pi_0(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \\
\mathbf{Q}_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial (A_1(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial (A_1(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \\
&+ \frac{\partial (\mathbf{b}_1(t, \mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{b}_1(t, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \\
&- \frac{\partial}{\partial t} A(t, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \Pi_1(t, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.
\end{aligned}$$

Разрешим систему уравнений движения (2.3) относительно старших производных. Для этого найдем разложение по малому параметру матрицы, обратной к матрице $A(t, \mathbf{q})$. Уравнение для искомой матрицы $B_1(t, \mathbf{q})$ с точностью до членов первого порядка малости в разложении обратной матрицы имеет вид

$$(A_0(\mathbf{q}) + \varepsilon A_1(t, \mathbf{q}) + \dots)^{-1} = A_0^{-1}(\mathbf{q}) + \varepsilon B_1(t, \mathbf{q}) + \dots$$

Домножая это уравнение слева на матрицу $A_0(\mathbf{q}) + \varepsilon A_1(t, \mathbf{q}) + \dots$ и приравнивая матричные коэффициенты при одинаковых степенях параметра, имеем

$$B_1(t, \mathbf{q}) = A_0^{-1}(\mathbf{q})A_1(t, \mathbf{q})A_0^{-1}(\mathbf{q}),$$

Тогда систему уравнений (2.3) можно записать в виде

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \varepsilon \mathbf{F}_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \dots, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= A_0^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{Q}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\
\mathbf{F}_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= B_1(t, \mathbf{q})\mathbf{Q}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + A_0(\mathbf{q})\mathbf{Q}_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).
\end{aligned}$$

Теперь, как и в [8], выберем в качестве единицы длины радиус орбиты центра масс на стационарном движении связки в невозмущенной задаче, т. е. при $\varepsilon = 0$.

3. Постановка задачи о периодических движениях. Теорема Пуанкаре. Предположим для определенности, что положение кабины относительно гантели задается аналитической периодической функцией $s(t)$ с периодом τ . Её периодичность соответствует функциональному назначению лифта: кабина попеременно достигает станции и лифта, совершая вдоль троса челночные (периодические) движения так, что её значения пробегают отрезок $[0, 1]$.

Попытаемся найти движения космического лифта, близкие к «вертикальным» (радиальным) стационарным конфигурациям, имеющимся в невозмущенной задаче, т. е. при $\varepsilon = 0$, опираясь на теорему Пуанкаре о периодических решениях. Эти радиальные конфигурации невозмущенной задачи записываются в виде $\mathbf{q}_0 = (1, \xi_0)^T$, где в случае $\xi_0 = 0$ субспутник располагается «над» станцией, а в случае $\xi_0 = \pi$ — «под» станцией. Определим фазовый вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ при помощи равенств

$$x_1 = R - 1, \quad x_2 = \xi - \xi_0, \quad x_3 = \dot{R}, \quad x_4 = \dot{\xi}.$$

Как показано в предыдущем разделе, задача сводится к исследованию неавтономной, периодической по времени лагранжевой системы с двумя степенями свободы, зависящей от малого параметра ε . Так как уравнения Лагранжа уже разрешены относительно старших производных, то их можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{X}_1(t, \mathbf{x}) + \dots, \quad \mathbf{x} \in R^4. \quad (3.1)$$

При этом слагаемые нулевого и первого порядка можно представить в виде

$$\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ X_{0,3}(\mathbf{x}) \\ X_{0,4}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_{1,3}(t, \mathbf{x}) \\ X_{1,4}(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

где в соответствии с предыдущим разделом

$$\begin{aligned} X_{0,3}(\mathbf{x}) &= F_{0,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), & X_{1,3}(t, \mathbf{x}) &= F_{1,1}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ X_{0,4}(\mathbf{x}) &= F_{0,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), & X_{1,4}(t, \mathbf{x}) &= F_{1,2}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \end{aligned}$$

Согласно теореме Пуанкаре (см., например, [12, 13, 14]), если период вынуждающих возмущений τ не кратен ни одному из периодов собственных колебаний в окрестности соответствующего равновесия невозмущенной задачи, то при малых значениях ε существует единственное аналитически зависящее от параметра ε семейство τ -периодических решений возмущенной задачи (3.1), переходящих при $\varepsilon \rightarrow 0$ в соответствующее установившееся движение. Таким образом, для решения вопроса о существовании таких семейств решений нужно проверить свойства частот малых колебаний невозмущенной задачи.

4. Исследование невозмущенной задачи. Согласно [8] в невозмущенной задаче в первом приближении движение в окрестности устойчивого положения равновесия сводится к малым колебаниям с четырьмя различными частотами. Представим полученные в этой работе результаты в удобном для нас виде.

Кинетическая энергия системы в этом случае выражается по формуле $T = T_0$, а квадраты скоростей центра масс

и относительная скорость субспутника имеют в случае постоянной длины троса соответственно вид (2.1). Скорости изменения долгот выражаются по формулам (2.2), а понижение порядка по Раусу приводит к зависимости

$$\dot{\eta} = \frac{c}{R^2 + \alpha\beta r^2} + \frac{1}{2} \frac{R^2 - \alpha\beta r^2}{R^2 + \alpha\beta r^2} \dot{\xi}$$

Подставляя это выражение в (2.2), получим

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \frac{c}{R^2 + \alpha\beta r^2} - \frac{\alpha\beta r^2}{R^2 + \alpha\beta r^2} \dot{\xi}, \\ \dot{\lambda} &= \frac{c}{R^2 + \alpha\beta r^2} + \frac{R^2}{R^2 + \alpha\beta r^2} \dot{\xi}. \end{aligned}$$

Тогда члены второй и первой степени по скоростям в выражении для приведенной кинетической энергии примут вид

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \frac{1}{2} \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{R^2 + \alpha\beta r^2} \dot{\xi}^2, \\ \Theta_1 &= -\frac{c}{2} \frac{R^2 - \alpha\beta r^2}{R^2 + \alpha\beta r^2} \dot{\xi}, \end{aligned}$$

Разложим эти функции по степеням всех фазовых переменных в окрестности радиальных положений относительного равновесия, задаваемых соотношениями $R = 1$, $\xi = 0, \pi$. Получим

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} (A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + \dots, \quad \Theta_1 = (B\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \dots,$$

где не выписаны члены третьей и более высоких степеней по новым обобщенным координатам и скоростям — отклонениям от найденных стационарных:

$$q_1 = R - 1, \quad q_2 = \xi - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \pi \end{array} \right\}.$$

Матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

причём их ненулевые элементы записываются как

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = \frac{\alpha\beta r^2}{1 + \alpha\beta r^2}, \quad b_{21} = -2c \frac{\alpha\beta r^2}{(1 + \alpha\beta r^2)^2}$$

$$c = (1 + \alpha\beta r^2) \sqrt{\frac{\beta}{(1 - \alpha r)^2} + \frac{\alpha}{(1 + \beta r)^2}}.$$

Как и в [8], разложение приведенного потенциала $\Pi = -(U + \Theta_0)$ по степеням обобщенных координат q_i ($i = 1, 2$) в окрестности стационарной конфигурации имеет вид

$$\Pi = -\frac{1}{2}(D\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \dots,$$

где не показаны члены третьей и более высоких степеней по q_i . Матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix},$$

$$d_{11} = -\frac{1}{1 + \alpha\beta r^2} \left\{ 1 - \alpha\beta r^2 \left[\frac{3 + \beta r}{(1 + \beta r)^3} + \frac{3 - \alpha r}{(1 - \alpha r)^3} \right] \right\},$$

$$d_{22} = \alpha\beta r \left[\frac{1}{(1 + \beta r)^3} - \frac{1}{(1 - \alpha r)^3} \right].$$

Нетрудно проверить, что для случая радиально вытянутых конфигураций связки, при $\xi_0 = 0$ положение субспутника более удалено от центра гравитации, чем положение общего центра масс. В этом случае в выписанных

выше формулах следует положить считать $r > 0$. Оказалось, что для расположения субспутника «под» станцией эти формулы аналитически не изменятся, но в них следует считать $r < 0$. Это легко понять, если вспомнить, что на самом деле в формулы входит проекция радиуса-вектора относительного положения субспутника на радиальное направление, вычисляемая по очевидной формуле $r \cos \xi_0$. Это выражение положительно при $\xi_0 = 0$ и отрицательно при $\xi_0 = \pi$. Уравнения малых колебаний при $\varepsilon = 0$ имеют вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} - D\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

где постоянные матрицы A и D симметричны, а матрица $C = B^T - B$ кососимметрична. Матрица C задаёт гироскопические члены уравнений движения, причем

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b_{21} \\ -b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Исследуем более детально, чем (в плоском варианте) в [8] устойчивость нулевого решения системы (4.1) или, что то же самое, устойчивость радиальных установившихся движений исходной нелинейной системы невозмущённой системы (3.1). Вычислим корни характеристического уравнения для (4.1). Учтем, кроме того, что вследствие кососимметричности матрицы C характеристический полином являются четной функцией своего аргумента и, следовательно, зависит от его квадрата. Таким образом, характеристический многочлен имеет вид

$$f(\lambda) = |A\lambda^2 + C\lambda - D| = g(\mu), \quad \mu = \lambda^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 - d_{11} & b_{21}\lambda \\ -b_{21}\lambda & a_{22}\lambda^2 - d_{22} \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11}\mu - d_{11})(a_{22}\mu - d_{22}) + b_{21}^2\mu. \end{aligned}$$

Так что искомые корни хакактеристического уравнения системы (4.1) вычисляются при помощи корней полинома

$$g(\mu) = a\mu^2 + b\mu + c$$

в виде ($d = b^2 - 4ac$)

$$\mu_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, \quad \mu_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}.$$

Рассмотрим сначала коэффициент

$$\begin{aligned} b &= b_{21}^2 - a_{11}d_{22} - a_{22}d_{11} = \\ &= 4\frac{\alpha^2\beta^2r^4}{(1 + \alpha\beta r^2)^2} \left[\frac{\beta}{(1 - \alpha r)^2} + \frac{\alpha}{(1 + \beta r)^2} \right] + \\ &\quad + \alpha\beta r \left[\frac{1}{(1 - \alpha r)^3} - \frac{1}{(1 + \beta r)^3} \right] + \\ &\quad + \frac{\alpha\beta r^2}{(1 + \alpha\beta r^2)^2} \left\{ 1 - \alpha\beta r^2 \left[\frac{3 + \beta r}{(1 + \beta r)^3} + \frac{3 - \alpha r}{(1 - \alpha r)^3} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое здесь всегда положительно. Второе слагаемое также положительно при любых допустимых $r \in [-1, +\infty]$, при которых знаменатели остаются положительными. В самом деле

$$\frac{1}{(1 - \alpha r)^3} - \frac{1}{(1 + \beta r)^3} > 0,$$

если $r > 0$. Если же $r < 0$, то эта разность отрицательна. Но она домножается на также отрицательный множитель $\alpha\beta r$. Третье слагаемое тоже положительно в задаваемой неравенствами

$$r_\pi(\alpha) < r < r_0(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad (4.2)$$

области устойчивости. Здесь $r_\pi(\alpha)$ и $r_0(\alpha)$ — меньший и больший корни уравнения, соответствующего нулевым значениям функции от r , задаваемой выражением в фигурных скобках третьего слагаемого для b . На интервале $(r_\pi(\alpha), r_0(\alpha))$ вторая производная от приведенного потенциала Π_{RR} положительна, что соответствует одному из достаточных условий устойчивости невозмущенной задачи, полученных в [8]. Область, в которой выполнено условие (4.2), изображена на Рис. 1.

Таким образом, в упомянутой области устойчивости и даже далеко вне её коэффициент b гарантированно положителен. Учитывая, что $d_{11}, d_{22} < 0$, рассмотрим теперь дискриминант

$$\begin{aligned} d &= (b_{21}^2 - a_{11}d_{22} - a_{22}d_{11})^2 - 4a_{11}a_{22}d_{11}d_{22} = \\ &= (b_{21}^2 + a_{11}|d_{22}| + a_{22}|d_{11}|)^2 - 4a_{11}a_{22}|d_{11}||d_{22}| = \\ &= b_{21}^4 + 2b_{21}^2(a_{11}|d_{22}| + a_{22}|d_{11}|) + a_{11}^2d_{22}^2 + a_{22}^2d_{11}^2 - \\ &\quad - 2a_{11}a_{22}|d_{11}||d_{22}| > 0, \end{aligned}$$

поскольку $a_{11}^2d_{22}^2 + a_{22}^2d_{11}^2 - 2a_{11}a_{22}|d_{11}||d_{22}| \geq 0$ для всех допустимых значений параметров α, r задачи. С другой стороны, поскольку внутри области устойчивости $d_{11} < 0, d_{22} < 0$, а вне её $d_{11} > 0, d_{22} < 0$, то внутри этой области

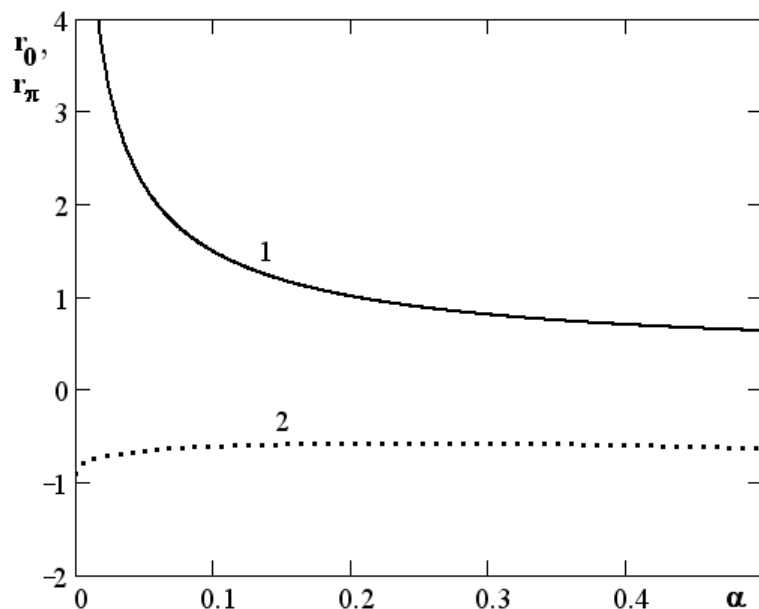


Рис. 1.

$d_1 < b_1^2$ или $\mu_1, \mu_2 < 0$, а сразу после выхода из неё наружу $d_1 > b_1^2$ или $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ (граница области устойчивости не рассматривается).

Таким образом, для малых колебаний плоского движения в области устойчивости имеем две различные пары чисто мнимых корней характеристического уравнения. В силу строгой положительности дискриминанта корни всегда будут оставаться различными для всех значений параметров задачи. При переходе через границу области устойчивости одна пара корней, соответствующая μ_2 , подходит по мнимой оси комплексной плоскости к нулю, а затем «расходится» от нуля уже по вещественной оси. Вторая

пара корней всегда остаётся на мнимой оси.

Утверждение 1 *В общем положении в области устойчивости, задаваемой неравенствами (4.2) и изображённой на Рис. 1, система уравнений в вариациях, построенная при $\varepsilon = 0$ в положении равновесия невозмущённой задачи, имеет две различные пары мультипликаторов, расположенных на единичной окружности комплексной плоскости, соответствующих собственным колебаниям с частотами $\omega_i = \sqrt{-\mu_i}$ ($i = 1, 2$).*

5. Свойства устойчивости периодических решений возмущённой задачи. Проведём анализ устойчивости получившегося периодического решения в первом приближении. В силу регулярности системы дифференциальных уравнений движения в окрестности положения равновесия матрица оператора монодромии системы в вариациях также регулярно зависит от параметров задачи. Поскольку при $\varepsilon = 0$ все четыре мультипликатора простые, то по теореме о неявной функции все эти мультипликаторы являются регулярными функциями от ε в окрестности значения $\varepsilon = 0$. В самом деле, обозначим символом ρ аргумент характеристического полинома $E(\rho)$ — мультипликатор периодической системы. Тогда при $\varepsilon = 0$ все мультипликаторы вычисляются по формулам

$$\rho_k = e^{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots, 4)$$

так, что $\lambda_{2j-1} = -i\omega_j$, $\lambda_{2j} = i\omega_j$, ($j = 1, 2$).

Не учитывая явно зависимость от параметров α , r и считая их фиксированными, рассмотрим зависимости $\rho_k(\varepsilon)$. Это неявные функции, задаваемые уравнением

$$E(\rho, \varepsilon) = 0,$$

где явно указана также зависимость от малого параметра ε , реализуемая через коэффициенты характеристического полинома.

Проверим при $\rho = \rho_k$, $\varepsilon = 0$ условие выполнимости теоремы о неявной функции. Имеем

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_k, \varepsilon=0} \neq 0.$$

В противном случае полином $E(\rho)$ имел бы кратный корень, что в ситуации общего положения места не имеет.

Итак, в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функции $\rho_k(\varepsilon)$ регулярны. Поскольку исходная система является гамильтоновой, то её характеристическое уравнение — возвратное (вместе с мультипликатором ρ_k имеется мультипликатор $\rho_j = 1/\rho_k$). Поскольку характеристический полином имеет вещественные коэффициенты, то вместе с каждым корнем ρ_k он имеет корень $\rho_j = \overline{\rho_k}$. С другой стороны, вследствие отмеченной выше регулярности при малом отклонении параметра ε от его нулевого значения мультипликаторы $\rho_k(\varepsilon)$ мало отклонятся от своих невозмущенных значений $\rho_k(0)$.

Поэтому сохранение возвратности характеристического уравнения и комплексной сопряженности его корней возможно только в случае «перемещения» мультипликаторов по единичной окружности. Нарушение этого может быть лишь при появлении кратных мультипликаторов.

Утверждение 2 *В общем положении периодические решения, рождающиеся из устойчивых радиальных положений равновесия, в первом приближении сохраняют свойство устойчивости.*

Таким образом, подбирая подходящим образом период возвратных периодических движений кабины вдоль троса, можно обеспечить устойчивость в первом приближении поступательно-вращательного (плоского) движения всей системы космического лифта в окрестности радиальных конфигураций невозмущенного движения.

6. Явный вид периодических решений возмущенного движения. Как было доказано выше, если кабина имеет малую ненулевую массу ($0 < \varepsilon \ll 1$), а функция $s(t)$ периодична с периодом τ , который не кратен ни одному из периодов собственных колебаний

$$\tau_i = 2\pi/\omega_i \neq \frac{\tau}{n}, \quad n \in N, \quad (i = 1, 2), \quad (6.1)$$

то в силу теоремы Пуанкаре существуют единственные для каждого порождающего решения семейства τ -периодических решений, аналитически зависящих от ε и переходящих при $\varepsilon \rightarrow 0$ в указанные порождающие решения. Эти семейства можно представить явно в виде сходящихся рядов по степеням параметра ε :

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}_0(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1(t) + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2(t) + \dots \quad (6.2)$$

Так как порождающие решения данных семейств — равновесия, то $\mathbf{x}_0 = 0$. Подставляя разложение (6.2) в уравнения (3.1), дифференцируя эти уравнения по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем дифференциальное уравнение для $\mathbf{x}_1(t)$, имеющее вид

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0})\mathbf{x}_1 + \mathbf{X}_1(t, \mathbf{0}). \quad (6.3)$$

Это уравнение пригодно для вычисления первого приближения не только в случае аналитического возмущения, но и в менее регулярных случаях.

Так как период функции $\mathbf{X}_1(t, \mathbf{0})$ не кратен ни одному из периодов решений из фундаментальной системы для уравнений в вариациях

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0})\xi, \quad (6.4)$$

то уравнение (6.3) имеет единственное периодическое решение [15].

Векторнозначная функция правых частей (6.3) задается при помощи соотношений

$$\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) = Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_{11}/a_{11} & 0 & 0 & -b_{21}/a_{11} \\ 0 & d_{22}/a_{22} & b_{21}/a_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_1(t, \mathbf{0}) = \mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_{1,5}(t, \mathbf{0}) \\ X_{1,6}(t, \mathbf{0}) \end{pmatrix}.$$

Единственное τ -периодическое решение системы (6.3) может быть выражено по формуле (см., например, [15])

$$\mathbf{x}_1(t) = Y(t)[I - Y(\tau)]^{-1} \left[\int_0^t Y^{-1}(t')\mathbf{y}_1(t')dt' + \right. \\ \left. + Y(\tau) \int_t^\tau Y^{-1}(t')\mathbf{y}_1(t')dt' \right],$$

где $Y(t) = e^{Y_0 t}$ — нормированная фундаментальная матрица однородной системы (6.4).

При помощи функции Грина

$$G(t, t') = \begin{cases} Y(t)[I - Y(\tau)]^{-1}Y^{-1}(t'), & 0 \leq t' \leq t \leq \tau, \\ Y(t + \tau)[I - Y(\tau)]^{-1}Y^{-1}(t'), & 0 \leq t < t' \leq \tau \end{cases}$$

то же решение можно представить для $0 \leq t \leq \tau$ в виде

$$\mathbf{x}_1(t) = \int_0^\tau G(t, t')\mathbf{y}_1(t')dt'$$

результата действия интегрального оператора, применённого к возмущению $\mathbf{y}_1(t)$.

В рассматриваемом случае матрица Y_0 постоянна. Поэтому аналитическое выражение для матричнозначной функции Грина $G(t, t')$ достаточно просто. Чтобы его выписать, вычислим фундаментальную матрицу $Y(t)$, составленную из четырех столбцов, представляющих фундаментальные решения, соответствующие четырем корням

$$\lambda_1 = i\omega_1, \quad \lambda_2 = -i\omega_1, \quad \lambda_3 = i\omega_2, \quad \lambda_4 = -i\omega_2$$

векового уравнения $f(\lambda) = 0$.

Для нахождения этих фундаментальных решений надо построить базис, состоящий из четырех векторов одномерных (комплексных) инвариантных подпространств оператора $\mathbf{C}^4 \ni \mathbf{y} \mapsto Y_0 \mathbf{y} \in \mathbf{C}^4$, соответствующих вышеперечисленным корням векового уравнения. Используя вид матриц A , C , D и то, что в рассматриваемом случае устойчивости все λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) отличны от нуля, из системы

линейных относительно координат ξ_1, ξ_2 искомого базисного вектора уравнений

$$(A\lambda_k^2 + C\lambda_k - D) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

точнее – из её первого уравнения, получим зависимость между ξ_1 и ξ_2 для собственных векторов, отвечающих инвариантным подпространствам в виде

$$\xi_2^{(k)} = \frac{a_{11}\lambda_k^2 - d_{11}}{\lambda_k} \xi_1^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Эти соотношения будут удовлетворяться, если положить, например,

$$\xi_1^{(k)} = \lambda_k, \quad \xi_2^{(k)} = a_{11}\lambda_k^2 - d_{11} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

В силу структуры уравнений Лагранжа $\xi_3 = \dot{\xi}_1$ и $\xi_4 = \dot{\xi}_2$ остальные координаты собственных векторов инвариантных подпространств системы в вариациях (6.4) будут иметь вид

$$\xi_3^{(k)} = \lambda_k \xi_1^{(k)} = \lambda_k^2, \quad \xi_4^{(k)} = \lambda_k \xi_2^{(k)} = \lambda_k (a_{11}\lambda_k^2 - d_{11})$$

при $k = 1, 2, 3, 4$.

Далее, для эффективного вычисления функции Грина необходимо перейти к базису, составленному из собственных векторов $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)}$. В этом базисе оператор Y_0 и все аналитические функции от него имеют диагональную матрицу с числами λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) либо соответствующими функциями от этих чисел, расположенными по диа-

гонали. Составим матрицу перехода к новому базису

$$S = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \xi_1^{(3)} & \xi_1^{(4)} \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \xi_2^{(3)} & \xi_2^{(4)} \\ \xi_3^{(1)} & \xi_3^{(2)} & \xi_3^{(3)} & \xi_3^{(4)} \\ \xi_4^{(1)} & \xi_4^{(2)} & \xi_4^{(3)} & \xi_4^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица оператора Y_0 имеет представление

$$Y_0 = S \operatorname{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) S^{-1}.$$

Аналогично, фундаментальная матрица системы в вариациях (6.4) вычисляется по формуле

$$e^{Y_0 t} = S \operatorname{diag} (e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}, e^{\lambda_4 t}) S^{-1}.$$

Наконец, функция Грина может быть вычислена при помощи соотношения

$$G(t, t') = S \operatorname{diag} (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) S^{-1},$$

где $\gamma_k = \gamma(\lambda_k, t, t')$ для $k = 1, 2, 3, 4$ и в качестве диагонального элемента используется функция

$$\gamma(\lambda, t, t') = \frac{e^{\lambda(t-t')}}{1 - e^{\lambda\tau}} \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t' \leq t \leq \tau, \\ e^{\lambda\tau} & \text{при } 0 \leq t < t' \leq \tau \end{cases}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 08-01-00600-а, 08-01-00718-а, 08-08-00553-а, 06-01-90505-БНТС_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Окунев Ю. М.* О некоторых свойствах поступательно-вращательного движения длинной гантели в центральном поле сил // Тр. ин-та механики МГУ. 1971. № 10. С. 87–121.
2. *Окунев Ю. М.* О возможных движениях гантели в центральном поле сил // Космические исследования. Т. VII. Вып. 5. 1969. С. 637–642.
3. *Белецкий В. В., Пономарева О. Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // Космич. исслед. Т. 28. Вып. 5. 1990. С. 664–675.
4. *Krupa M., Steindl A., Troger H.* Stability of relative equilibria. Pt 2. Dumbell satellites // Meccanica. V. 35, N. 4. 2000. P. 353–371.
5. *Li-Sheng Wang, Shyh-Feng Cheng.* Dynamics of two spring-connected masses in orbit // Celest. Mech. and Dynam. Astronomy. V. 63. N. 3–4. 1996. P. 289–312.
6. *Буров А. А., Степанов С. Я.* О геометрии масс в динамике деформируемых тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1995. С. 107–130.
7. *Steindl Alois, Troger Hans.* Mit dem Aufzug in den Weltraum? // Internat. Math. Nachrichten. 2004. No.197. PP.9–25.
8. *Косенко И. И., Степанов С. Я.* Устойчивость положений относительного равновесия орбитальной связки с

учетом ударных взаимодействий. Неограниченная задача // Известия АН. МТТ. 2006. №. 4. С. 86–96.

9. *Lorenzini E. C.* A three-mass tethered system for micro-g/variable-g applications // Journal of Guidance. Vol.10. No.3. 1987. P. 242—249.
10. *Burov A. A., Buchin V. O., Troger H.* A dumb-bell satellite with a cabin. Existence and stability of relative equilibria // Proc. of 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008). In: <http://lib.physcon.ru/download/p1749.pdf>
11. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М: Наука, 1979. 432 с.
12. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. Том I. Новые методы небесной механики. — М: Наука, 1971. 772 с.
13. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.
14. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
15. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М: Наука, 1967. 472 с.

УДК 531.36; 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ РАЗОМКНУТОЙ СВЯЗКИ ТРЕХ ТЕЛ

А.П. Блинов, А.С. Сумбатов

При помощи теоремы Рауса исследуется устойчивость стационарных движений по инерции связки трех материальных точек, образующих разомкнутую цепочку.

Ключевые слова: связка трех тел, циклическая координата, стационарное движение, устойчивость.

Рассмотрим задачу [1] о плоском движении в условиях невесомости трех тел, связанных двумя нерастяжимыми невесомыми нитями и образующими разомкнутую цепочку. Такую конфигурацию может представлять, например, связка двух космических аппаратов, вращающихся относительно общего центра масс (для имитации силы тяжести) при дальних космических перелетах, когда на связующем тросе остановилось или застряло третье тело (лифт). Размерами тел по сравнению с длинами нитей пренебрегаем, поэтому тела рассматриваются как материальные точки (частицы). Исследование устойчивости стационарных движений связки при выполнении условий натяжения обеих нитей представляет несколько громоздкую задачу, которая просто разрешается с применением компьютерных символьных вычислений.

Пусть l_1, l_2 - длины невесомых и нерастяжимых нитей, связывающих частицу C массы m_0 соответственно с частицами A массы m_1 и B массы m_2 . Выберем инерциальную декартову систему координат в плоскости ABC с началом в произвольной точке O (Рис.1). Обобщенные координаты: полярные радиус и угол r, φ частицы C , углы α и β , отсчитываемые от направления радиуса r до натянутых нитей l_1, l_2 . Угол $\gamma = \beta - \pi$.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1l_1(\dot{\alpha} + \dot{\varphi})[2r\dot{\varphi}\cos\alpha - 2\dot{r}\sin\alpha + l_1(\dot{\alpha} + \dot{\varphi})] + \\ + \frac{1}{2}m_2l_2(\dot{\gamma} + \dot{\varphi})[-2r\dot{\varphi}\cos\gamma + 2\dot{r}\sin\gamma + l_2(\dot{\gamma} + \dot{\varphi})] + \frac{1}{2}m\dot{r}^2,$$

где $m = m_0 + m_1 + m_2$. Далее полагаем $m_1l_1 \neq m_2l_2$.

Координата φ циклическая, ей соответствует циклический интеграл

$$m_1l_1(l_1 + r\cos\alpha)\dot{\alpha} + m_2l_2(l_2 - r\cos\gamma)\dot{\gamma} + \\ + [mr^2 + m_1l_1(l_1 + 2r\cos\alpha) + m_2l_2(l_2 - 2r\cos\gamma)]\dot{\varphi} + \\ + (-m_1l_1\sin\alpha + m_2l_2\sin\gamma)\dot{r} = c \quad (c = const)$$

Проигнорировав циклическую координату, найдем выражение измененной потенциальной энергии

$$V = \frac{c^2}{2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + mr^2 + 2m_1l_1r\cos\alpha - 2m_2l_2r\cos\gamma)}$$

Согласно теории Рауса критическим точкам этой функции по переменным α, γ, r соответствуют стационарные движения рассматриваемой механической системы. Легко находим, что существуют только два стационарных движения:

развернутая цепочка

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0, \quad r = (m_2l_2 - m_1l_1) / m$$

и *сложенная* цепочка

$$\alpha = \pi, \quad \gamma = 0, \quad r = (m_1l_1 + m_2l_2) / m$$

В обоих движениях тела фиксированы на одной прямой, которая поворачивается вокруг общего центра масс системы с постоянной угловой скоростью, равной соответственно

$$\omega_{\pm} = \frac{c}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + mr^2 + 2r(\pm m_1l_1 - m_2l_2)}$$

Устойчивость стационарных движений решается с помощью вторых частных производных измененной потенциальной энергии, вычисленных на изучаемом стационарном решении.

Для *развернутой* цепочки собственные значения (коэффициенты Пуанкаре) матрицы вторых частных производных функции V равны

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{c^2 (m_0 + m_1 + m_2)^3}{[m_1 l_1^2 (m_0 + m_2) + m_2 l_2^2 (m_0 + m_1) + 2m_1 l_1 m_2 l_2]} < 0, \\ \lambda_2 &= -\frac{c^2 (m_0 + m_1 + m_2) m_1 l_1 (m_1 l_1 - m_2 l_2)}{[m_1 l_1^2 (m_0 + m_2) + m_2 l_2^2 (m_0 + m_1) + 2m_1 l_1 m_2 l_2]^2}, \\ \lambda_3 &= \frac{c^2 (m_0 + m_1 + m_2) m_2 l_2 (m_1 l_1 - m_2 l_2)}{[m_1 l_1^2 (m_0 + m_2) + m_2 l_2^2 (m_0 + m_1) + 2m_1 l_1 m_2 l_2]^2}\end{aligned}$$

Степень неустойчивости равна двум, движение можно стабилизировать гироскопическими силами.

Для *сложенной* цепочки коэффициенты Пуанкаре отрицательны:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{c^2 (m_0 + m_1 + m_2)^3}{[m_1 l_1^2 (m_0 + m_2) + m_2 l_2^2 (m_0 + m_1) + 2m_1 l_1 m_2 l_2]^2}, \\ \lambda_2 &= -\frac{c^2 (m_0 + m_1 + m_2) m_1 l_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2)}{[m_1 l_1^2 (m_0 + m_2) + m_2 l_2^2 (m_0 + m_1) + 2m_1 l_1 m_2 l_2]^2}, \\ \lambda_3 &= -\frac{c^2 (m_0 + m_1 + m_2) m_2 l_2 (m_1 l_1 + m_2 l_2)}{[m_1 l_1^2 (m_0 + m_2) + m_2 l_2^2 (m_0 + m_1) + 2m_1 l_1 m_2 l_2]^2}\end{aligned}$$

Движение неустойчиво.

Полученный результат, однако, тривиален. Действительно, центр масс системы движется равномерно и прямолинейно относительно *произвольной* инерциальной системы отсчета. Поэтому, если придать малые возмущения переменным α , γ , r , $\dot{\alpha}$, $\dot{\gamma}$ и \dot{r} так, чтобы центр масс начал удаляться от

начала координат O , то, по крайней мере, по переменной r имеем неустойчивость.

Выберем инерциальную систему координат, начало которой совпадает с центром масс системы. Тогда

$$\begin{cases} mr \cos \varphi + m_1 l_1 \cos(\varphi + \alpha) - m_2 l_2 \cos(\varphi + \gamma) = 0, \\ mr \sin \varphi + m_1 l_1 \sin(\varphi + \alpha) - m_2 l_2 \sin(\varphi + \gamma) = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} mr + m_1 l_1 \cos \alpha - m_2 l_2 \cos \gamma = 0, \\ m_1 l_1 \sin \alpha - m_2 l_2 \sin \gamma = 0 \end{cases}$$

Полученные формулы позволяют исключить две из обобщенных координат (например, r и γ) в функции Рауса. В частности, измененная потенциальная энергия примет вид

$$V(\alpha) = \frac{c^2}{2(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 - mr(\alpha)^2)},$$

где

$$r(\alpha) = \frac{1}{m} \left(\sqrt{(m_2 l_2)^2 - (m_1 l_1)^2 \sin^2 \alpha} - m_1 l_1 \cos \alpha \right)$$

(полагаем $m_2 l_2 > m_1 l_1$, в противном случае вместо угла γ исключить следует угол α).

Стационарные движения системы находятся из условия $V' = 0$, или $r' = 0$, которое принимает вид $\sin \alpha = 0$. Таким образом, получаем те же два стационарных движения.

Конфигурация системы "развернутая цепочка" устойчива, поскольку в знаменателе измененной потенциальной энергии $V(\alpha)$ величина $r(0)$ – минимальное значение функции $r(\alpha)$, а конфигурация системы "сложенная цепочка" неустойчива, потому что $r(\pi)$ является максимальным значением.

Выражаем благодарность А.А.Бурову за ценное замечание при обсуждении работы.

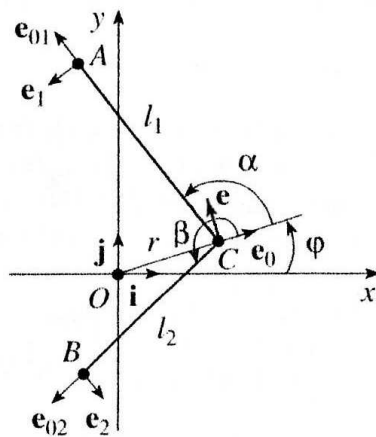


Рис. 1. Связка трех тел

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 08-01-00600).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинов А.П. О плоском движении по инерции связки трех тел // Космические исследования. - 2007. - Т.45, №2. - С.165-168.

ДИНАМИКА КОЛЕС С ДЕФОРМИРУЕМОЙ
ПЕРИФЕРИЕЙ. ОБЗОР

И.Ф. Кожевников

Задаче о качении абсолютно твердых и деформируемых тел посвящено значительное число работ теоретического и прикладного характера. Уже более полувека внимание ученых и инженеров привлекает проблема качения колес с пневматическими шинами. Интерес к этому кругу задач значительно возрос в последние десятилетия в связи с появлением новых технологий и конструкций шин, а также в связи с развитием вычислительных и аналитических методов при исследовании динамики качения колес с пневматическими шинами. В работе дается краткий обзор классических и современных результатов по теории качения твердых и деформируемых колес.

Ключевые слова: шина, деформируемая периферия, колесо.

1. Теория качения. Теория качения [1] представляет область механики, в которой определяются силы, действующие на катящееся деформируемое или абсолютно твердое колесо в области контакта с недеформируемой или деформируемой опорной поверхностью, выявляются зависимости этих сил от фазовых переменных, т.е. координат, характеризующих положение диска колеса, и их производных по времени, а также отыскиваются уравнения кинематических связей при качении. Кроме того, к теории качения относится разработка экспериментальных методов определения упомянутых зависимостей, реологических постоянных и кинематических параметров деформируемого колеса.

В теории качения рассматриваются два вида движений: стационарное качение, сопровождающееся равномерным и прямолинейным перемещением центра колеса при постоянной ориентации его диска в пространстве и неизменной реакции в области контакта, и нестационарное качение, при котором движение диска колеса может быть произвольным, а реакция изменяется во времени. Более простая теория стационарного качения предшествовала развитию теории нестационарного качения.

В области нестационарного качения все результаты можно подразделить на две группы. К первой относятся очень немногочисленные исследования, касающиеся формулировки определяющих уравнений теории нестационарного качения, устанавливающих связь между реакцией в области контакта с опорной поверхностью и фазовыми переменными абсолютно твердого диска колеса. Второй группе принадлежат многочисленные работы, в которых изучается динамика практически важных конкретных систем с использованием той или иной теории качения. В настоящее время число работ второй группы выросло на порядок. В некоторых из этих работ содержатся предложения, оказавшие определенное влияние на развитие теории нестационарного качения, а также способы и результаты определения параметров колеса с шиной. В работах первой группы выделяют два подхода: модельный и феноменологический.

Модельный подход характеризуется рассмотрением колеса с конкретным представлением деформируемой периферии в виде непрерывной совокупности элементов в форме пружин или деформируемых стержней, связанных нитями, балками, изогнутыми брусками и т.д., которые моделируют, в частности, и оболочку под давлением (шину). Описанная конструкция деформируемой периферии допускает математическое описание в форме совокупности дифференциальных операторов, которые можно рассматривать как математическую модель деформируемого колеса. Для колеса с пневматической шиной на результат

составления определяющих уравнений в теории качения должны влиять конструктивные особенности шины: оболочка переменной толщины, нетонкая, неоднородная, анизотропная (из-за различного расположения нитей корда и слоев каркаса).

Получил также распространение феноменологический подход, при котором соотношения, характеризующие зависимости сил и моментов, действующих на колесо, от параметров движения, носят эмпирический характер, а связь между константами теории и практическими данными устанавливается опытным путем. При этом внутренняя структура деформируемого колеса и детальный характер взаимодействия элементов деформируемой периферии колеса с опорной поверхностью не рассматриваются. Таким образом, предмет изучения представляется в виде некоего «черного ящика», поведение и свойства которого определяются его внешними характеристиками.

2. Обзор работ. Проблемам качения пневматических колес автомобиля и самолета был посвящен ряд исследований, основывающихся на различных подходах к выбору моделей и набора параметров, характеризующих взаимодействие колеса с опорной поверхностью.

Впервые на явления упругой деформации при качении и на их последствия обратил внимание Осборн Рейнольдс (O. Reynolds). В 1874 году в журнале Engineering он указал на то, что явление продольного псевдоскольжения (или упругого скольжения)¹ должно наблюдаться при качении колес железнодорожного состава по рельсам. Это явление проявляется в

¹Впервые явление псевдоскольжения наблюдалось в ременной передаче. Это явление состоит в том, что при вращении двух жестких шкивов, связанных ременной передачей (один шкив ведущий, а другой - ведомый), отношение угловых скоростей вращения шкивов не совпадает с отношением их радиусов. Вследствие упругого растяжения ремня произведение угловой скорости ведущего шкива на его радиус оказывается больше произведения угловой скорости ведомого шкива на его радиус. Это отклонение возрастает с увеличением передаваемого момента. Таким образом, проис-

несовпадении пути, пройденного центром колеса локомотива, и произведением угла поворота колеса на его радиус. Кажется, будто большую часть пути колесо проходит качением, а маленькую часть - как бы скольжением, причем эта последняя составляет тем большую долю пути, чем больше сила тяги. Сущность явления состоит в том, что материалы обладают упругостью, и если при посредстве колеса рельсу передается сила тяги, то условие равновесия сил требует, чтобы материал колеса сжимался (относительное местное уменьшение длины окружности колеса в точке контакта), тогда как рельс оказывается растянутым. Таким образом, получается, что по растянутому всюду материалу пути катится всегда сжатый материал колеса (рис. 1.) Качение колеса непрерывно возобновляет его отставание, вызванное этим явлением, что и создает упругое скольжение.

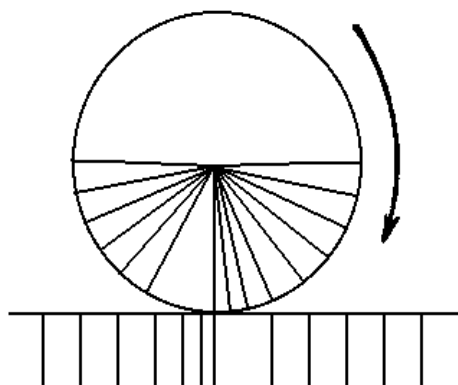


Рис. 1.

ходит как бы скольжение ремня относительно шкивов, хотя в действительности скольжение отсутствует. Описанное явление получило название псевдоскольжения или крипа (*creep* (англ.) - ползти)

Затем в 1925 году автомобилистами (Г. Брулье) было обнаружено явление бокового псевдоскольжения (или поперечного упругого скольжения, или бокового увода²). Боковой увод легко наблюдать на автомобилях. Если закрепить каким-то образом рулевое управление и слегка нажать на педаль газа, чтобы придать автомобилю некоторую скорость, тогда автомобиль опишет круг. Если прибавить газ, то автомобиль опишет круг большего радиуса. Следует подчеркнуть, что боковой увод наблюдается у балонного колеса, которое катится без проскальзывания. Это явление обусловлено наличием у колеса деформируемой периферии. Под действием боковых сил, например на повороте (центробежные силы), колесо упруго отклоняется и катится «криво» в направлении, образующем угол с геометрической плоскостью недеформированного колеса, которая совпадает с видимым направлением качения (рис. 2).

Теория нестационарного качения, объединяющая явления продольного и бокового псевдоскольжений применительно к движению локомотива, была развита в 1926-1928 годах Ф.М. Картером (F.M. Carter) [2]. Картер феноменологически ввел линейные соотношения для продольной и боковой составляющих реакции в области контакта в функции от соответствующих псевдоскольжений.

Боковая составляющая реакции в функции бокового псевдоскольжения изучалась с точки зрения динамики автомобиля И. Рокаром (Yves Rocard) [3]. В его работе было подробно рассмотрено явление бокового увода колеса. Кинематическая связь, накладываемая на балонное колесо при его качении без проскальзывания с постоянной скоростью V , имеет вид

$$\dot{x} = VLX_2 \quad (2.1)$$

где x - абсцисса центра площадки контакта, L - коэффициент увода, X_2 - величина поперечной деформации пневматика,

²Термин, предложенный академиком Е.А. Чудаковым

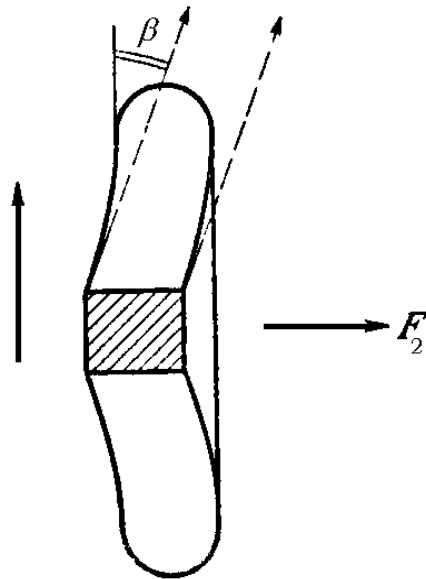


Рис. 2.

представляющая собой расстояние от средней плоскости колеса до центра площадки контакта. Данное уравнение, которое называется уравнением увода, приводит к задаче об изучении деформаций шины. Поэтому с целью «вписать» новое явление в рамки теоретической механики предлагалось рассматривать недеформируемые колеса, снабженные свойством упругого скольжения и бокового увода. При такой схематизации (гипотеза увода) пропадает кинематическое уравнение связи, но в уравнениях движения появляется член, связанный с наличием поперечной силы, которая пропорциональна углу увода³

$$F_2 = -K\beta \quad (2.2)$$

³ *envirage* (фр.), или квазивираж по терминологии Рокара

где K - коэффициент сопротивления уводу. Рокар сформулировал свою гипотезу увода в случае отсутствия наклона колеса ($\kappa = 0$). Таким образом, эта гипотеза применима лишь при изучении движения таких экипажей, оси колес которых остаются всегда параллельными плоскости дороги. Поэтому область использования гипотезы Рокара является довольно ограниченной. Она не охватывает, например, движений велосипеда и мотоцикла, переднего колеса шасси самолета при упругой стойке, передних колес автомобиля при учете наклона осей шкворней и т.д.

В большинстве исследований, основанных на этом подходе, ставится целью определение компонент сил реакции и моментов действующих на колесо при контакте с опорной поверхностью как функций от параметров движения, в частности от продольного и поперечного скольжения (псевдоскольжения).

Теория качения пневматика Дж.Х. Грейдануса (J.H. Greidanus) [4] является более полной по сравнению с теорией Рокара. В качестве параметров, характеризующих деформацию пневматика, выбираются отклонение «средней» точки линии контакта от своего равновесного положения и угол поворота касательной к линии качения⁴ в точке контакта. Эти параметры определяют силы и моменты взаимодействия шины с дорогой и участвуют в формулировке неголономных связей.

Явление увода, возникающее при качении наклонного колеса с пневматиком, ориентация средней плоскости которого сохраняется постоянной, было описано в работах Ю.А. Ечеистова [5] и Е.А. Чудакова [6, 7]. Это явление они объясняют возникновением поперечной силы и момента сил, стремящихся повернуть колесо в сторону угла его наклона. Для малого угла κ наклона плоскости колеса можно принять, что поперечная сила F_2 и момент M_1 пропорциональны величине угла κ , где коэффициенты

⁴или путевой кривой, или грузовой линии, согласно американской терминологии

пропорциональности могут быть найдены из опыта.

$$F_2 = C_1\kappa, \quad M_1 = C_2\kappa. \quad (2.3)$$

Теория, разработанная М.В. Келдышем и описанная им в работе [8] по изучению явления шимми⁵, является классическим примером феноменологического подхода. В модели Келдыша деформация пневматика характеризуется расстоянием λ от линии пересечения диаметральной плоскости смещенного обода колеса с опорной плоскостью до центра площадки контакта до деформации, углом φ от этой линии до средней линии площадки контакта до деформации, углом κ наклона плоскости диска колеса по отношению к вертикали и смещения h опорной плоскости в вертикальном направлении. Реакция опорной плоскости на пневматик сводится к нормальной реакции N , поперечной реакции F_2 , моментам M_1 , M_3 . Предполагается, что колесо катится с постоянной угловой скоростью, а составляющие реакции являются линейными функциями параметров упругой деформации в центре области контакта

$$F_2 = a\lambda + \sigma N\kappa, \quad M_1 = -\sigma N\lambda - \rho N\kappa, \quad M_3 = b\varphi. \quad (2.4)$$

⁵Шимми - это название модного западного танца. На переднем колесе трехколесного шасси самолета (как и на передних колесах автомобиля) при определенной скорости движения наблюдается явление самовозбуждения колебаний. Эти колебания состоят из поворотов колеса относительно вертикальной оси и боковых смещений и получили название «шимми». На автомобиле явление шимми стало наблюдаться при переходе на баллонные колеса и связано с наличием упругости пневматика. Явление шимми часто называют «флаттером колеса», и оно имеет много аналогий с флаттером несущих поверхностей самолета. Впервые самолеты «затанцевали» у американцев. Уже у первых машин с трехколесным шасси переднее колесо при некоторой скорости начинало произвольно поворачиваться вокруг стойки - то немного вправо, то чуть-чуть влево. Самолет съезжал с бетонной дорожки и зарывался носом в землю, а того хуже - стойка ломалась на большой скорости

Величины a, b, σ, ρ зависят от внутреннего давления p в пневматике и нормальной нагрузки N . Точное определение этих констант должно проводиться статическими испытаниями.

Из допущений об отсутствии скольжения в центре контакта следует, что касательная к экваториальной линии деформируемой периферии совпадает с касательной к линии качения и точно так же в этой точке совпадают кривизны обеих линий. Причем используется гипотеза о линейной зависимости кривизны от трех параметров деформации

$$\frac{1}{R} = A_1 \lambda - A_2 \varphi - A_3 k. \quad (2.5)$$

Влияние ширины области контакта проявляется только в значениях коэффициентов теории, а проскальзывание в области контакта не рассматривается.

Способы понижения порядка системы дифференциальных уравнений теории Келдыша, позволяющие построить ряд приближений, предложены Ю.И. Неймарком и Н.А. Фуфаевым [9].

В работе И.И. Метелицына [10] предлагалось моделировать поверхность шины частью поверхности тора, однако, в дальнейшем деформации сводились к перемещению грузовой линии вдоль оси колеса, а сила и момент пропорциональны этому перемещению и его производной по натуральному параметру в точке контакта. Кроме того, согласно [10], соотношение (2.5) нельзя рассматривать, как уравнение кинематической связи, т.к. уравнения связей по самой идее должны выражать соотношения, которые соблюдаются, какие бы силы ни действовали на колесо. Соотношение же (2.5) может быть осуществлено, если подобрать надлежащие внешние силы, но при произвольных силах оно не соблюдается.

Рассмотренные выше теории Рокара и Картера являются теориями линейного увода, когда боковая сила связана с углом увода линейным образом (рис. 3). Когда приложенное уси-

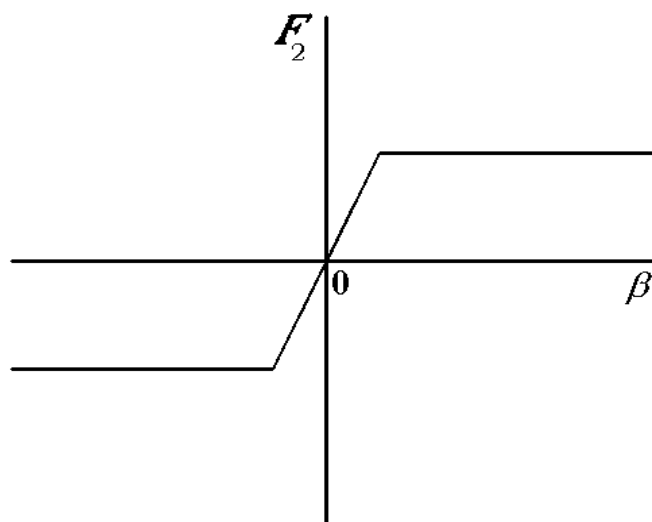


Рис. 3.

лие становится равным силе, способной преодолеть сухое трение между материалом колеса в отсутствие качения и землей, то возникает полное боковое скольжение. Однако опытные данные показывают, что зависимость силы от величины увода носит нелинейный характер, и существует участок частичного проскальзывания, разделяющий линейный участок и участок полного скольжения (рис. 4). Таким образом, гипотеза увода справедлива лишь для достаточно малых величин угла. В работах Х.Б. Пачейки и Е. Баккера (Н.В. Расејка, Е. Bakker) [11–14] рассматриваются эмпирически найденные нелинейные зависимости реакций от параметров качения («магическая формула»), позволяющие получить приемлемые экспериментально подтверждаемые результаты при достаточно больших значениях параметров (рис. 5). Силы F_1 , F_2 и момент M_3 являются функциями параметров продольного и бокового скольжения,

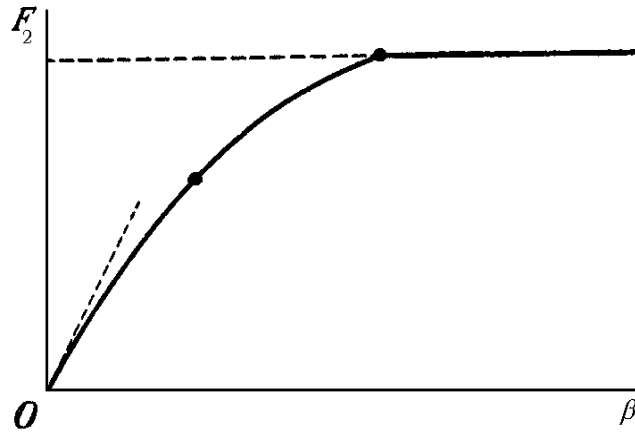


Рис. 4.

вертикальной нагрузки, углов развала и схождения.

$$\begin{aligned} y(x) &= D \sin [C \arctan (Bx - E (Bx - \arctan(Bx)))], \\ x &= X + X_0, \quad y(x) = Y(X) - Y_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где B - «фактор жесткости», C - «фактор формы», D - максимум функции, E - «фактор кривизны».

В исследованиях И.К. Ванга (Y.Q. Wang) [15] изучается зависимость вертикальной реакции F_z от вертикального смещения z_0 при различных режимах качения колеса.

М.А. Левин в [16] включил в рассмотрение такие факторы как возможность существования по крайней мере двух областей проскальзывания, анизотропное трение, различие коэффициентов сухого трения и трения скольжения на малых скоростях, наличие вязко-упругих элементов в конструкции шины.

В работе М.А. Левина и Н.А. Фуфаева [1] излагается подход к исследованию проблем качения деформируемого колеса, при котором задача теории качения состоит в нахождении шести компонент обобщенной реакции связи, распределенных сил

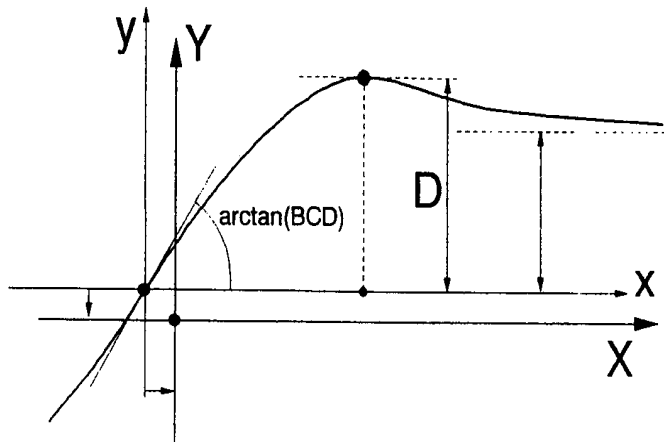


Рис. 5.

и моментов в области контакта с учетом деформационных и фрикционных свойств периферии колеса и опорной поверхности как функций фазовых переменных диска колеса. Модель колеса с деформируемой шиной представляет набор тонких твердых дисков с деформируемой периферией, закрепленных на общем валу. Деформируемая периферия каждого диска состоит из набора радиально расположенных безмассовых стержней, соединенных по концам безмассовой растяжимой нитью (рис. 6). Деформации задаются функциями от угла φ и предполагаются существенными лишь вблизи области контакта.

Ф. Бёйм (F. Böhm) в [17–19] предложил модель пневматического колеса с бесконечным числом степеней свободы в виде криволинейной балки, связанной с диском непрерывно распределенными упругими силами, а также модель, в которой учитывается масса элементов периферии, состоящей из бандажа (упругий ремень) и боковых стенок.

Проскальзывание пневматика в зоне контакта учитывалось

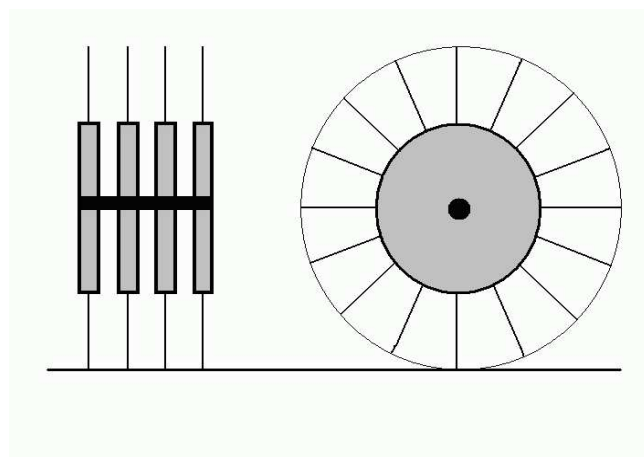


Рис. 6.

рядом авторов в моделях с контактными элементами⁶, в частности, И.В. Новожиловым [20], Т. Фуджиокой и К. Годой (Т. Fujioka, К. Goda) [21], Г. Мастину и М. Фейнелло (G. Mastinu, M. Fainello) [22]. Распределение нагрузок в области контакта определяет разбиение последней на «область скольжения» и «область прилипания». Х. Фромм (H. Fromm) [23] предложил «щеточную» модель, в которой есть жесткий каркас и эластичный бандаж. В модели Новожилова опорный элемент⁷ состоит из недеформируемой подложки и бесконечно тонкого деформируемого пограничного слоя по границе с опорной поверхностью. Кроме того, предполагается, что пограничный слой состоит из бесконечно малых невзаимодействующих друг с дру-

⁶ «щетками», или «brush-модели»

⁷Механическая система, образованная материальными частицами пневматика, которые в данный момент времени находятся внутри фиксированного по форме, малого по толщине геометрического элемента, прилегающего к опорной плоскости и целиком включающего пятно контакта при возможных изменениях его размеров

гом контактных элементов. Каждый из них связан с подложкой упругим образом и взаимодействует с опорной поверхностью по Кулону (Coulomb) (рис. 7). Набор соотношений, полученных

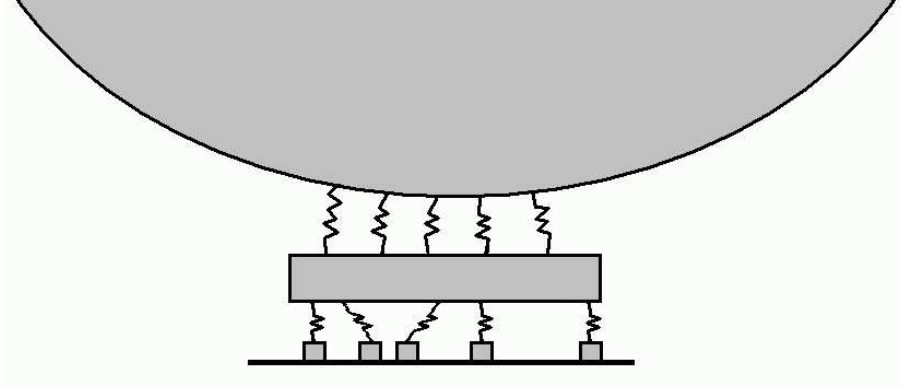


Рис. 7.

в работе [20], позволяет определить зоны проскальзывания и непроскальзывания контактных элементов, главный вектор и главный момент сил, действующих со стороны поверхности качения на опорный элемент. В случае когда все контактные элементы не проскальзывают, а область контакта является прямоугольником с длинами соответствующих сторон $2a$ и $2b$, получаются следующие соотношения на составляющие главного вектора и главного момента системы сил касательных реакций

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -Ka\left(s_1 + \frac{X_2}{r}\omega_3\right), \\
 F_2 &= -Ka\left(s_2 - \frac{X_1}{r}\omega_3\right) + K\frac{a^2}{3r}\omega_3, \\
 M_3 &= -K\frac{a^2}{3}\left(s_2 - \frac{X_1}{r}\omega_3\right) - K\frac{ab^2}{3r}\omega_3,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где X_1, X_2 - координаты точки приведения сил взаимодействия с опорной поверхностью, K - суммарная сдвиговая жесткость

пограничного слоя, s_1 - продольное псевдоскольжение, s_2 - угол бокового увода, ω_3 - нормализованная угловая скорость вращения.

Динамическое взаимодействие деформируемых твердых тел с использованием модели сухого трения исследовалось В.Ф. Журавлевым [24], А.Ю. Ишлинским [25, 26], Ж.Дюво и Ж.Л. Лионсом (G. Duvaut, J.L. Lions) [27].

В целом ряде работ приводится подход, при котором деформированная поверхность оболочки пневматика моделируется методом конечных элементов [28, 29]. При этом подходе для каждого малого фрагмента поверхности записываются условия равновесия и общая система уравнений решается численными методами. В [30] приведен подробный обзор статей, основанных на методе конечных элементов.

В работах А.И. Весницкого, С.В. Крысова, С.Р. Шохина, А.И. Потапова [31–34] применяется подход, основанный на применении вариационного принципа в задачах о движении нагрузок вдоль упругих балок с неизвестными подвижными границами возможных разрывов производных искомой функции.

Нелинейная теория контакта с проскальзыванием описана Дж.Дж. Калкером (J.J. Kalker) [35] и реализована в известных программах CONTACT и FASTSIM.

В работе В.С. Сергеева [36] исследуется динамика и устойчивость прямолинейного движения железнодорожной колесной пары, соединенной с платформой вязкоупругими пружинами, с учетом линейных членов сил крипа в форме, предложенной Калкером. Движение описывается интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

Малые колебания колес исследовались многими авторами. В частности, изучались вибрации шины на базе модели упругого кольца и анализировались свойства передачи вибрации от дороги на ось колеса [37]. Рассматривались колебания гибкого растяжимого вращающегося кольца как в линейной постановке

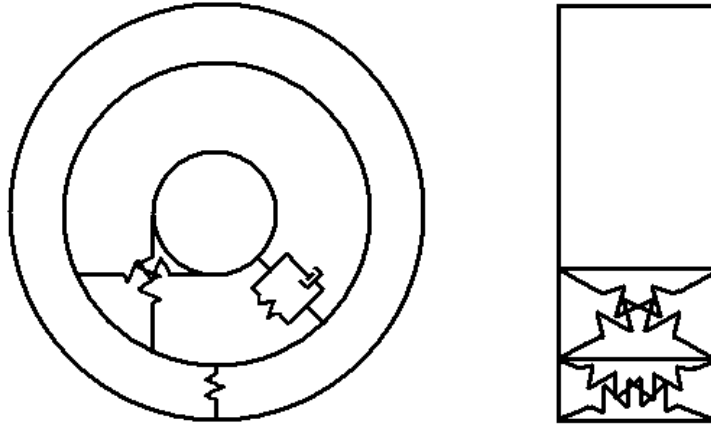


Рис. 8.

[38], когда линеаризованные уравнения записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\omega(t)\dot{v} - \delta^2(v' - u) + \sigma^2(u^{(4)} + v''') = 0, \\ \ddot{v} - 2\omega(t)\dot{u} - \delta^2(v'' - u') - \sigma^2(u''' + v'') = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

(где u, v - радиальное и касательное перемещения, δ, σ - функции размеров и упругих свойств, ω - угловая скорость), так и с учетом геометрической нелинейности [39]. Имеется обзор статей, посвященных вибрациям колес в сложной динамике подвески транспортного средства и их влиянию на силы, передаваемые от шины на корпус транспортного средства [40].

Модели балки и струны широко применяются при изучении управляемости транспортных средств и проблем шимми. *Модель балки* (рис. 8), представляющая шину, была предложена Э. Фиалой (E. Fiala). Автор предложил описывать деформируемую периферию в виде кольца, состоящего из пружинок.

Предполагается, что структура бандажа шины имеет характеристики балки, прикрепленной к эластичной структуре боковых поверхностей [41], а взаимодействие между бандажом и дорогой осуществляется посредством независимых радиальных частичек резины. Эта модель активно используется при изучении управляемости транспортных средств в стационарных режимах движения.

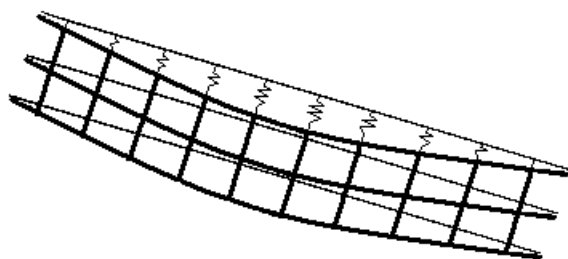


Рис. 9.

Модель струны (рис. 9), представляющую шину, предложил Х.Б. Пачейка (Н.В. Расејка) [42]. В рамках этой модели каркас шины описывается посредством семейства параллельных упруго поддерживаемых натянутых струн. Модель струны эффективно используется при изучении продольной динамики и шимми транспортных средств. Она проще, чем модель балки, т.к. уравнения содержат вторые производные вместо четвертых.

Для описания динамики транспортных средств и малых колебаний их элементов в литературе широко используются модели, содержащие пружины и демпферы. Традиционно характеристики шины представляются с помощью *классической модели*, или, как ее еще называют, «единицы Кельвина» (Kelvin Unit). Эта модель включает пружину и вязкий демпфер, установленные параллельно. Однако эта модель плохо пред-

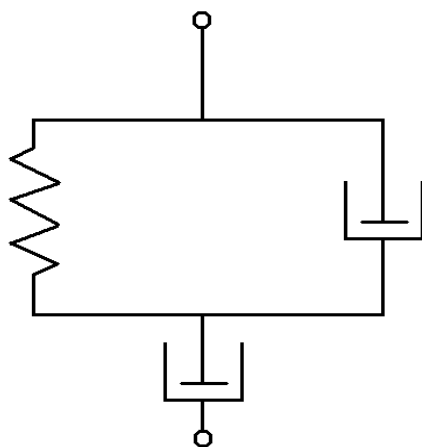


Рис. 10.

сказывает среднеквадратичные ускорения [43]. Дж.А. Лайнс (J.A. Lines) [44, 45] предложил *вязко-пластичную модель* (рис. 10), описывающую боковое поведение шины, которая состоит из вязкого демпфера, моделирующего взаимодействие между шиной и землей, установленную последовательно с «единицей Кельвина», моделирующей каркас шины.

Для описания продольного и бокового поведения шины Д.А. Кролла, Д.Н. Хортон, Р.М. Штейнер (D.A. Crolla, D.N. Horton, R.M. Stayner) [43] использовали упрощенную модель, игнорируя демпфирование каркаса (*модель Максвелла* (рис. 11)), в задаче о вибрациях транспортного средства.

В работе К. Пенга, П.А. Коуэлла, С.Дж. Хисхольма, Дж.А. Лайнса (C. Peng, P.A. Cowell, S.J. Chisholm, J.A. Lines) [46] приведен обзор работ, посвященных изучению поперечной динамики катящегося колеса. Произведено описание и сравнение моделей балки, струны и пружины-демпфера. Помимо этого, предложена новая модель шины, содержащая пружину и ги-

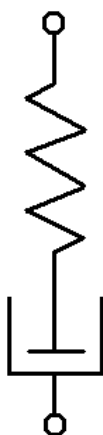


Рис. 11.

стерезисный демпфер (hysteretic damping unit), моделирующие каркас шины, а также содержащую вязкий демпфер, моделирующий взаимодействие шины с дорогой (рис. 12). Результаты сравнены с результатами экспериментов.

М.Г. Поттингер и А.М. Фэрли (M.G. Pottinger и A.M. Fairlie) [47] использовали линейную регрессию при изучении боковой силы, как функции бокового увода и угла развала.

А.И. Маалей, Д.А. Гюнтер, Дж.Р. Эллис (A.Y. Maalej, D.A. Guenther, J.R. Ellis) [48] ввели полином 3-го порядка для представления экспериментальных данных боковой силы, действующей на шину.

Гуо Конг-Юй, Юн-Бо Лю (Guo Kong-Hui, Yun-Bo Liu) [49] использовали экспоненциальный закон для боковой силы при изучении управляемости транспортных средств.

Для внедорожных шин, таких, как, например, сельскохозяйственные, М. МакАллистер (M. McAllister) [50] также ввел экспоненциальную модель, базирующуюся на эксперименталь-

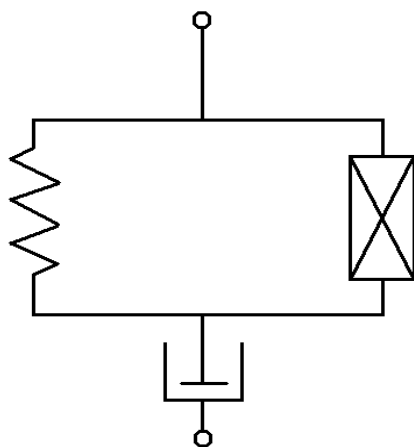


Рис. 12.

ных данных с сельскохозяйственными шинами. Параметры шины были представлены в виде «числа подвижности» (Mobility Number). В работе показано, что когда на шину действует продольная сила (например, торможение или разгон), и она складывается с боковой силой, то поперечные характеристики шины меняются.

В работах П. Люгнера и М. Плехля (P. Lugner, M. Plöchl) [51, 52] предложены «простые» модели транспортных средств, включающие модели шин различной степени сложности, позволяющие разделить продольную, боковую и вертикальную динамику и, тем самым, понять ключевые моменты в поведении транспортного средства.

В.Г. Вильке, М.В. Дворников [53] предложили модель пневматика как системы с бесконечным числом степеней свободы, когда его поверхность представляется деформированной поверхностью тора (в отличие от предложенной ранее модели [10] рассматривается деформация всей поверхности тора по всем

направлениям и определяется форма деформированного пневматика как в зоне контакта, так и на его свободной поверхности). Предполагается, что колесо состоит из диска, имеющего пять степеней свободы (срединная плоскость диска колеса ортогональна плоскости качения), деформируемой боковой поверхности шины и бандажа (гибкая нерастяжимая нить), по части которого происходит контакт без проскальзывания колеса с плоскостью. На основе ряда гипотез найден функционал потенциальной энергии деформаций пневматика в зависимости от деформаций бандажа. Получена полная система уравнений движения по отношению к 23 неизвестным. Исследованы два частных случая качения колеса с уводом и на вираже.

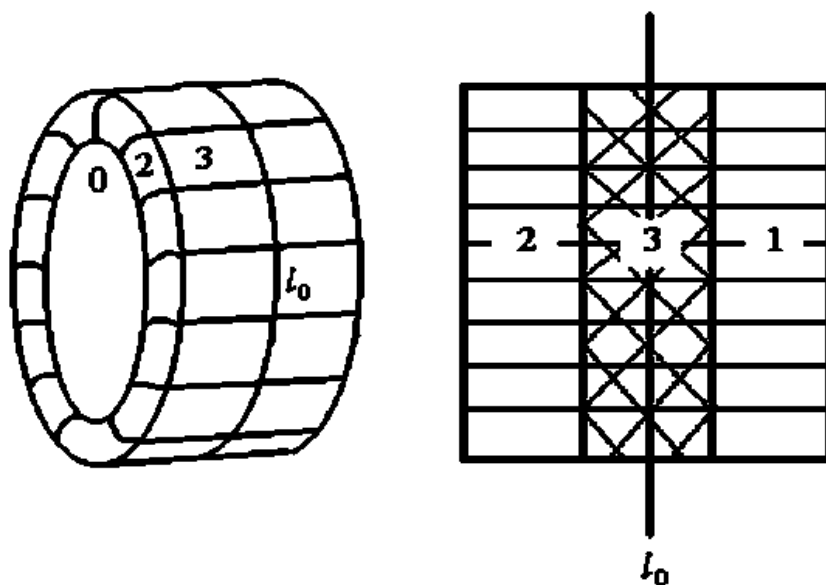


Рис. 13.

Работы В.Г. Вильке и автора [54–56] посвящены проблеме

моделирования одного класса колес с деформируемой периферией, выступающей в качестве модели армированной шины, как механической системы с бесконечным числом степеней свободы, и исследованию методами аналитической динамики стационарных режимов качения колеса по плоскости при наличии проскальзывания и без него. Механическая система состоит из деформируемой и недеформируемой частей. Недеформируемой частью колеса является диск, который представляется абсолютно твердым телом, имеющим шесть степеней свободы. Деформируемой частью является шина, которая в свою очередь разбивается на три части: бандаж, по части которого происходит контакт колеса с плоскостью и две боковые поверхности, соединяющие бандаж с диском (рис. 13). В недеформированном состоянии бандаж представлен круговым цилиндром, а боковые поверхности - частями поверхностей двух торов. Конструкция современных шин автомобиля такова, что через каждую точку бандажа проходит три семейства нерастяжимых нитей, а через каждую точку боковых поверхностей шины одно семейство. К диску колеса приложена внешняя сила \mathbf{F} и внешний момент \mathbf{M} . Колесо катится по плоскости и контактирует с ней по некоторой заранее неизвестной части бандажа. Качение колеса может происходить как без проскальзывания, так и с проскальзыванием в зоне контакта.

На основе анализа конструкции шины сформулирован ряд гипотез, позволяющий найти выражение потенциальной энергии деформаций, зависящей от перемещений срединной линии бандажа. Уравнения движения и условия на скачки в граничных точках зоны контакта получены из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, содержащего помимо лагранжевых координат, неопределенные множители Лагранжа, соответствующие голономным связям. Полная система интегрированных дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных позволяет найти движение колеса, деформации в зоне

контакта и вне ее, реакции связей и зону контакта.

В работе [54] рассматривается качение колеса с деформируемой периферией, выступающей в качестве модели армированной шины, по плоскости без проскальзывания. В модели армированного бандажа учитываются линейные члены от компонент вектора перемещения его точек, а боковая поверхность шины представляется армированной нерастяжимым кордом, и используется гипотеза о постоянстве кривизны каждой нити в деформированном состоянии. Получена полная система уравнений движения по отношению к 26 неизвестным. Исследовано равновесие колеса и стационарный режим качения по прямой с уводом и развалом колеса. Для этих режимов найдены все характеристики деформированного состояния шины, а именно, форма шины вне области контакта и внутри нее, зона контакта шины с плоскостью и ее расположение, а также условия, накладываемые на силы и моменты, приложенные к диску колеса.

В работе [55] предложена аналогичная модель с учетом нелинейных членов в модели бандажа, армированного кордом с нерастяжимыми нитями. Это частный случай предыдущей модели, при котором бандаж в деформированном состоянии представляет собой не просто линейчатую поверхность, а цилиндрическую поверхность с образующей, заданной деформированной плоской срединной линией бандажа, и семейством ортогональных к ней прямых. Перемещения точек боковых поверхностей шины представляются в виде первых членов их разложений в ряды Тейлора с учетом нерастяжимости нитей корда. Сама боковая поверхность моделируется тонкой мембраной, материал которой описывается в рамках модели несжимаемой резины Муни-Ривлина [57]. Получена полная система уравнений движения по отношению к 17 неизвестным. Как и в работе [54] исследуется статика и стационарный режим качения колеса по прямой с постоянной скоростью без проскальзывания.

На основе этой модели в работе [56] исследован режим дви-

жения с проскальзыванием с учетом сил сухого трения в предположении постоянства давления гибкого бандажа на плоскость в зоне контакта. В случае качения колеса с проскальзыванием в зоне контакта бандажа с плоскостью по заранее неизвестному участку бандажа получена полная система уравнений движения по отношению к 17 неизвестным. Критерий перехода от режима качения колеса с проскальзыванием к режиму качения без проскальзывания предложен В.Г. Вильке в работе [58]. Исследованы два простейших режима скольжения заблокированного колеса, а именно, поступательное прямолинейное скольжение колеса и верчение вокруг нормали к опорной плоскости.

В работе автора [59] на базе модели колеса с армированной шиной [55] определяются собственные частоты и собственные формы колебаний свободной или нагруженной шины в окрестности положения равновесия. Для свободной (ненагруженной) шины с закрепленным диском спектр собственных частот и собственных форм находится аналитически. В случае нагруженной шины аналогичная задача решается численно. Результаты этого анализа могут быть использованы при оценке уровня шумов, возникающих при движении транспортного средства по неровной поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 08-01-00600, 08-08-00553).

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса // М.: Наука, 1989, 271 с.
2. Carter F.M. On the stability of running of locomotives // Proc. of the Roy. Soc. of London, 1928, V.121, ser. A 788, P. 585-611.

3. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты // М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 278 с.
4. *Greidanus J.H.* Besturing en stabiliteit van het neuswielonderstel // NLL rapport, V. 1038, 1942, Amsterdam.
5. *Ечеистов Ю.А.* Исследование увода мотоциклетных шин // Вопросы машиноведения (сборник статей), Изд. АН СССР, 1950.
6. *Чудаков Е.А.* Качение автомобильного колеса // М. Машгиз, 1947.
7. *Чудаков Е.А.* Качение автомобильного колеса при наклонном расположении его средней плоскости // ДАН СССР, 1953, Т. 90, N. 3.
8. *Келдыш М.В.* Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Тр. ЦАГИ, 1945, N. 564, 34с.
9. *Неймарк Ю. И. Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем // Наука, 1967.
10. *Метелицын И.И.* Устойчивость движения автомобиля // Укр. мат. журн., 1952, Т. 4, N. 3, С. 323-338; 1953, Т. 5, N. 1, С. 80-92.
11. *Bakker E., Nyborg L., Pacejka H.* Tyre modeling for Use in Vehicle Dynamics Studies // SAE paper 870421, 1987.
12. *Bakker E., Pacejka H.B., Lidner L.* A new tyre model with applications in vehicle dynamics studies // 4th Autotechnologies Conference, Monte Carlo 1989, SAE Paper 890087, P. 83-95.

13. *Pacejka H.B., Sharp R.S.* Shear force development by pneumatic tyres in steady state conditions: a review of modeling aspects // *Vehicle System Dynamics*, Vol. 20, N. 3-4, 1991, P. 121-176.
14. *Pacejka H.B., Bakker E.* The magic formula tyre model // *Proc.1st.Colloq. Tyre Models for Vehicle Dynamics Analysis*. Delft, 1991. Amsterdam: Swits and Zeitlinger, 1993. P.1-18.
15. *Wang Y.Q., Gnadler R., Schieschke R.* Vertical Load-deflection behaviour of a pneumatic tire subjected to slip and camber angles // *Vehicle system dynamics* 25, 1996, P. 137-146.
16. *Levin M.A.* Investigation of features of tyre rolling at non-small velocities on the basis of a simple tyre model with distributed mass periphery // *Vehicle system dynamics* 23 (1994) p. 441-466.
17. *Böhm F.* Mechanik des Gurtelreifens // *Ingenieur Archiv*, 35. 1966. P. 82.
18. *Böhm F.* Grundlagen der Rolldynamik von Luftreifen // *Fahrzeugdynamik-Fachtagung*, 1988 Essen.
19. *Böhm F.* Elastodynamik der Fahrzeugbewegung // *Tagungsband "Fortschritte der Fahrzeugdynamik"* (Hrsg. Stühler, W.), 4 *Fahrzeugdynamik-Fachtagung*, 1990 Essen.
20. *Новожиллов И.В.* Фракционный анализ // *Изд-во Механико-математического факультета МГУ*, 1995.
21. *Fujioka T., Goda K.* Discrete brush tire model for calculating tire forces with large camber angle // *Vehicle system dynamics* 25, 1996, P. 200-216.

22. *Mastinu G., Fainello M.* Study of the Pneumatic Tyre Behaviour on Dry and Rigid Road by Finite Element Method // *Vehicle System Dynamics*, 21, 1992, P. 143-165.
23. *Becker G., Fromm H., Maruhn H.* Schwingungen in Automobilenkungen («shimmy») // *Technischer Verlag G.M.B.H, Berlin*, 1931.
24. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // *ПММ*. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762-767.
25. *Ишлинский А.Ю.* Механика. Идеи, задачи, приложения // М.: Наука, 1985, 624 с.
26. *Ишлинский А.Ю.* Трение качения // *ПММ*, 1938, Т.2, Вып. 2, с. 245-260.
27. *Duvaut G., Lions J.L.* Les inequations en mecanique et en physique // *Dunod. Paris*, 1972, 387 p. (Русс. пер. Дюво Г., Лионс Ж.Л. Неравенства в механике и физике // М.: Наука, 1980, 384 с.).
28. *Kim K.O., Tanner J.A., Noor A.K. and Robinson M.P.* Computational methods for frictionless contact with application to Space Shuttle orbiter nose-gear tires // *NASA technical paper 3073*, May 1991.
29. *Noor A.K., Kim K.O., Tanner J.A.* Analysis of aircraft tires via semi-analytic finite elements // *Finite elements Analysis Des.* 6, P. 217-233, 1990.
30. *Noor A.K., Tanner J.A.* Advances and trends in the development of computational models for tires // *Computers & Structures* 20, P. 517-533, 1985.

31. *Весницкий А.И., Крысов С.В.* Возбуждение колебаний в движущихся упругих элементах конструкций // *Машиноведение*, N. 1, 1983, С. 16-17.
32. *Весницкий А.И., Крысов С.В., Шохин С.Р.* Параметрическое возбуждение импульсов в распределенных механических системах с нестационарными границами // *ПМТФ*, N. 4, 1976, 145 с.
33. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* О некоторых общих свойствах волновых процессов в одномерных механических системах переменной длины // *Прикладная механика*, Т. 11, N. 4, 1975.
34. *Крысов С.В., Филатов Л.В.* Стационарное качение без проскальзывания твердого колеса по эластичной направляющей, лежащей на вязкоупругом грунте // *Изв. вузов*, N. 40, М.: Машиностроение, С. 80-84. 1988.
35. *Kalker J.J.* Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact // *Kluwer Academic Publishers*. Dordrecht, 1990.
36. *Сергеев В.С.* Некоторые вопросы динамики и устойчивости движения колесных пар рельсовых транспортных средств // *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения*. М.: ВЦ им. А.А.Дородницына РАН, 2007. С. 125-136.
37. *Zegelaar P.W.A., Gong S., Pacejka H.B.* Tyre Models for the Study of In-Plane Dynamics // 13th IAVSD Symposium of Vehicles on Roads and Tracks, Chengdu, P.R. of China, August 1993. *Vehicle System Dynamics*. 1993. 23 (Suppl.). P. 324-342.
38. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

39. *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 2. М.: Изд-во Мех.-мат. факультета МГУ, 1997. 160 с.
40. *Willumeit H.-P., Böhm F.* Wheel vibrations and transient tire forces // *Vehicle System Dynamics*. 1995. V. 24. N. 6/7. P. 525-550.
41. *Fiala E.* Seitenkräfte am Rollenden Luftreifen // *Z.VDI* 1954. V. 96. P. 973-979 (Lateral forces on rolling pneumatic tyres, internal translation, Silsoe, U.K.).
42. *Pacejka H.B.* The wheel shimmy phenomenon // Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands. 1966.
43. *Crolla D.A., Horton D.N., Stayner R.M.* Effect of tyre modelling on tractor ride vibration predictions // *J. Agric. Engng Res*. 1990. V. 47. P. 55-77.
44. *Lines J.A.* Ride vibration of agricultural tractors: transfer functions between the ground and the tractor body // *J. Agric. Engng Res*. 1987. V. 37. P. 81-91.
45. *Lines J.A.* The suspension characteristics of agricultural tractor tyres // Ph.D. Thesis, Silsoe College. Cranfield Institute of Technology. U.K. 1991.
46. *Peng C., Cowell P.A., Chisholm C.J., Lines J.A.* Lateral tyre dynamic characteristics // *Journal of Terramechanics*. 1994. V. 31. N. 6. P. 395-414.
47. *Pottinger M.G., Fairlie A.M.* Characteristics of tire force and moment data // *Tire Science and Technology*. TSTCA 1989. V. 17. P. 15-51.

48. *Maalej A.Y., Guenther D.A., Ellis J.R.* Experimental development of tyre force and moment models // *Int. J. Vehicle Design* 1989. V. 10. P. 223-248.
49. *Kong-Hui Guo, Liu Yun-Bo* Simulation of cornering properties of a vehicle over the whole range of working conditions // SAE P-212. Proc. Fourth Int. Pacific Conf. on Automotive Engineering. Melbourne. Australia. 1987. P. 154.1-158.1.
50. *McAllister M.* Forces on undriven angled wheels // Proc. 8th Int. Conf. of International Society for Terrain-Vehicle Systems. Cambridge. U.K. 1984.
51. *Lugner P., Plöchl M.* Dynamic traction limitations of a passenger car with 4-wheel drive // *International Journal of Vehicle Design* 2001. V. 25. N. 3. P. 189-197.
52. *Lugner P., Plöchl M.* Modelling in vehicle dynamics of automobiles // *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (invited) 2004. V. 84. N. 4. P. 219-236.
53. *Вильке В.Г., Дворников М.В.* Качение колеса с пневматиком по плоскости // *ПММ*. 1998. Т.62. Вып. 3. С. 393-404.
54. *Вильке В.Г., Кожевников И.Ф.* Качение колеса с армированной шиной по плоскости без проскальзывания // *ПММ*. 2001. Т. 65. Вып. 6. С. 944-957.
55. *Вильке В.Г., Кожевников И.Ф.* Об одной модели колеса с армированной шиной // *Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., механ.* 2004. Вып. 4. С.37-45.
56. *Вильке В.Г., Кожевников И.Ф.* Качение колеса с армированной шиной по плоскости с проскальзыванием // *ПММ*. 2004. Т.68. Вып. 6. С. 1022-1036.

57. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред // М.: Мир, 1976, 464 с.
58. *Вильке В.Г.* Условия качения колеса с армированной шиной без проскальзывания // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., механ. 2002. Вып. 5. С.38-42.
59. *Кожевников И.Ф.* Колебания свободной и нагруженной шины // ПММ. 2006. Т.70. Вып. 2. С. 250-256.

УДК 531.36

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМЫ В.В. КОЗЛОВА ДЛЯ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ В НЕКОТОРЫХ
ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Н.А. Гусева, А.С. Кулешов

В работе В.В. Козлова [1] сформулированы необходимые и достаточные условия несуществования у гамильтоновой системы дополнительного первого интеграла, квадратичная часть которого была бы функционально независима с квадратичной частью функции Гамильтона. В данной работе методом Козлова доказывается несуществование дополнительного аналитического интеграла в двух задачах механики: в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и в задаче о движении плоского тяжелого двузвенного маятника.

Ключевые слова: гамильтонова система, нормальная форма, неинтегрируемость, тело с неподвижной точкой, двойной маятник.

1. Введение. Теорема об отсутствии аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем. В 1976 году В.В. Козлов в работе [1] доказал теорему, дающую достаточные условия несуществования у гамильтоновой системы аналитического по каноническим переменным первого интеграла, независимого от функции Гамильтона H . Ниже приводится постановка задачи в обозначениях работы [1] и формулировка соответствующей теоремы.

Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad i = 1 \dots n, \quad n \geq 2 \quad (1.1)$$

с функцией Гамильтона $H(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, \alpha)$, аналитически зависящей от переменных (\mathbf{u}, \mathbf{v}) и параметра $\alpha \in (a, b)$. Предположим, что при всех α точка $u_i = v_i = 0$, ($i = 1, \dots, n$) – положение равновесия системы уравнений (1.1). Функцию H можно представить в следующем виде:

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + \dots,$$

где $H^{(s)}$ – однородная форма степени s по переменным (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Коэффициенты этого разложения аналитичны по параметру α .

Здесь и всюду ниже предполагается, что при всех $\alpha \in (a, b)$ собственные числа линеаризованных канонических уравнений чисто мнимы и различны. В этом случае существует аналитическое по α каноническое преобразование $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, такое, что в новых переменных:

$$H^{(2)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2)$$

В координатах $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ снова

$$H = H^{(2)} + H^{(m)} + H^{(m+1)} + \dots; \quad m \geq 3, \quad H^{(m)} \neq 0.$$

Положим $\xi_i = \sqrt{2I_i} \sin \varphi_i$, $\eta_i = \sqrt{2I_i} \cos \varphi_i$, ($i = 1 \dots n$). Тогда

$$H^{(m)} = \sum_{0 \leq |m_1| + \dots + |m_n| \leq m} B_{m_1 \dots m_n}(I_1, \dots, I_n, \alpha) \times \\ \times \exp(i(m_1 \varphi_1 + \dots + m_n \varphi_n)).$$

Коэффициенты $B_{m_1 \dots m_n}$ аналитичны в области $D_\varepsilon \times (a, b)$;

$$D_\varepsilon = \{I_1^2 + \dots + I_n^2 \leq \varepsilon; I_i \neq 0, i = 1 \dots n\},$$

где ε – малое положительное число. Справедлива

Теорема Козлова. Пусть система уравнений (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

1. частоты линеаризованных уравнений λ_i не связаны тождественным по α соотношением

$$\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i = 0$$

с целыми m_i , такими, что

$$0 < \sum_{i=1}^n |m_i|;$$

2. при некотором $\alpha = \bar{\alpha}$ существуют $n - 1$ линейно-независимых целочисленных векторов $(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_n)$, таких, что

$$0 < \sum_{i=1}^n |\bar{m}_i| \leq m, \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_i \lambda_i = 0, \quad B_{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_n} \neq 0.$$

Тогда канонические уравнения (1.1) не имеют независимого от H первого интеграла, аналитического по каноническим переменным и параметру $\alpha \in (a, b)$.

В качестве примера применения данной теоремы в работе [1] была рассмотрена плоская ограниченная круговая

задача трех тел. Уравнения движения пробного тела в равномерно вращающейся вместе с двумя остальными телами системе координат имеют вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - F(x_1, x_2),$$

$$F = \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x_1 + \mu)^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2}}.$$

Эта система имеет положения равновесия в точках

$$x_1 = \frac{1}{2} - \mu, \quad x_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_1 = y_2 = 0,$$

которые называются лагранжевыми решениями или треугольными точками либрации. В результате применения к данной задаче сформулированной теоремы, было доказано

Утверждение. *Канонические уравнения (1.2) не имеют в окрестности точек либрации первого интеграла, независимого от H , аналитического по каноническим переменным и параметру μ .*

Преимущество теоремы Козлова состоит в отсутствии предварительных ограничительных предположений, касающихся конструктивных параметров системы. Это преимущество в существенной мере компенсирует то обстоятельство, что дополнительный интеграл должен принадлежать классу аналитических функций, квадратичные части которых функционально независимы с квадратичными частями функции Гамильтона.

В данной работе теорема Козлова применяется для доказательства несуществования аналитического по каноническим переменным первого интеграла в двух задачах механики: задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае, когда эллипсоид инерции тела симметричен, а центр тяжести находится в экваториальной плоскости этого эллипсоида, и в задаче о движении двойного маятника. При проведении большинства вычислений использовалась программа MAPLE 7.

2. Неинтегрируемость в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В общем случае задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой имеет три степени свободы. Ее уравнения движения допускают два аналитических интеграла: энергии и площадей. Рассмотрим частный случай данной задачи, когда эллипсоид инерции тела симметричен, а центр тяжести находится в экваториальной плоскости этого эллипсоида. Среди таких случаев находится наибольшее число интегрируемых.

В стандартных обозначениях функция Гамильтона задачи имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{p_\theta^2}{A} + \frac{p_\varphi^2}{C} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} \right] + \mu \sin \theta \sin \varphi, \quad \mu > 0. \quad (2.1)$$

Единицы измерения всегда можно подобрать так, что $A = \mu = 1$. Координата p_ψ есть интеграл площадей. Уравнения движения тела имеют гамильтонов вид с функцией Гамильтона (2.1), в которую p_ψ входит как параметр. Будем считать постоянной p_ψ именно тем параметром, о котором шла речь в формулировке теоремы Козлова (ср. [2,3]). Покажем, что уравнения движения тела не имеют,

кроме H , другого независимого интеграла, аналитического по p_ψ .

При любом значении p_ψ точка

$$(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) = \left(0, 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) -$$

положение равновесия приведенной системы. Положим $p_\theta = p_1$, $p_\varphi = p_2$, $\theta = \pi/2 + q_1$, $\varphi = -\pi/2 + q_2$. Введем также обозначения: $p_\psi^2 = x$, $C^{-1} = y$. Тогда (x, y) изменяются в области $R_+^2 = \{x, y : x > 0, y > 0\}$ и разложение функции Гамильтона (2.1) в ряд Маклорена дает:

$$H = H^{(2)} + H^{(4)} + \dots,$$

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{y}{2}p_2^2 + \sqrt{x}p_2q_1 + \frac{(1+x)}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2,$$

$$H^{(4)} = \frac{5}{6}\sqrt{x}p_2q_1^3 + \frac{1}{2}p_2^2q_1^2 - \frac{1}{4}q_1^2q_2^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{8}\right)q_1^4 - \frac{1}{24}q_2^4.$$

Уравнения движения системы с гамильтонианом $H^{(2)}$ имеют вид линеаризованных уравнений движения исходной системы

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{x} & -(x+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & \sqrt{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Характеристическое уравнение линейной системы (2.2) записывается как

$$\lambda^4 + (1+x+y)\lambda^2 + y(1+x) - x = 0. \quad (2.3)$$

Его корни чисто мнимы, если

$$y > \frac{x}{1+x}.$$

Обозначим через E подобласть R_+^2 , где выполняется это неравенство. Для применения теоремы Козлова найдем условие, при котором отношение частот равно трем.

Уравнение (2.3) – биквадратное. Следовательно, если отношение частот равно трем, то отношение квадратов частот должно равняться девяти. Это отношение имеет место при выполнении следующего условия на параметры x и y

$$4(1+x+y) = 5\sqrt{1+6x-2y+x^2-2xy+y^2},$$

которое может быть представлено в виде

$$I: \quad 9x^2 - 82xy + 9y^2 + 118x - 82y + 9 = 0. \quad (2.4)$$

Это – уравнение гиперболы; ее ветви при $x > 0$, $y > 0$ лежат целиком в E (Рис. 1).

Из неравенства треугольника для главных центральных моментов инерции следует, что $y \geq 1/2$. Для фиксированного $y_0 \geq 1/2$ существует $x_0 > 0$, такое, что точка (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению (2.4).

Пусть (a, b) – малый интервал изменения параметра x , включающий точку x_0 . При $x \in (a, b)$, $y = y_0$ корни характеристического уравнения чисто мнимы и различны, причем при $x = x_0$ выполнено условие $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$. Остается выяснить, когда отличен от нуля вековой коэффициент $B_{1,-3}$.

Для вычисления коэффициента $B_{1,-3}$ сделаем каноническую замену переменных $(q_1, p_1, q_2, p_2) \rightarrow (Q_1, P_1, Q_2, P_2)$

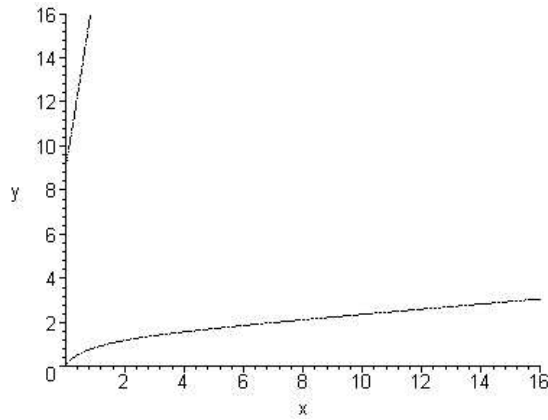


Рис. 1.

такую, что в новых переменных квадратичная часть $H^{(2)}$ функции Гамильтона представляется в виде

$$H^{(2)} = \frac{A_1}{2}P_1^2 + \frac{B_1}{2}Q_1^2 + \frac{A_2}{2}P_2^2 + \frac{B_2}{2}Q_2^2$$

где A_i и B_i , ($i = 1, 2$) – коэффициенты, подлежащие определению.

Искомая замена линейна по переменным Q_1, P_1, Q_2, P_2 . Представим ее в наиболее общем виде как

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2 + \xi_1 Q_1 + \eta_1 Q_2, \\ p_2 &= \alpha_2 P_1 + \beta_2 P_2 + \xi_2 Q_1 + \eta_2 Q_2, \\ q_1 &= \alpha_3 P_1 + \beta_3 P_2 + \xi_3 Q_1 + \eta_3 Q_2, \\ q_2 &= \alpha_4 P_1 + \beta_4 P_2 + \xi_4 Q_1 + \eta_4 Q_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Данная замена должна удовлетворять двум свойствам:

- 1) она должна быть унивалентной канонической заменой и

- 2) при подстановке величин (2.5) в выражение $H^{(2)}$ коэффициенты при всех смешанных произведениях должны обращаться в нуль.

В силу критерия каноничности в форме

$$\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \sum_{i=1}^n p_i dq_i = -dF$$

замена переменных (2.5) унивалентна и канонична, если выполнены условия

$$\begin{aligned} \beta_1\alpha_3 + \beta_2\alpha_4 - \beta_3\alpha_1 - \beta_4\alpha_2 &= 0, \\ \xi_1\alpha_3 + \xi_2\alpha_4 - \xi_3\alpha_1 - \xi_4\alpha_2 + 1 &= 0, \\ \eta_1\alpha_3 + \eta_2\alpha_4 - \eta_3\alpha_1 - \eta_4\alpha_2 &= 0, \\ \xi_1\beta_3 + \xi_2\beta_4 - \xi_3\beta_1 - \xi_4\beta_2 &= 0, \\ \eta_1\beta_3 + \eta_2\beta_4 - \eta_3\beta_1 - \eta_4\beta_2 + 1 &= 0, \\ \eta_1\xi_3 + \eta_2\xi_4 - \eta_3\xi_1 - \eta_4\xi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Условия обращения в нуль коэффициентов при всех шести смешанных членах $P_1P_2, P_1Q_1, P_1Q_2, P_2Q_1, P_2Q_2, Q_1Q_2$ в функции Гамильтона $H^{(2)}$, записанной в переменных Q_1, P_1, Q_2, P_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_1\eta_1 + \xi_3\eta_3 + \xi_4\eta_4 + \sqrt{x}(\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2) + x\xi_3\eta_3 + y\xi_2\eta_2 &= 0, \\ \alpha_1\xi_1 + \alpha_3\xi_3 + \alpha_4\xi_4 + \sqrt{x}(\alpha_2\xi_3 + \alpha_3\xi_2) + x\alpha_3\xi_3 + y\alpha_2\xi_2 &= 0, \\ \beta_1\xi_1 + \beta_3\xi_3 + \beta_4\xi_4 + \sqrt{x}(\beta_2\xi_3 + \beta_3\xi_2) + x\beta_3\xi_3 + y\beta_2\xi_2 &= 0, \\ \alpha_1\eta_1 + \alpha_3\eta_3 + \alpha_4\eta_4 + \sqrt{x}(\alpha_2\eta_3 + \alpha_3\eta_2) + x\alpha_3\eta_3 + y\alpha_2\eta_2 &= 0, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 + \sqrt{x}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + x\alpha_3\beta_3 + y\alpha_2\beta_2 &= 0, \\ \beta_1\eta_1 + \beta_3\eta_3 + \beta_4\eta_4 + \sqrt{x}(\beta_2\eta_3 + \beta_3\eta_2) + x\beta_3\eta_3 + y\beta_2\eta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, шестнадцать величин α_i, β_i, ξ_i и $\eta_i, i = 1, \dots, 4$ связаны в общей сложности двенадцатью нелинейными соотношениями (2.6), (2.7). Для того, чтобы число

уравнений равнялось числу неизвестных, предположим с самого начала, что

$$\beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \eta_3 = 0, \quad \xi_4 = 0.$$

Решение полученной системы двенадцати уравнений (2.6), (2.7) относительно двенадцати неизвестных получено при помощи программы символьных вычислений MAPLE 7. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_4 = 0, \quad \xi_2 = \Delta\xi_3, \\ \alpha_1 = \frac{\sqrt{x}}{\xi_3(2\sqrt{x}+(y-1-x)\Delta)}, \quad \eta_1 = \frac{\Delta\sqrt{x}}{\beta_2(2\sqrt{x}+(y-1-x)\Delta)}, \\ \beta_3 = -\frac{\beta_2(\sqrt{x}+(y-1-x)\Delta)}{\Delta\sqrt{x}}, \quad \alpha_4 = -\frac{\sqrt{x}+(y-1-x)\Delta}{\xi_3\Delta(2\sqrt{x}+(y-1-x)\Delta)}, \\ \eta_4 = \frac{\sqrt{x}}{\beta_2(2\sqrt{x}+(y-1-x)\Delta)}, \end{aligned}$$

где β_2 и ξ_3 – свободные параметры, а Δ – положительный корень квадратного уравнения

$$\sqrt{x}Z^2 + (x+1-y)Z - \sqrt{x} = 0$$

Пусть свободные параметры принимают следующие значения

$$\beta_2 = \frac{\Delta\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+(y-1-x)\Delta)}, \quad \xi_3 = 1.$$

Тогда искомая замена (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} p_1 = \frac{1}{1+\Delta^2}P_1 + \frac{\Delta^2}{1+\Delta^2}Q_2, \quad p_2 = \frac{1}{\Delta}P_2 + \Delta Q_1, \\ q_1 = Q_1 - P_2, \quad q_2 = \frac{\Delta}{1+\Delta^2}(Q_2 - P_1) \end{aligned} \tag{2.8}$$

В переменных Q_1, P_1, Q_2, P_2 форма $H^{(2)}$ запишется следующим образом:

$$H^{(2)} = \frac{A_1}{2}P_1^2 + \frac{B_1}{2}Q_1^2 + \frac{A_2}{2}P_2^2 + \frac{B_2}{2}Q_2^2,$$

$$A_1 = \frac{1}{1+\Delta^2}, \quad B_1 = \frac{\Delta^2}{1+\Delta^2},$$

$$A_2 = \frac{\Delta^2 y - 2\Delta\sqrt{x} + (1+x)\Delta^2}{\Delta^2} = \frac{(1+\Delta^2)(y - \sqrt{x}\Delta)}{\Delta^2},$$

$$B_1 = \Delta^2 y + 2\Delta\sqrt{x} + 1 + x = (1+\Delta^2) \left(y + \frac{\sqrt{x}}{\Delta} \right).$$

Перейдем теперь к переменным «действие-угол» $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ по формулам

$$Q_1 = i\sqrt{\frac{I_1}{2}}\sqrt{\frac{A_1}{B_1}}(e^{-i\varphi_1} - e^{i\varphi_1}), \quad P_1 = \sqrt{\frac{I_1}{2}}\sqrt{\frac{B_1}{A_1}}(e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}),$$

$$Q_2 = i\sqrt{\frac{I_2}{2}}\sqrt{\frac{A_2}{B_2}}(e^{-i\varphi_2} - e^{i\varphi_2}), \quad P_2 = \sqrt{\frac{I_2}{2}}\sqrt{\frac{B_2}{A_2}}(e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2}).$$

Здесь i – мнимая единица. В новых переменных форма $H^{(4)}$ принимает вид

$$H^{(4)} = \sum_{0 \leq |m_1| + |m_2| \leq 4} B_{m_1 m_2} e^{i(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)}.$$

Для интегрируемости необходимо обращение в нуль коэффициента $B_{1,-3}$ в разложении функции $H^{(4)}$, выписанной в новых переменных. Вычислим коэффициент $B_{1,-3}$

в явном виде. Заметим, что экспонента $\exp(i(\varphi_1 - 3\varphi_2))$ может встретиться только в следующих выражениях

$$P_1P_2^3, P_1P_2^2Q_2, P_1P_2Q_2^2, P_1Q_2^3, \\ Q_1P_2^3, Q_1P_2^2Q_2, Q_1P_2Q_2^2, Q_1Q_2^3$$

Это замечание существенно упрощает процесс вычисления коэффициента $B_{1,-3}$. Условие равенства нулю данного коэффициента можно записать в виде

$$5\Delta^3\sqrt{x} - 7\Delta^2 + 8x\Delta^2 - 18\Delta\sqrt{x} + 6 + 3y = \\ = \sqrt{y + xy - x}(y - \Delta\sqrt{x} - 3\Delta^2)$$

Дальнейшие упрощения данного равенства опираются на явный вид выражения Δ

$$\Delta = \frac{(y - x - 1) + \sqrt{(x + 1 - y)^2 + 4x}}{2\sqrt{x}}$$

а также на то соображение, что из условия (2.4) следует

$$64(y + xy - x) = 9((x + 1 - y)^2 + 4x).$$

Оказывается, что условие равенства нулю коэффициента $B_{1,-3}$, выраженное только через параметры x и y , имеет вид

$$II : (18x + 49y - 105)(x + 1 - y)^2 + 128x^2 + 60xy - 28x = \\ = [(18x + 49y - 105)(x + 1 - y) + 6xy + 86x]\sqrt{(x + 1 - y)^2 + 4x}. \quad (2.9)$$

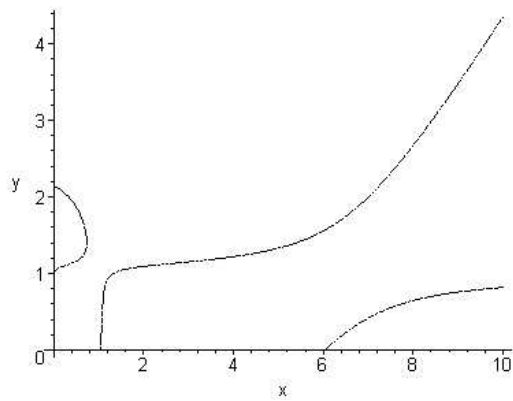


Рис. 2.

График кривой II приведен на Рис. 2.

На Рис.3 изображены обе кривые. Видно, что они пересекаются всего в двух точках. Совместное решение системы двух уравнений *I*. и *II*. с помощью программы MAPLE 7 показывает, что этими точками будут $(4/3, 1)$ и $(7, 2)$. Данным решениям отвечают интегрируемые случаи кинетической симметрии и Ковалевской.

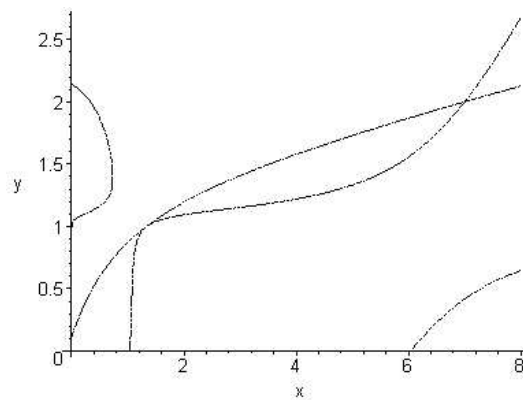


Рис. 3.

Таким образом, применение теоремы Козлова к задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в случае, когда эллипсоид инерции тела симметричен, а центр тяжести находится в экваториальной плоскости этого эллипсоида, приводит к следующему результату.

Теорема. *Канонические уравнения с гамильтонианом (2.1) допускают третий независимый аналитический интеграл, находящийся в инволюции с интегралом площадей, только в случае кинетической симметрии ($A = C$) и в случае Ковалевской ($A = 2C$).*

Замечание. Формально говоря, итоговые результаты данного раздела имеются в работах [2,3]. Однако в этих работах опущены промежуточные рассуждения, что не позволяет в полной мере следить за ходом мысли их автора.

3. Неинтегрируемость задачи о движении тяжелого двойного математического маятника. Задача о движении двойного маятника (в частности, двойного математического маятника) давно является предметом исследования специалистов по вопросам интегрируемости и неинтегрируемости гамильтоновых систем. Численные эксперименты показывают, что рассматриваемая система демонстрирует сложное, хаотическое поведение. Строгие результаты о неинтегрируемости уравнений движения были получены в [4] при достаточно ограничительных предположениях относительно распределения масс в звеньях, которые рассматривались как твердые тела. Для данной задачи расщепление сепаратрис изучалось также в работах [5, 6]. В них при определенных ограничениях на распределения масс хаотическое поведение было обнаружено на высоких уровнях интеграла энергии.

Различные проблемы динамики тяжелого двухзвенно-

го маятника, включая экспоненциально малое расщепление сепаратрис, изучались численно и аналитически в [7-10].

В данном параграфе задача несуществования дополнительного аналитического интеграла, независимого с функцией H исследуется при помощи теоремы Козлова. Отметим, что попытка такого исследования была предпринята ранее в [11]. Однако работа [11] написана довольно кратко, что не позволяет определить все детали предложенного в ней нормализующего преобразования и, тем самым, дало повод для данного исследования.

Рассмотрим тяжелый двузвенный математический маятник, совершающий движение вокруг неподвижной точки O в вертикальной плоскости, проходящей через эту точку. Предположим, что длина звена OA равна l_1 , а масса, сосредоточенная в точке A , равна m_1 . Также предположим, что длина звена AB равна l_2 , а масса, сосредоточенная в точке B , равна m_2 . Отклонения звеньев от нисходящей вертикали измеряются, соответственно, углами φ_1 и φ_2 .

Движение может быть описано уравнениями Лагранжа с функцией Лагранжа $\mathfrak{L} = T - V$, где

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2] -$$

кинетическая энергия, а

$$V = - (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2 -$$

потенциальная энергия системы.

Вводя безразмерные параметры $L = l_1/l_2$, $M = m_1/m_2$, а также выбирая соответствующим образом масштаб вре-

мени, преобразуем функцию Лагранжа к виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{1}{2} [(M+1)L^2\dot{\varphi}_1^2 + 2L\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2] + \\ &+ (M+1)L\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Уравнения движения допускают интеграл энергии

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{\varphi}_i} \dot{\varphi}_i - \mathfrak{S} = T + V.$$

Для их интегрирования недостает одного дополнительного интеграла.

Перейдем к гамильтонову описанию задачи. При помощи преобразования Лежандра построим функцию Гамильтона данной системы:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2(M+\sin^2(\varphi_2-\varphi_1))} \left[\frac{p_1^2}{L^2} + (M+1)p_2^2 \right] - \\ &- \frac{\cos(\varphi_2-\varphi_1)p_1p_2}{L(M+\sin^2(\varphi_2-\varphi_1))} - (M+1)L\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Чтобы применить теорему Козлова, разложим функцию Гамильтона в окрестности наинизшего положения равновесия. Пусть $(p_1, \varphi_1, p_2, \varphi_2)$ – импульсы и соответствующие им координаты. В этих переменных наинизшее положение равновесия имеет вид:

$$p_1^0 = 0, p_2^0 = 0, \varphi_1^0 = 0, \varphi_2^0 = 0.$$

Сохраняя для импульсов прежние обозначения и обозначая $\varphi_1 = q_1, \varphi_2 = q_2$, имеем

$$H = H^{(2)} + H^{(4)} + \dots,$$

причем слагаемое $H^{(3)}$ и все другие слагаемые нечетной степени отсутствуют, а

$$H^{(2)} = \frac{p_1^2}{2ML^2} - \frac{p_1p_2}{LM} + \frac{(M+1)}{2M}p_2^2 + \frac{L(M+1)}{2}q_1^2 + \frac{q_2^2}{2},$$

$$H^{(4)} = -\frac{(q_1 - q_2)^2}{2M^2} \left[\frac{p_1^2}{L^2} - \frac{(M+2)p_1p_2}{L} + (M+1)p_2^2 \right] -$$

$$-\frac{(M+1)L}{24}q_1^4 - \frac{q_2^4}{24}.$$

Уравнения движения системы с гамильтонианом $H^{(2)}$ имеют вид линеаризованных уравнений движения исходной системы

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -L(M+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{L^2M} & -\frac{1}{LM} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{LM} & \frac{M+1}{M} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Характеристическое уравнение линейной системы (3.1) записывается как

$$LM\lambda^4 + (L+1)(M+1)\lambda^2 + M+1 = 0. \quad (3.2)$$

Очевидно, что поскольку коэффициенты при всех степенях в данном характеристическом уравнении положительны, то его корни являются чисто мнимыми. Для применения теоремы Козлова найдем условие, при котором

отношение частот равно трем. Собственные частоты системы имеют вид:

$$\lambda_1^\pm = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{b}}{2LM}}, \quad \lambda_2^\pm = \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{b}}{2LM}},$$

$$a = (L+1)(M+1), \quad b = (M+1) [(L+1)^2 + M(L-1)^2].$$

Отношение частот малых колебаний λ_1/λ_2 равно трем, если выполнено условие

$$I: \quad M = -\frac{9(L+1)^2}{(L-9)(9L-1)}. \quad (3.3)$$

Так как отношение масс не должно быть отрицательным, то это соотношение имеет физический смысл только когда L изменяется в интервале:

$$1/9 < L < 9.$$

Остается выяснить, когда отличен от нуля вековой коэффициент $B_{1,-3}$. Для вычисления этого коэффициента сделаем каноническую замену переменных $(q_1, p_1, q_2, p_2) \rightarrow (Q_1, P_1, Q_2, P_2)$ такую, что в новых переменных квадратичная часть $H^{(2)}$ функции Гамильтона примет вид

$$H^{(2)} = \frac{A_1}{2} P_1^2 + \frac{B_1}{2} Q_1^2 + \frac{A_2}{2} P_2^2 + \frac{B_2}{2} Q_2^2,$$

где A_i и B_i , ($i = 1, 2$) – коэффициенты, подлежащие определению.

Искомая замена линейна по переменным Q_1, P_1, Q_2, P_2 и в наиболее общем виде представима как

$$\begin{aligned}
p_1 &= \alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2 + \xi_1 Q_1 + \eta_1 Q_2, \\
p_2 &= \alpha_2 P_1 + \beta_2 P_2 + \xi_2 Q_1 + \eta_2 Q_2, \\
q_1 &= \alpha_3 P_1 + \beta_3 P_2 + \xi_3 Q_1 + \eta_3 Q_2, \\
q_2 &= \alpha_4 P_1 + \beta_4 P_2 + \xi_4 Q_1 + \eta_4 Q_2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Она будет унивалентной и канонической при выполнении условий (2.6). Кроме того, условия обращения в нуль коэффициентов при имеющихся шести смешанных членах $P_1 P_2, P_1 Q_1, P_1 Q_2, P_2 Q_1, P_2 Q_2, Q_1 Q_2$ в функции Гамильтона $H^{(2)}$, записанной в переменных Q_1, P_1, Q_2, P_2 , имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M} \left(\frac{\alpha_1}{L} - \alpha_2 \right) \left(\frac{\xi_1}{L} - \xi_2 \right) + L (M+1) \alpha_3 \xi_3 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_4 \xi_4 &= 0, \\
\frac{1}{M} \left(\frac{\alpha_1}{L} - \alpha_2 \right) \left(\frac{\eta_1}{L} - \eta_2 \right) + L (M+1) \alpha_3 \eta_3 + \alpha_2 \eta_2 + \alpha_4 \eta_4 &= 0, \\
\frac{1}{M} \left(\frac{\alpha_1}{L} - \alpha_2 \right) \left(\frac{\beta_1}{L} - \beta_2 \right) + L (M+1) \alpha_3 \beta_3 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_4 \beta_4 &= 0, \\
\frac{1}{M} \left(\frac{\beta_1}{L} - \beta_2 \right) \left(\frac{\xi_1}{L} - \xi_2 \right) + L (M+1) \beta_3 \xi_3 + \beta_2 \xi_2 + \beta_4 \xi_4 &= 0, \\
\frac{1}{M} \left(\frac{\beta_1}{L} - \beta_2 \right) \left(\frac{\eta_1}{L} - \eta_2 \right) + L (M+1) \beta_3 \eta_3 + \beta_2 \eta_2 + \beta_4 \eta_4 &= 0, \\
\frac{1}{M} \left(\frac{\xi_1}{L} - \xi_2 \right) \left(\frac{\eta_1}{L} - \eta_2 \right) + L (M+1) \xi_3 \eta_3 + \xi_2 \eta_2 + \xi_4 \eta_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Таким образом, шестнадцать величин α_i, β_i, ξ_i и $\eta_i, i = 1 \dots 4$ стеснены в общей сложности двенадцатью соотношениями. Для того, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных, предположим, что

$$\eta_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0.$$

Решение полученной системы двенадцати уравнений (2.6), (3.5) относительно двенадцати неизвестных найдено при помощи программы символьных вычислений MAPLE 7. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_1 = \Delta\beta_2, \\ \alpha_1 = -\frac{\alpha_2 L (M+1)}{\Delta}, \\ \xi_4 = \frac{\Delta L - \Delta + L}{\alpha_2 (2L - \Delta + \Delta L)}, \quad \eta_4 = \frac{L}{\beta_2 (2L - \Delta + \Delta L)}, \\ \xi_3 = -\frac{\Delta}{\alpha_2 (M+1)(2L - \Delta + \Delta L)}, \quad \eta_3 = \frac{\Delta}{\beta_2 (M+1)(2L - \Delta + \Delta L)}, \end{aligned}$$

где α_2 и β_2 – свободные параметры, а Δ – положительный корень квадратного уравнения

$$Z^2 - (L - 1)(M + 1)Z - L(M + 1) = 0. \quad (3.6)$$

Будем считать, что свободные параметры принимают следующие значения

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 1.$$

Тогда искомая замена (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -\frac{L(M+1)}{\Delta}P_1 + \Delta P_2, \quad p_2 = P_1 + P_2, \\
 q_1 &= \frac{\Delta}{(M+1)(2L-\Delta+\Delta L)}(Q_2 - Q_1), \\
 q_2 &= \left(1 - \frac{L}{2L-\Delta+\Delta L}\right)Q_1 + \frac{L}{2L-\Delta+\Delta L}Q_2.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

В переменных Q_1, P_1, Q_2, P_2 форма $H^{(2)}$ запишется как

$$\begin{aligned}
 H^{(2)} &= \frac{A_1}{2}P_1^2 + \frac{B_1}{2}Q_1^2 + \frac{A_2}{2}P_2^2 + \frac{B_2}{2}Q_2^2, \\
 A_1 &= \frac{M+(\Delta+1)^2}{M(L-\Delta+\Delta L)}, \quad B_1 = \frac{L-\Delta+\Delta L}{2L-\Delta+\Delta L}, \\
 A_2 &= \frac{ML^2+(\Delta-L)^2}{ML^2}, \quad B_2 = \frac{L}{2L-\Delta+\Delta L}.
 \end{aligned}$$

Перейдем теперь к переменным «действие-угол» (I, φ) по формулам:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= i\sqrt{\frac{I_1}{2}}\sqrt{\frac{A_1}{B_1}}(e^{-i\varphi_1} - e^{i\varphi_1}), \quad P_1 = \sqrt{\frac{I_1}{2}}\sqrt{\frac{B_1}{A_1}}(e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}), \\
 Q_2 &= i\sqrt{\frac{I_2}{2}}\sqrt{\frac{A_2}{B_2}}(e^{-i\varphi_2} - e^{i\varphi_2}), \quad P_2 = \sqrt{\frac{I_2}{2}}\sqrt{\frac{B_2}{A_2}}(e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2}).
 \end{aligned}$$

Здесь i - мнимая единица. В новых переменных форма $H^{(4)}$ принимает вид:

$$H^{(4)} = \sum_{0 \leq |m_1| + |m_2| \leq 4} B_{m_1 m_2} e^{i(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)}.$$

Для интегрируемости необходимо обращение в нуль коэффициента $B_{1,-3}$ в разложении функции $H^{(4)}$, выписанной в переменных $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$. Вычислим коэффициент $B_{1,-3}$ в явном виде. Заметим, что экспонента $e^{i(\varphi_1 - 3\varphi_2)}$ может встретиться только в следующих выражениях:

$$P_1 P_2^3, P_1 P_2^2 Q_2, P_1 P_2 Q_2^2, P_1 Q_2^3, Q_1 P_2^3, Q_1 P_2^2 Q_2, Q_1 P_2 Q_2^2, Q_1 Q_2^3.$$

Это замечание существенно упрощает процесс вычисления коэффициента $B_{1,-3}$. Условие равенства нулю этого коэффициента можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{6(\Delta - L)(LM + LM\Delta - M\Delta + L + L\Delta)(\Delta - L(M + 1)) A_1}{M^2 L^2 (M + 1) B_1} - \\ & - \frac{3(\Delta - L(M + 1))(L - 1)}{ML} \sqrt{\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}} = \\ & = \frac{L(\Delta L - \Delta + L)(\Delta + L(M + 1))}{(M + 1)(2L - \Delta + \Delta L)^2} \cdot \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

После подстановки в (3.7) выражений для A_1, A_2, B_1, B_2 и громоздких упрощающих преобразований, основанных, в частности, на использовании соотношения (3.3), условие равенства нулю коэффициента $B_{1,-3}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} & - \frac{3(\Delta - L(M + 1))(L - 1)(M + 1)}{ML} \times \\ & \times \sqrt{\frac{(\Delta L - \Delta + 2L)^2 (M(L - 1)^2 + (L + 1)^2)}{ML^3 \Delta^2}} = \quad (3.8) \\ & = \frac{(7\Delta + L(M + 1))(M(L - 1)^2 + (L + 1)^2)}{ML^2}. \end{aligned}$$

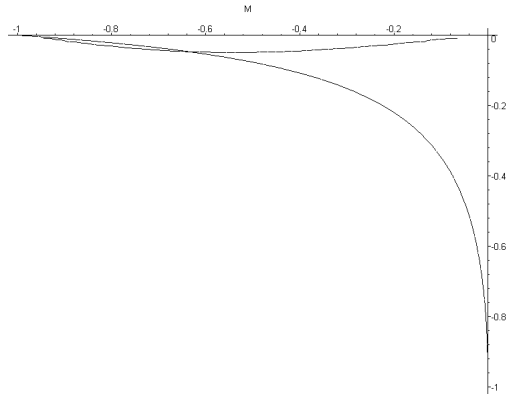


Рис. 4.

Если считать, что $L - 1 + 2L/\Delta > 0$, то равенство (3.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 & \left(3(L-1)\sqrt{M+1} - (8L-7)\sqrt{ML} \right) \times \\
 & \times \sqrt{(M+1)(M(L-1)^2 + (L+1)^2)} = \\
 II: & \hspace{20em} (3.9) \\
 & = 14L\sqrt{ML} + \sqrt{M+1}(L-1) \times \\
 & \times \left((8L-7)\sqrt{ML(M+1)} - 3M(L-1) + 3L + 3 \right).
 \end{aligned}$$

На Рис. 4. представлены кривые I и II на плоскости параметров (L, M) . Анализ этих кривых с помощью компьютерной программы MAPLE 7 показал, что они пересекаются только в трех точках:

- 1) $L = 0, M = -1$;
- 2) $L = -1, M = 0$;
- 3) $L = -\frac{1}{21}, M = -\frac{12}{19}$.

В первом случае в силу равенства нулю длины первого звена задача вырождается в одномерную интегрируемую задачу о движении плоского математического маятника. Во втором случае в силу равенства нулю массы в точке A имеем задачу о бильярде в вертикальном кольце [12]. В третьем случае оба корня уравнения (3.6) отрицательны — $Z = -1/3$, $Z = -1/19$, что противоречит предположению, при котором выполнялись предыдущие рассуждения. Это означает, что в силу теоремы Козлова при выполнении условий $L > 0$, $M > 0$ система уравнений движения тяжелого двойного математического маятника не допускает дополнительного первого интеграла из рассматриваемого класса аналитических функций.

Таким образом, теорема Козлова позволяет построить алгоритм проверки несуществования аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем. Такой алгоритм прост в реализации и не требует очень сложных вычислений, в особенности в системах с двумя степенями свободы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 08-01-00363).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Несуществование аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем // Вестник МГУ. Сер. 1., Математика, механика, 1976, №1, С. 110-115.
2. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Вып.1.

3. *Kozlov V.V.* Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics. Berlin, New York : Springer-verlag. 1996 – 378 p.
4. *Буров А.А.* Несуществование дополнительного интеграла в задаче о плоском тяжелом двойном маятнике // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 168-171.
5. *Dullin H.R.* Melnikov's method applied to the double pendulum // Z. Phys. B, 528. 1994.
6. *Моауро В., Негрини П.* Хаос для двойного математического маятника // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 827-830.
7. *Ivanov A.V.* Study of the double mathematical pendulum I. Numerical investigation of homoclinic transversal intersections // Regular & Chaotic Dynamics. 1999. Vol. 4. No. 1. P. 104-116.
8. *Ivanov A.V.* Study of the double mathematical pendulum II. Investigations of exponentially small homoclinic intersections // Journal of Physics A. 2001. Vol. 34. No. 49. P. 11011-11031.
9. *Ivanov A.V.* Study of the double mathematical pendulum III. Melnikov's method applied to the system in the limit of small ratio of pendulums masses // Regular & Chaotic Dynamics. 2000. Vol. 5. No. 3. P. 329-343.

10. *Ivanov A.V.* Study of the double mathematical pendulum IV. Quantitative bounds on values of the system parameters when the homoclinic transversal intersections exist // Regular & Chaotic Dynamics. 2001. Vol. 6. No. 1. P. 53-94.
11. *Буров А.А., Нечаев А.Н.* О неинтегрируемости в задаче о движении тяжелого двойного маятника // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2002. С. 128-135.
12. *Попова Т.В.* О реализации неударяющих связей в механических системах с вырождением кинетической энергии // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 20-34.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О
РАВНОВЕСИИ НИТИ В ПРИТЯГИВАЮЩИХ И
ОТТАЛКИВАЮЩИХ ПОЛЯХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

С.Ф. Адлай*

Исследованы решения уравнений равновесия нерастяжимой однородной нити в поле параллельных потенциальных сил. Показано, что физически нереализуемые решения с отрицательным натяжением оказываются решениями с положительным натяжением для двойственной задачи. Дана точная формулировка двойственной задачи и двойственных друг другу решений. Указаны дробно-линейные преобразования, переводящие решения с отрицательным натяжением в двойственные решения с положительным натяжением и обратно. Существование двойственных решений и дробно-линейного преобразования между двойственными друг другу решениями гарантированы в случае постоянных сил. В случае линейных параллельных сил существование пары двойственных друг другу решений гарантирует существование дробно-линейного преобразования между ними, которое оказывается преобразованием между ограниченным и неограниченным решениями. Невырожденные преобразования в случае линейных параллельных сил могут существовать и в отсутствие двойственных решений, а именно, между неограниченными решениями без экстремальных точек.

Ключевые слова: нерастяжимая однородная нить, равновесная форма, поле параллельных сил, погонная потенциальная сила, однозначная силовая функция, невырожденное дробно-линейное преобразование, двойственность.

* e-mail: SemjonAdlaj@gmail.com

Рассмотрим задачу о равновесных формах нерастяжимой однородной нити конечной длины l с закрепленными концами в поле параллельных сил. В равновесии нить будет лежать в плоскости, параллельной линиям действия сил, а проекция натяжения нити на перпендикуляр к линии действия сил будет постоянной [1].

В плоскости нити введем систему координат с осью z , параллельной линии действия сил, назовем ее *вертикальной осью*, и осью x , перпендикулярной вертикальной оси, назовем ее *горизонтальной осью*. Пусть s – натуральный параметр, отсчитываемый вдоль нити. Сила, действующая на бесконечно малый элемент нити с координатами (x, z) , не зависит от координаты x и пропорциональна его длине ds . Обозначим эту силу $f(z) ds$. Будем полагать силу f , отнесенную к единице длины нити, потенциальной с однозначным потенциалом $u = u(z)$:

$$f = -u'.$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование функции по её аргументу.

Несмотря на то, что вертикальное положение нити является формой ее равновесия, будем полагать, что форма равновесия задается однозначной функцией

$$z = z(x).$$

Натяжение нити t в точке (x, z) можно выразить формулой

$$t = c \sqrt{1 + z'^2},$$

где c – горизонтальная составляющая силы натяжения нити. По условию задачи она постоянна, так как силы, действующие на нить, направлены вдоль вертикальной оси и не имеют горизонтальной составляющей. Будем полагать, что $0 < |c| < \infty$.

Из уравнения равновесия бесконечно малого элемента нити

$$c dz' + f(z)\sqrt{1+z'^2} dx = 0$$

следует равенство

$$\frac{c z''}{\sqrt{1+z'^2}} = -f(z),$$

умножая которое на z' и интегрируя, получим формулу

$$c \sqrt{1+z'^2} = u(z) - \lambda, \quad (1)$$

являющуюся частным случаем формулы

$$t = t(z) = u(z) - \lambda,$$

определяющей натяжение, когда существует однозначная силовая функция [1]. Здесь λ – постоянная интегрирования.

Из формулы (1) следует неравенство

$$|c| \leq |u(z) - \lambda|,$$

которое в случае положительного натяжения примет вид

$$\lambda + c \leq u(z), \quad (2)$$

а в случае отрицательного натяжения вид

$$\lambda + c \geq u(z). \quad (3)$$

В любом случае, если \bar{x} – точка локального экстремума функции z

$$z'(\bar{x}) = 0, \quad \bar{z} = z(\bar{x}),$$

то

$$\lambda + c = u(\bar{z}).$$

Соотношение (1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции z , зависящее

от известной функции u и двух констант λ и c , зависящих, в свою очередь, от граничных условий и длины l . Обозначим $z(u, \lambda, c)$ не только решение этого уравнения на отрезке, соответствующем закрепленным концам нити при заданных параметрах λ и c , но и его продолжение, если таковое имеется. Решение $z = z(u, \lambda, c)$ будем называть ограниченным, если существует константа $C < \infty$, для которой выполнено неравенство

$$|z| \leq C,$$

и неограниченным, если такой константы не существует.

Зафиксируем λ и $c > 0$. Введем *двойственные друг другу решения* z_+ и z_-

$$z_+ = z(u, \lambda, c), \quad z_- = z(u, \lambda, -c)$$

и потенциал u^* , *двойственный потенциалу* u

$$u^* = 2\lambda - u.$$

Двойственный потенциал u^* является силовой функцией погонной силы f

$$f = u^{*l}.$$

Будем называть решение $z(u^*, \lambda, c)$ *решением двойственной задачи*. Тогда решение с отрицательным натяжением z_- , двойственное решению z_+ исходной задачи, оказывается решением двойственной задачи с положительным натяжением, то есть

$$z_- = z(u^*, \lambda, c).$$

Решение, двойственное решению двойственной задачи, совпадает с первоначальным

$$z_+ = z(u^*, \lambda, -c),$$

и задача, двойственная двойственной задаче, совпадает с первоначальной.

Укажем преобразования, переводящие решения в двойственные им решения, в двух случаях:

1. В случае $u(z) = z$ преобразование имеет вид $z \mapsto 2\lambda - z$.
2. В случае $u(z) = z^2$ преобразование имеет вид $z \mapsto \frac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{z}$.

В обоих случаях точка локального экстремума \bar{x} функции z_- со значением \bar{z}_- становится, под действием соответствующего преобразования, точкой локального экстремума функции z_+ со значением \bar{z}_+ . Переход между двумя экстремальными значениями \bar{z}_- и \bar{z}_+ функций z_- и z_+ соответствует переходу между двумя экстремальными значениями $\lambda - c$ и $\lambda + c$ двойственных друг другу потенциалов u^* и u . На рис. 1 пунктиром показаны двойственные друг другу формы равновесия, соответствующие потенциалу $u(z) = z$, сплошными линиями – потенциалу $u(z) = z^2$.

В первом случае оба решения z_+ и z_- оказываются неограниченными. Во втором только z_+ является неограниченным. Решение z_- во втором случае, в силу (3), ограничено неравенством

$$z_-^2 \leq \lambda - c.$$

В частности, $z_- \equiv 0$, а преобразование становится вырожденным при $\lambda = c$; и решение z_- не существует, если $\lambda < c$. В случае $\lambda < c$ не существует и решение двойственной задачи с положительным натяжением $z(u^*, \lambda, c)$, но существует двойственное ему решение с отрицательным натяжением $z(u^*, \lambda, -c)$. Отметим, что при $\lambda < -c$ в неравенстве (2) для решения z_+ равенство не достигается, так как в этом случае

$$z_+^2 \geq 0 > \lambda + c,$$

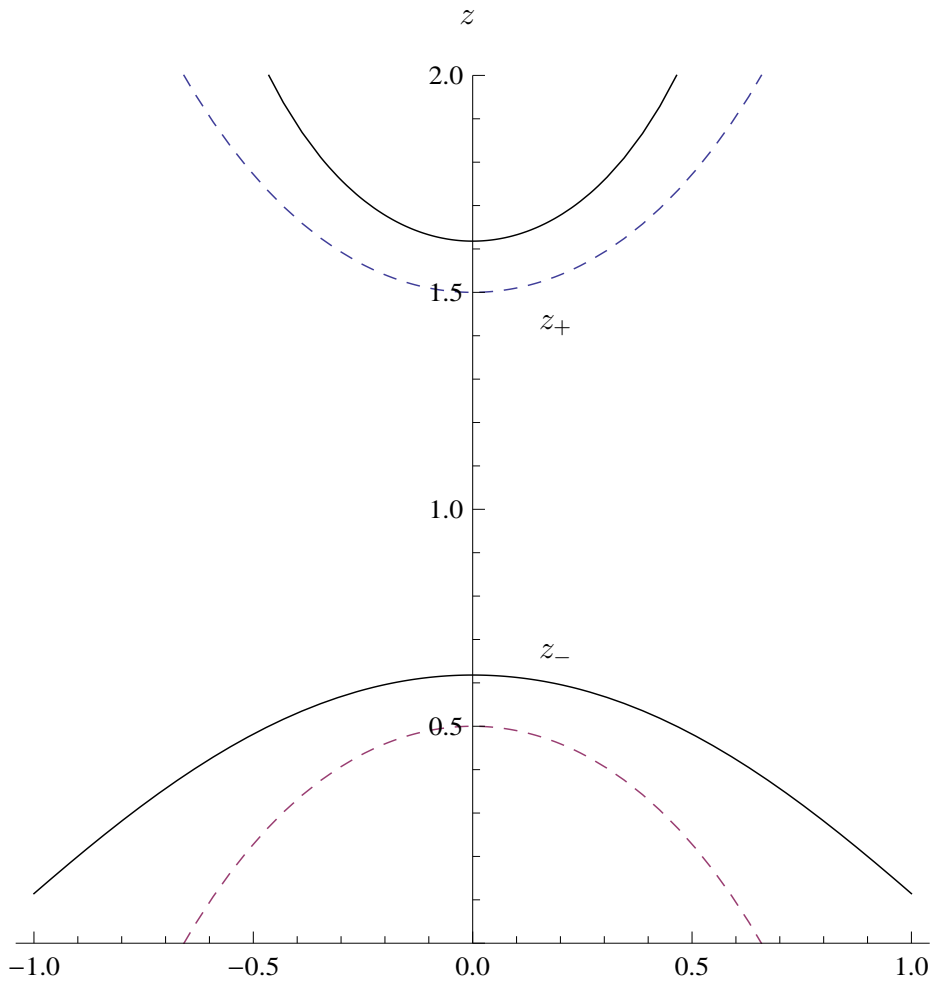


Рис. 1

и функция z_+ не имеет локальных экстремумов.

Убедимся в том, что если $\lambda > c$, то уравнение

$$\sqrt{1 + z_+^2} = c^{-1} (z_+^2 - \lambda) \quad (4)$$

эквивалентно уравнению

$$\sqrt{1 + z_-'^2} = -c^{-1} (z_-^2 - \lambda). \quad (5)$$

Действительно, в силу соотношений

$$z_- = \sqrt{\lambda^2 - c^2} z_+^{-1}, \quad z_-'' = -\sqrt{\lambda^2 - c^2} z_+' z_+^{-2}$$

уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$\sqrt{1 + (\lambda^2 - c^2) z_+'^2 z_+^{-4}} = -c^{-1} ((\lambda^2 - c^2) z_+^{-2} - \lambda),$$

которое после умножения на $z_+^2 \geq \lambda + c > 0$ и подстановки

$$z_+^2 = c\sqrt{1 + z_+'^2} + \lambda$$

в его левую часть превращается в уравнение

$$\sqrt{\left(c\sqrt{1 + z_+'^2} + \lambda\right)^2 + (\lambda^2 - c^2) z_+'^2} = -c^{-1} (\lambda^2 - c^2 - \lambda z_+^2),$$

упростив которое, получим

$$\lambda\sqrt{1 + z_+'^2} + c = \lambda c^{-1} (z_+^2 - \lambda) + c,$$

и, следовательно, уравнение (5) эквивалентно уравнению (4), как утверждалось.

Подчеркнем, что в случае $\lambda \leq c$ уравнение (5) не эквивалентно уравнению (4), несмотря на то, что z_+ существует. В частности, уравнение (5) не эквивалентно уравнению (4) при $\lambda < -c$, когда указанное дробно-линейное преобразование существует и невырожденное. На рис. 2 представлены два решения уравнения (1) при $u(z) = z^2$ и $\lambda < -c$, переходящие одно в другое при указанном дробно-линейном преобразовании, но не двойственные друг другу.

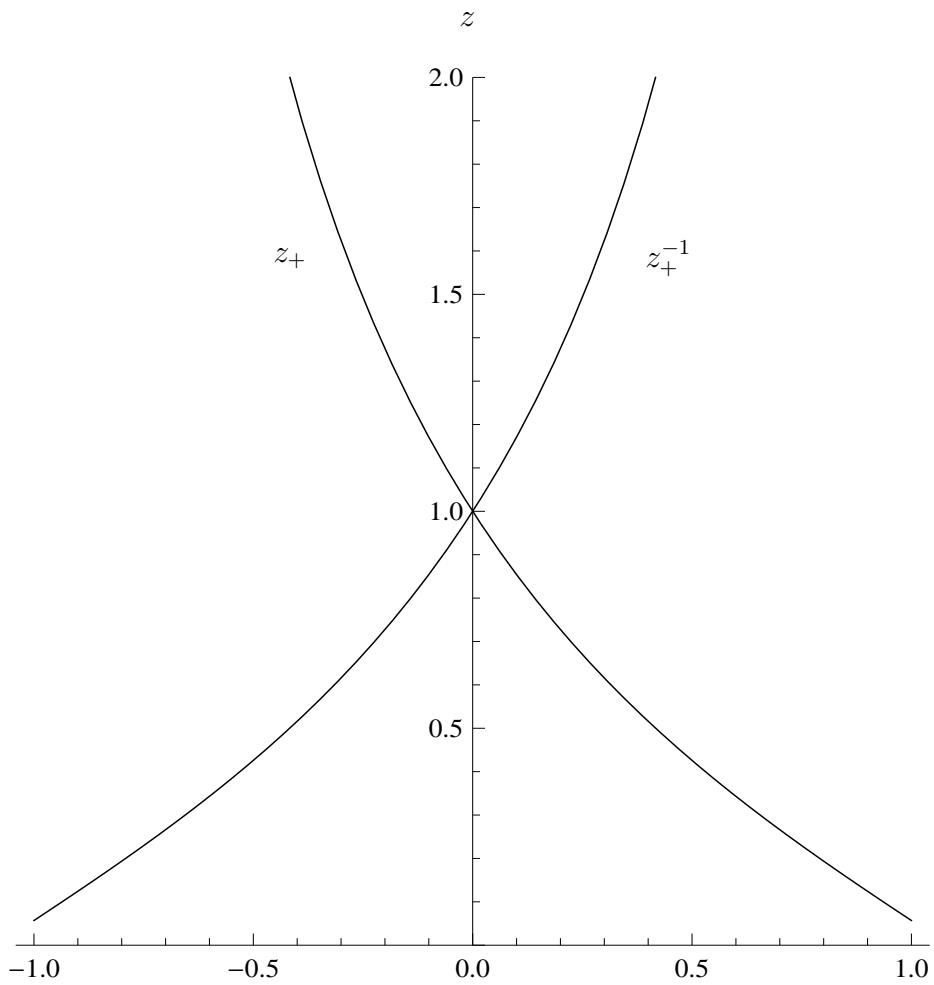


Рис. 2

Во втором случае мы установили, что все решения двойственной задачи с двойственным потенциалом u^* и с положительным натяжением являются ограниченными. Это означает, что все физически реализуемые заданные однозначными функциями формы равновесия нити в случае отталкивающих от го-

ризонгальной оси линейных параллельных сил принадлежат классу ограниченных функций. В случае притягивающих к горизонтальной оси сил последнее утверждение не имеет места.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 08-01-00600).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика Т. 1. М. ГИФМЛ. 1960.

СИММЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ОБУСЛОВЛЕННЫЕ
НЕЛИНЕЙНОСТИ В МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

Я.Е. Славяновский, В. Ковальчук*

Рассмотрена взаимосвязь между нелинейностью и симметрией динамических моделей. Особенное внимание уделено существенной (не имеющей характера малых возмущений) нелинейности, когда вообще не существует линейного фона. Такая нелинейность существенно отличается от тех нелинейностей, которые задаются нелинейными поправками, наложенными на некоторый линейный фон. В некотором смысле наши идеи являются продолжением и развитием подхода, положенного Борном и Инфельдом в основу своей электродинамики, а также схем общей теории относительности. Особенно представляют интерес аффинные симметрии степеней свободы и динамические модели. Рассмотрены механические геодезические модели, где упругая динамика тела сосредоточена не в потенциальной энергии, а исключительно в аффинно-инвариантной кинетической энергии, т.е. в аффинно-инвариантных метрических тензорах на конфигурационном пространстве. В некотором смысле это напоминает идею, заключённую в вариационном принципе Мопертюи. Рассмотрена также динамика полей линейных базисов, инвариантная под действием линейной группы внутренних симметрий. Оказалось, что такие модели автоматически имеют структуру обобщённой модели Борна-Инфельда. Этот факт является новым подтверждением идей, впервые предложенных Борном и Инфельдом. Рассмотренные модели могут быть

Институт Фундаментальных Проблем Техники Польской Академии Наук, ул. Павиньского 5^B, 02-106 Варшава, Польша, e-mails: jslawian@ippt.gov.pl, vkoval@ippt.gov.pl

использованы в теории нелинейной упругости и в механике релятивистских сред со структурой. Они также могут привести нас к некоторым альтернативным моделям в теории гравитации. Кроме того существует интересная взаимосвязь между этими моделями и теорией нелинейных интегрируемых цепочек.

Ключевые слова: нелинейность, симметрия, не имеющие характера малых возмущений модели, аффинная инвариантность, нелинейность Борна-Инфельда, аффинно-твёрдые тела, релятивистские среды со структурой, внутренние степени свободы.

1. Без нелинейности нет жизни. Как известно, биологические системы работают в гомеостатических циклических режимах. Они проводят свою жизнь в окрестностях устойчивых притягивающих предельных циклов. Это возможно лишь для объектов, управляемых нелинейными динамическими системами

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad (1.1)$$

где $i = 1, \dots, n$ и x^i — переменные, описывающие их состояние.

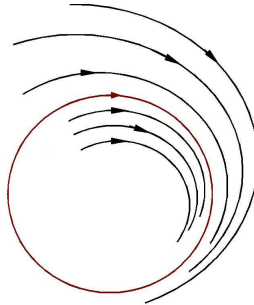


Рис. 1

Другой, быть может тривиальный, но практически очень важный пример — это тепловое расширение тел. Отталкиваю-

щая составляющая межмолекулярного потенциала имеет непараболический вид, обычно с особенностью в $r = 0$. Этим объясняется тепловое расширение:

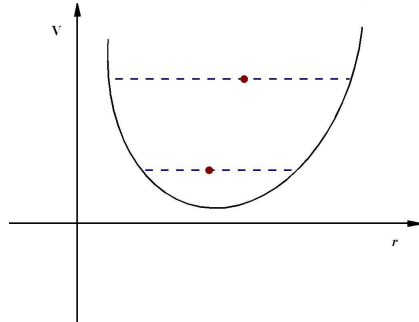


Рис. 2

Линейные гамильтоновы системы являются вполне интегрируемыми, и поэтому в них нет стохастизации энергии, т.е. нет равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Все фундаментальные теории поля нелинейны. Неквадратичные слагаемые в их лагранжианах обычно описывают взаимодействие между полями. Системы полей — элементы некоторого линейного пространства H . В рамках линейных теорий поля уравнения символически могут быть записаны в однородном виде

$$L\Psi = 0 \quad (1.2)$$

или, когда заданы определённые внешние источники f (как некоторые элементы пространства H), — в неоднородном виде

$$L\Psi = f, \quad (1.3)$$

где L — линейный оператор.

Как правило, в наиболее употребляемых нелинейных теориях поля уравнения имеют вид

$$L\Psi + N(\varepsilon, \Psi) = 0, \quad (1.4)$$

где L — линейная "основа", а сам нелинейный оператор N дополнительно зависит от некоторого параметра ε . Этот параметр отвечает за нелинейность, так что $N(0, \Psi) = 0$. Обычно предполагается, что линейная задача, т.е. та задача, которая отвечает значению $\varepsilon = 0$, так или иначе "разрешима", и решение нелинейной модели представимо в виде степенных рядов

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_n. \quad (1.5)$$

Такая процедура, если и эффективна, то только в тех случаях, когда нелинейный оператор N сам допускает представление в виде степенных рядов,

$$N(\varepsilon, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n N_n(\Psi). \quad (1.6)$$

Отправляясь от Ψ_0 , как от чего-то "известного", обычно пытаются "решить" иерархию уравнений для Ψ_n , полагая шаг за шагом равными нулю члены при соответствующих степенях ε . Очевидно, что такая процедура довольно рискованна и ненадёжна — получающиеся решения имеют символический вид формальных рядов, вопросы сходимости которых к решению исходной задачи требуют дополнительного исследования. В принципе, такая процедура работает для электромагнитных и слабых взаимодействий, но зачастую терпит неудачу при описании сильных взаимодействий.

В лагранжевых теориях применяют разложения функций Лагранжа

$$\mathcal{L}(\Psi, \partial\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{L}_n(\Psi, \partial\Psi), \quad (1.7)$$

где для $n > 2$ все слагаемые \mathcal{L}_n — многочлены степеней выше чем 2 (линейная основа) от аргументов $(\Psi, \partial\Psi)$. В таких случаях будем говорить, что имеет место нелинейность, имеющая

характер возмущений. Во всех остальных случаях будем говорить о существенной нелинейности (СНЛ).

Имеется нечто искусственное и "рукотворное" в такого рода нелинейностях, хотя среди них имеются и такие, которые хорошо (а иногда и очень хорошо) подтверждаются экспериментами. Тем не менее, существуют также хорошо определённые модели, в которых нелинейности не имеют характера возмущений. В этих моделях, мотивированных некоторыми идеями симметрии [1], нет какой бы то ни было линейной основы, порождённой квадратичной функцией Лагранжа. Прежде, чем приступить к их обсуждению, лишь для сравнения и лучшего понимания напомним некоторые известные хорошо работающие модели, имеющие характер возмущений.

2. Системы с взаимодействием определяющего материю комплексного поля Клейна-Гордона и определяющего излучение электромагнитного поля. Для таких систем лагранжиан имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \overline{D_\mu \Psi} D_\nu \Psi \sqrt{|g|} - m^2 \overline{\Psi} \Psi \sqrt{|g|} - \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}, \quad (2.1)$$

где $g_{\mu\nu}$ — ковариантные компоненты метрического тензора, g — определитель матрицы их коэффициентов, т.е. $g = \det [g_{\mu\nu}]$, A_μ — ковектор электромагнитного потенциала, $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.2)$$

и

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + ie A_\mu \Psi, \quad (2.3)$$

где e — постоянная взаимодействия (электрический заряд в натуральных единицах). Линейные и квадратичные слагаемые по e , отвечающие за нелинейности третьей и четвёртой степеней в

функции Лагранжа \mathcal{L} (т.е. квадратичный и кубический вклады в полевые уравнения), соответственно имеют вид

$$ieg^{\mu\nu} A_\mu (\Psi \partial_\nu \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \partial_\nu \Psi) \sqrt{|g|} = g^{\mu\nu} A_\mu j_\nu = A_\mu j^\mu, \quad (2.4)$$

$$e^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \bar{\Psi} \Psi \sqrt{|g|}. \quad (2.5)$$

3. Системы с взаимодействием определяющего излучение поля Максвелла и определяющего фермионную материю поля Дирака. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} e^\mu{}_A (\tilde{\Psi} \gamma^A D_\mu \Psi - (D_\mu \tilde{\Psi}) \gamma^A \Psi) \sqrt{|g|} \\ & - m \tilde{\Psi} \Psi \sqrt{|g|} - \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Используемые здесь символы имеют следующий смысл:

- $e^\mu{}_A$ — компоненты неголономного поля реперов, ортонормальных по отношению к метрическому тензору g . Их используют для того, чтобы осуществить описание в криволинейных координатах и сделать возможным гладкий переход к искривлённому пространству-времени, так, что

$$g_{\mu\nu} e^\mu{}_A e^\nu{}_B = \eta_{AB}, \quad [\eta_{AB}] = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (3.2)$$

где η — это плоская метрика Минковского в \mathbb{R}^4 , а не в пространстве-времени.

- γ^A — матрицы Дирака. Они удовлетворяют свойству антикоммутируемости

$$\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A = 2\eta^{AB} \quad (3.3)$$

и являются эрмитовыми по отношению к полуторалинейному эрмитову скалярному произведению G нейтральной сигнатуры:

$$\Gamma^A_{\bar{r}s} = \overline{\Gamma^A_{sr}} = G_{\bar{r}z} \gamma^{Az}_s, \quad [G_{\bar{r}s}] = \text{diag}(1, 1, -1, -1). \quad (3.4)$$

- сопряжённый биспинор $\tilde{\Psi}$ определён как

$$\tilde{\Psi}_r = \bar{\Psi}^{\bar{s}} G_{\bar{s}r}. \quad (3.5)$$

- ковариантное дифференцирование биспиноров задаётся соотношением

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \omega_\mu \Psi \quad (3.6)$$

со связностью

$$\omega_\mu = \frac{1}{8} \Gamma_{KL\mu} = -\frac{1}{8} \Gamma_{LK\mu} = \frac{1}{8} \eta_{KM} \Gamma^M{}_{L\mu} \quad (3.7)$$

а $\Gamma^K{}_{L\mu}$ определяется с помощью некоторой g -связности Римана-Картана как

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = e^\alpha{}_A \Gamma^A{}_{B\mu} e^B{}_\beta + e^\alpha{}_A e^A{}_{\beta,\mu}, \quad (3.8)$$

так что

$$\nabla[\Gamma]g = 0, \quad (3.9)$$

и $e^A{}_\alpha$ — компоненты двойственной котетрады,

$$e^A{}_\alpha e^\alpha{}_B = \delta^A{}_B. \quad (3.10)$$

- Лагранжиан кубичен по полевым переменным, полевые уравнения квадратичны по (A, Ψ) .

В рассмотренных примерах метрический тензор был фиксированной абсолютной величиной. Это сводит группу симметрий к группе изометрий, т.е. преобразований, сохраняющих g . Из фиксированности метрики g следует, что нелинейность модели, пусть даже и сильная, не является очень существенной. Причина этого состоит в том, что метрика g , необходимая для построения скалярных плотностей из динамических переменных и их производных, сама по себе является внешним элементом, фиксированным раз и навсегда.

4. Гравитационная теория как существенно нелинейная модель. Ситуация полностью меняется, когда мы рассматриваем метрический тензор как динамическую величину, описывающую гравитационное поле. Теперь больше нет объекта, зафиксированного извне, всё должно быть построено из метрики g , и из-за этого теория становится нелинейной по существу, а не за счёт малых возмущений [2, 3].

Аналитически метрический тензор представлен симметричным метрическим полем $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$, зависящим от пространственно-временных координат. Первая, очень наивная идея построить из метрики $g_{\mu\nu}$ и её производных некоторую, свободную от индексов величину, может выглядеть следующим образом:

$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu,\alpha} g_{\kappa\lambda,\beta}. \quad (4.1)$$

Однако на общем, не обладающем структурой многообразии это выражение будет полностью лишено смысла. Эта величина не является скаляром, также как и величина

$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu,\alpha} g_{\kappa\lambda,\beta} \sqrt{|g|} \quad (4.2)$$

не является скалярной плотностью. Эйнштейн, будучи мотивирован хорошими физическими идеями, провёл, тем не менее, много лет, борясь с проблемами, подобными данной. Точное решение было найдено Гильбертом, который опирался на своё глубокое понимание математики и римановой геометрии.

Точнее говоря, процедура такова: метрический тензор g порождает связность Леви-Чивита

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\kappa \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\kappa} + g_{\alpha\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\alpha}). \quad (4.3)$$

Согласно стандартной процедуре, на её основе возникают следующие промежуточные объекты: тензор римановой кривизны

$R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, тензор Риччи $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ и, наконец, скалярная кривизна $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. После этого строят скалярную плотность веса один — величину

$$R\sqrt{|g|}. \quad (4.4)$$

Эта величина зависит квадратичным образом от первых производных. Слагаемые в (4.2) и (4.4), содержащие вторые производные, отличаются на полную дивергенцию. Эта дивергенция не является скалярной плотностью, но она не сказывается на уравнениях поля. Важное положение состоит в том, что в выражениях (4.2) и (4.4) для свёртки индексов не используются никакие "не-динамические" величины. Из-за этого появляются два важных свойства: лагранжиан и результирующие уравнения поля общековариантны, т.е. инвариантны под действием всей группы

$$\text{Diff } M \subset \text{Bij } M \quad (4.5)$$

диффеоморфизмов пространственно-временного многообразия M на себя. Эта крайне высокая симметрия и очень сильная нелинейность, не происходящая из возмущений, соотносятся друг с другом [2, 3].

5. Модель Эйнштейна-Картана. Стоит заметить, что здесь допустимо пространственно-временное многообразие с кручением, или точнее, нет необходимости использовать связность Леви-Чивита. Как раз наоборот, в данных условиях достаточно естественным будет использование модели Эйнштейна-Картана. Тогда аффинная связность Γ оказывается метрической

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0, \quad (5.1)$$

но необязательно симметричной, т.е. кручение

$$S^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) \quad (5.2)$$

не обязано обращаться в нуль. Можно показать, что

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} + K^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} + S^{\lambda}_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}{}^{\lambda} + S_{\nu\mu}{}^{\lambda}. \quad (5.3)$$

Вычисляя скалярную кривизну R этой связности, получим лагранжиан модели Эйнштейна-Картана

$$L_{\text{EC}} = R[g, \Gamma] \sqrt{|g|}, \quad (5.4)$$

где все индексы тензора свёрнуты, подняты или опущены с помощью метрики g . Тензорную величину K обычно называют тензором конторсии. Очевидно модель также общековариантна и существенно нелинейна (СНЛ), так как никакие фиксированные дополнительные объекты не появляются в L_{EC} .

Нужно выделить следующий момент. "Паразитные" слагаемые в лагранжиане, содержащем вторые производные от полевых переменных, могут быть удалены инвариантным образом, если в качестве фундаментальных величин вместо метрического тензора использовать поле тетрад (поле линейных базисов) на пространственно-временном многообразии M . Между прочим, это необходимо, если мы хотим включить в общерелятивистские рамки спинорные поля, т.е. фермионную материю. И оказывается, что вследствие этого появляются некоторые новые идеи, касающиеся связи между существенной нелинейностью и инвариантностью. В то же время, такая задача имеет много общего с релятивистской механикой сплошной среды.

6. Метод тетрадного поля [4, 5]. Пусть M — n -мерное "пространственно-временное" многообразие. Специальное значение физической размерности $n = 4$ здесь несущественно. Предположим, что многообразие M параллелизуемо, т.е. допускает гладкое поле линейных базисов (неголономных систем координат).

Главный расслоённый пучок линейных базисов будет обозначен FM . Очевидно, что он представляет собой многообразие

размерности $n(n+1)$. Пусть $e = (\dots, e_A, \dots)$ обозначает поле линейных базисов, т.е. сечение FM над M . Двойственное поле кобазисов будем обозначать следующим образом: $\tilde{e} = (\dots, e^A, \dots)$. Если нет опасности, что могут возникнуть какие-то недоразумения, мы не будем различать по написанию величины e и \tilde{e} и будем просто использовать аналитические символы e^μ_A, e^A_μ , где

$$\langle e^A, e_B \rangle = e^A_\mu e^\mu_B = \delta^A_B. \quad (6.1)$$

Поле e порождает телепараллельную связность $\Gamma_{\text{tel}}[e]$, которая определена единственным образом тем условием, что все e_A (и автоматически — e^A) параллельны,

$$\nabla e_A = 0, \quad \nabla e^A = 0. \quad (6.2)$$

Нетрудно показать, что

$$\Gamma_{\text{tel}}[e]^\lambda_{\mu\nu} = e^\lambda_A e^A_{\mu,\nu}. \quad (6.3)$$

Эта связность имеет обращающуюся в нуль кривизну, но её кручение в общем случае ненулевое. Она используется в некоторых задачах теории дислокаций. Параллельный перенос в смысле $\Gamma_{\text{tel}}[e]$ очевидно не зависит от пути. Параллельный перенос некоторого вектора u из точки $a \in M$ в точку $b \in M$ состоит в том, что в точке b берут вектор $v \in T_bM$, который в локально неголономном базисе имеет те же компоненты, что и u ,

$$u = x^A e_A(a), \quad v = x^A e_A(b). \quad (6.4)$$

Обсуждаемые ниже тетрадные методы, как уже говорилось, необходимы для общерелятивистской теории спиноров. И кроме того, их можно рассматривать как модель релятивистского континуума с микроструктурой. Метрический тензор в этом описании не является первичной физической величиной, потому что

он получается как промежуточная величина из поля линейных базисов e ,

$$g = \eta_{AB} e^A \otimes e^B, \quad \text{т.е.} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{AB} e^A_{\mu} e^B_{\nu}, \quad (6.5)$$

где η — постоянная метрика Минковского в \mathbb{R}^n . Тем самым базис e автоматически η -ортонормален,

$$g(e_A, e_B) = g_{\mu\nu} e^{\mu}_A e^{\nu}_B = \eta_{AB}. \quad (6.6)$$

Группа $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, т.е. структурная группа FM , действует естественным образом на FM и F^*M . Это означает, что на многообразиях базисов и ко-базисов для $L \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ имеем

$$FM \ni e = (\dots, e_A, \dots) \mapsto eL = (\dots, e_B L^B_A, \dots), \quad (6.7)$$

$$F^*M \ni \tilde{e} = (\dots, e^A, \dots) \mapsto \tilde{e}L = (\dots, L^{-1A}_B e^B, \dots). \quad (6.8)$$

Соответствие $e \mapsto g[e]$ является локально-инвариантным под действием (6.7), т.е. L может зависеть от точки приложения e . Соответствие же $e \mapsto S[e]$ — глобально инвариантно, т.е. инвариантно под действием постоянной L , независимой от x^{μ} . Лагранжиан Гильберта может быть выражен через e . Введём так называемые инварианты Вейценбока (Weitzenböck)

$$J_1 = g_{ia} g^{jb} g^{kc} S^i_{jk} S^a_{bc}, \quad J_2 = g^{ij} S^k_{li} S^l_{kj}, \quad J_3 = g^{ij} S^a_{ai} S^b_{bj}. \quad (6.9)$$

Они квадратичны по производным e (потому что S линейно по de). После некоторых вычислений можно показать, что лагранжиан Гильберта может быть выражен как

$$R[g] \sqrt{|g|} = (J_1 + 2J_2 - 4J_3) \sqrt{|g|} + 4\nabla_i \left(S^a_{ab} g^{bi} \sqrt{|g|} \right). \quad (6.10)$$

Но связность Леви-Чивита симметрична, а последнее выражение — ковариантная дивергенция некоторой векторной плотности веса один. Поэтому эта величина — обычная дивергенция,

и её можно отбросить без изменения уравнений движения. Модифицированный лагранжиан Гильберта принимает вид

$$L'(e, \partial e) = (J_1 + 2J_2 - 4J_3) \sqrt{|g|}. \quad (6.11)$$

Выражения (6.9) глобально инвариантны относительно (6.7), а соотношение (6.11) локально инвариантно по модулю несущественных дивергентных поправок. И очевидно, что выражения (6.9), (6.11) также общековариантны, т.е. $\text{Diff } M$ -инвариантны, в точности, как гильбертов лагранжиан. И теперь возникает вопрос: почему не допустить в (6.11), т.е. в L' , некоторые более общие соотношения между коэффициентами, нежели частное отношение $1 : 2 : (-4)$ [4–9]? Такая замена не нарушает общей ковариантности. Верно то, что согласно (6.7) она нарушает локальную инвариантность под действием $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. Но глобальная инвариантность под действием внутренней группы Лоренца $O(n, \eta)$ остаётся справедливой. Имеются некоторые признаки того, что такие модифицированные модели жизнеспособны. Общая ковариантность гораздо более важна, так что, быть может, принятие предположения о ней, означающее также отказ от локальной инвариантности под действием внутренней группы $O(n, \eta) \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$, делает упор на принятии вместо этого предположения об инвариантности под действием глобальной группы $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, в то время как локальная инвариантность, очевидно, невозможна. Хотя целая $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, действующая как (6.7), описывает основные свойства геометрии степеней свободы в FM [4–9].

7. Модели типа Борна-Инфельда. Следуя и дальше этим путём, мы найдём довольно неожиданную и новую мотивировку для очень интересных классов обобщённых моделей типа Борна-Инфельда. На самом деле, простейший класс моделей, общековариантных и глобально инвариантных под действием

$GL(n, \mathbb{R})$ имеет следующий вид

$$L = \sqrt{|\det [L_{\mu\nu}]|}, \quad (7.1)$$

где $L_{\mu\nu}$, т.е. компоненты так называемого тензора Лагранжа, заданы как

$$L_{\mu\nu} = AS^\alpha_{\beta\mu}S^\beta_{\alpha\nu} + BS^\alpha_{\alpha\mu}S^\beta_{\beta\nu} + CS^\beta_{\beta\alpha}S^\alpha_{\mu\nu}, \quad (7.2)$$

где A, B, C — некоторые постоянные [9].

Это наиболее общий тензор, построенный как квадратичная функция от производных ∂e вектора e посредством квадратичной зависимости от величины S , и, в то же время, построенный из поля e согласно общековариантному правилу в M и аморфным, $GL(n, \mathbb{R})$ -инвариантным способом во внутреннем пространстве \mathbb{R}^n .

Его симметричная часть, т.е. комбинация первых двух слагаемых

$$T_{\mu\nu} = AS^\alpha_{\beta\mu}S^\beta_{\alpha\nu} + BS^\alpha_{\alpha\mu}S^\beta_{\beta\nu}, \quad (7.3)$$

как можно ожидать, играет роль метрического тензора. Для сравнения напомним, что правило Дирака-Эйнштейна (6.5)

$$\eta_{AB}e^A_\mu e^B_\nu \quad (7.4)$$

также было общековариантным в M и локально $O(n, \eta)$ -инвариантным в \mathbb{R}^n . Эта последняя симметрия, будучи бесконечномерной, в этом смысле богаче чем та, что задаётся соотношением (7.3). Однако она беднее в смысле неподчинения симметрии $GL(n, \mathbb{R})$. Эта последняя симметрия в определённом смысле более фундаментальна для FM и не предусматривает никакого фиксированного объекта во внутреннем пространстве \mathbb{R}^n . Особый интерес представляет само первое слагаемое в (7.3), в то время как остальные играют просто роль вторичных поправок. Все дело в том, что выражение

$$g[e]_{\mu\nu} = S^\alpha_{\beta\mu}S^\beta_{\alpha\nu} \quad (7.5)$$

построено из S в соответствии с алгебраической конструкцией Киллинга. Это совпадение не случайно. Пусть Ω^A_{BC} обозначает объект неголономии на e ,

$$[e_A, e_B] = \Omega^C_{AB} e_C, \quad de^A = \frac{1}{2} \Omega^A_{BC} e^C \wedge e^B. \quad (7.6)$$

С точностью до постоянного множителя это e -неголономное представление самого e , т.е.

$$S^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Omega^C_{AB} e^\lambda_C e^A_\mu e^B_\nu, \quad (7.7)$$

или, записанное иными словами с помощью M -индексов,

$$S = \frac{1}{2} \Omega^C_{AB} e_C \otimes e^A \otimes e^B. \quad (7.8)$$

Можно показать, что всякий лагранжиан, построенный из e общековариантным и $GL(n, \mathbb{R})$ -инвариантным образом, должен зависеть от S , и поэтому также от производных de однородным образом степени однородности n . Единственный способ рассмотреть общий случай состоит в том, что надо ввести некоторые скалярные выражения построенные из $g[e]$ (7.5) и $S[e]$. Можно показать, что такие скаляры, всегда однородные степени однородности ноль в S (или в de), не вносят ничего качественно нового, но усложняют формулу для $L(e, de) = L(S)$. Если поле базисов оказывается натянутым на алгебру Ли, т.е. если Ω постоянна, то (M, e) становится пространством группы Ли, и $g[e]$ пропорционально её тензору Киллинга:

$$g[e]_{\mu\nu} = 4\gamma[e]_{AB} e^A_\mu e^B_\nu, \quad \gamma[e]_{AB} = \Omega^K_{LA} \Omega^L_{KB}, \quad (7.9)$$

где Ω^A_{BC} — не что иное, как структурные постоянные.

Важный и приводящий в сильное волнение вывод состоит в том, что если алгебра Ли полупроста, то e — всегда решение полевых уравнений, получающихся из лагранжиана L как уравнения Эйлера-Лагранжа. Эти решения называются "однородными" или "вакуумными" решениями.

8. Взаимосвязь между существенными нелинейностями, не имеющими характера малых возмущений, и группами симметрии высокого порядка. Представленная выше модель была построена для некоторых, очень специальных типов геометрических объектов и основывалась на некоторой, очень специальной мотивировке. Однако эта мотивировка оказалась весьма глубокой. Она как раз и выражает нашу идею о существовании глубокой и неотъемлемой связи между существенной нелинейностью, не имеющей характера малых возмущений, и группами симметрии высокого порядка (быть может, скрытыми).

Лагранжианы вида (7.1), (7.2) очень интересны как альтернативный полюс простоты в смысле дополнителности к лагранжианам, квадратичным по скоростям (и приводящим к квазилинейным уравнениям поля). Они были впервые обнаружены в нелинейной электродинамике (как модели Борна-Инфельда). Но мотивировка тогда была совершенно другой, ориентированной на то, чтобы избежать трудностей, присущих линейной электродинамике Максвелла. Характерное свойство линейных и квазилинейных теорий поля состоит в том, что лагранжианы квадратичны по производным. Кажется, что эта возможность — наиболее простая. Но можно найти и другой, альтернативный путь, имеющий глубокое основание в геометрии, симметрии и нелинейности. Действительно, геометрическая структура всякого лагранжиана $\mathcal{L}(\Psi, \partial\Psi)$ — это структура скалярной плотности веса один (или, более точно, плотность Вейля, W -плотность) на пространственно-временном многообразии, или, более общо, на "многообразии независимых переменных". В полевых теориях специальной теории относительности, или, в более общем случае, в теориях, сформулированных на основе некоторого фиксированного или динамического метрического тензора, скажем, в общей теории относительности,

имеется стандартная процедура построения таких величин, т.е.

$$\mathcal{L}[g, \Psi] = L[g, \Psi] \sqrt{|g|}, \quad (8.1)$$

где $L[g, \Psi]$ — скалярная функция, построенная из полей, и $\sqrt{|g|}$, т.е. определитель метрического тензора, — это стандартная скалярная плотность веса один. Затем, когда основываясь на такой факторизации, будет довольно естественным ожидать, что простейшие и наиболее эффективные модели линейны и квазилинейны, когда L зависит от производных полиномиально, и полином имеет вторую (или по крайней мере низкого порядка) степень. Однако, если мы однажды примем философию скалярных плотностей как что-то фундаментальное, тогда, также как и в случае (7.1) мы окажемся склонными верить в противоположный полюс простоты. Имеется в виду, что не сам лагранжиан, но некоторый дважды ковариантный тензор Лагранжа $L_{\mu\nu}(\Psi, \partial\Psi)$ должен быть рассмотрен как нечто фундаментальное, потому что извлечение квадратного корня из (абсолютного значения) ковариантного тензора второго порядка — это канонический способ построения лагранжевых плотностей и вариационных принципов. Поэтому не лагранжиан, а именно, тензор Лагранжа $L_{\mu\nu}(\Psi, \partial\Psi)$ должен иметь как можно более простую форму, например как в (7.1), (7.2). Таким образом, ожидается, что $L_{\mu\nu}$ будет некоторым полиномом второго (или по крайней мере низкого) порядка по $\partial\Psi$.

Эта идея очень стара и восходит ещё к некоторым попыткам Борна и Инфельда избежать противоречий в классической электродинамике. Эти попытки почти полностью забыты, но недавно интерес к этой модели возродился вновь [1, 10].

9. Традиционная модель Борна-Инфельда в электродинамике. Пусть A_μ — 4-потенциал электромагнитного поля. Тогда интенсивность поля задана с помощью кососимметричного тензора

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (9.1)$$

т.е. внешней производной (в этом случае, грубо говоря, операцией взятия ротора) от A_μ . Основные инварианты можно представить в следующем виде:

$$S = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\lambda}F_{\mu\nu}F_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}(\overline{E}^2 - \overline{B}^2), \quad (9.2)$$

$$P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\check{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\alpha}F_{\mu\nu}F_{\alpha\lambda} = \overline{E} \cdot \overline{B}, \quad (9.3)$$

где S — скаляр, P — псевдоскаляр, а \overline{E} и \overline{B} — соответственно электрическое поле и магнитная индукция. Компоненты вектора \overline{E} , т.е. E_i , равны компонентам F_{0i} (или $F_{i0} = -F_{0i}$, в зависимости от конвенции) тензора F , а компоненты псевдовектора \overline{B} , т.е. B_i , совпадают с компонентами $F_{jk} = -F_{kj}$, $j \neq k$, $k \neq i$, $i \neq j$. Следует обратить внимание читателя на то, что мы следуем здесь релятивистской конвенции, где греческие индексы являются пространственно-временными, а латинские — только пространственными. Таким образом μ, ν пробегает целый диапазон 0, 1, 2, 3, в то время как i, j, k — только 1, 2, 3. Кроме того в вышеприведённых формулах предполагается также суммирование по повторяющимся индексам.

Пусть $L[F] = \ell(S, P)$ — лагранжиан, а $g_{\mu\nu}$ — метрика Минковского. Далее мы будем использовать псевдо-ортогональные координаты, так что

$$[g_{\mu\nu}] = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (9.4)$$

Традиционный лагранжиан Максвелла в линейной электродинамике имеет вид

$$L = S. \quad (9.5)$$

Хорошо известный лагранжиан в нелинейной электродинамике Борна-Инфельда записывается как

$$\begin{aligned} L &= b^2 - b^2 \sqrt{1 - \frac{2}{b^2}S - \frac{1}{b^4}P^2} \\ &= b^2 \sqrt{|\det[g_{\mu\nu}]|} - \sqrt{|\det[bg_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}]|}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

При этом вышеприведённая модель была сформулирована уже в окончательной версии теории; в начале же предложенная Борном оригинальная модель основывалась на лагранжиане

$$L = b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} (\overline{B}^2 - \overline{E}^2)} - 1 \right). \quad (9.7)$$

Обе модели (9.6) и (9.7) дают тот же результат, когда мы ищем стационарные, сферически симметричные решения полевых уравнений. Однако существуют и некоторые различия в других предсказаниях этих двух теорий.

Основная мотивировка для поисков нелинейных моделей в электродинамике состоит в следующем:

- получить конечную собственную электромагнитную энергию электрона (а следовательно и его конечную электромагнитную массу), а возможно и эффект насыщения (сатурации), т.е. максимальную силу электростатического поля,
- иметь возможность получить уравнения движения для заряженной частицы из уравнений поля, например как для массивных частиц в общей теории относительности [2, 3, 11].

Идеальной схемой в этом случае является схема появления существенной нелинейности в общей теории относительности, т.е. в релятивистской теории гравитации Эйнштейна.

Сферически симметричные стационарные решения полевых уравнений, которые мы получаем для моделей (9.6) и (9.7), явно удовлетворяют вышеприведённым требованиям. Если мы потребуем, чтобы электростатический потенциал $\varphi = A_0$ ($A_i = 0$) был функцией только от радиальной переменной r , тогда мы в конечном счёте получим следующую картину, которая иллюстрирует качественные различия между электродинамикой Максвелла и Борна-Инфельда:

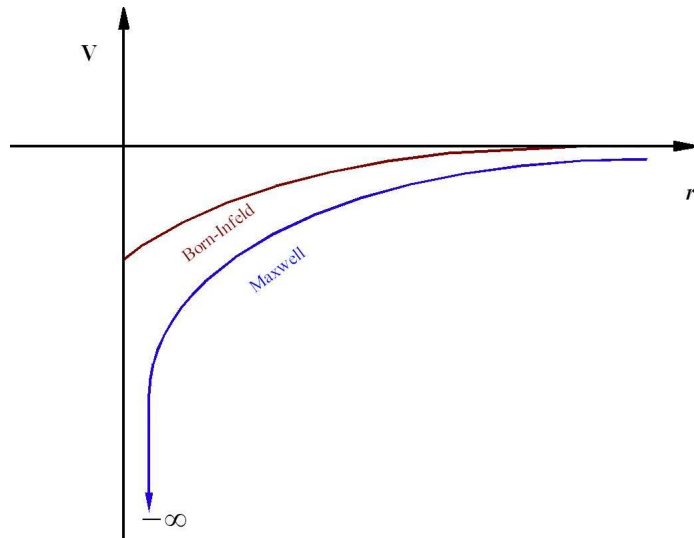


Рис. 3

Соответствующее аналитическое описание имеет вид:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{e}{\sqrt{r_0^4 + x^4}} \frac{\bar{r}}{r}, \quad \varphi(r) = \int_r^\infty \frac{edx}{\sqrt{r_0^4 + x^4}}, \quad r_0 = \sqrt{\frac{e}{b}}, \quad (9.8)$$

где e — это постоянная интегрирования, которая с физической точки зрения тождественна электрическому заряду электрона, а \bar{r} обозначает радиус-вектор.

Легко видеть, что скалярный потенциал φ конечен, электрическое поле \bar{E} ограничено (хотя и неопределено в точке $r = 0$), плотность энергии ω , т.е. компонента T_{00} тензора энергии-импульса, бесконечна в точке $r = 0$, но тем не менее общая энергия (т.е. масса электрона) $\mathcal{E} = \int \omega d_3\bar{r}$ конечна.

10. Исключительность модели Борна-Инфельда. В свое время имели место многочисленные попытки построения нелинейной электродинамики, но среди всех них модель Борна-Инфельда является в определённом смысле каноничной и исключительной в силу следующих своих свойств:

- она калибровочно инвариантна,
- функционал энергии является положительно определённым,
- точечные источники имеют конечную электромагнитную массу,
- в релятивистском пространстве-времени поток энергии не является пространственно-подобным вектором,
- в ней нет двойного лучепреломления,
- в ней существуют плоские волны на фоне постоянного электромагнитного поля, а также уединённые волны.

Вследствие этого теория Борна-Инфельда казалась наиболее интересной среди всех возможных нелинейных моделей электродинамики, но, тем не менее, в конечном счёте она оказалась явно разочаровывающей по следующим причинам:

- не было убедительных результатов в ожидаемой импликации: уравнения поля \Rightarrow уравнения движения. Успех общей теории относительности в этом отношении опирался не только на наличие нелинейности, хотя и был с ней сильно связан. Главным образом это произошло благодаря тождествам Бьянки, которые следуют из общей ковариантности. Существенная нелинейность была здесь конечно важна, но не напрямую, а только как следствие общей ковариантности.
- не было похоже на то, что спектры сверхтяжёлых атомов подтверждают идеи Борна-Инфельда,
- имелись серьёзные трудности при переходе к квантовой версии теории обусловленные неполиномиальной структурой лагранжиана,

- одной из её главных мотивировок была бесконечность электромагнитной массы в линейной теории Максвелла. Но вскоре появилась квантовая электродинамика, и благодаря процедуре ренормализации учёные перестали больше бояться бесконечностей. Иными словами, предполагалось, что масса электрона не имеет только электромагнитного происхождения, вследствие этого эти две бесконечности взаимно сокращаются и масса получается конечной.
- буквально говоря, историческая модель Борна-Инфельда не очень хорошо подходит при описании "внешней" заряженной материи (отличной от "внутренней", которая описывается особенностями поля магнитной индукции \vec{D}). Например, для квантовой когерентной материи мы имеем

$$L = b^2 \sqrt{|g|} - \sqrt{bg + F} + g^{\mu\nu} \overline{D}_\mu \Psi D_\nu \Psi \sqrt{|g|} - m^2 \overline{\Psi} \Psi \sqrt{|g|}, \quad (10.1)$$

где $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Возникающие здесь полевые уравнения имели бы нерациональную структуру в полевых переменных и их производных.

Вследствие вышеприведённых причин интерес к модели Борна-Инфельда после некоторого времени совсем исчез с физического "рынка". Время от времени модель была использована как квазиклассическое описание некоторых нелинейных явлений, таких как, например, рассеяние фотонов на фотонах. В результате её предсказания совпадали с теми, которые были получены с помощью квантовой электродинамики, но процедура была во многих аспектах значительно проще. Нелинейное взаимодействие между линейным полем Максвелла и материей было в этом случае закодировано в нелинейности Борна-Инфельда в виде чисто электромагнитной модели. Грубо говоря, нелинейность полевой динамики замещает материю, эффективно её описывая.

11. Аффинно-твёрдые тела. Теория аффинно-твёрдых тел представляет собой в определённом смысле механический пример, лежащий в основе нашей идеи $GL(n, \mathbb{R})$ -инвариантной гравитации, основанной на линейных базисах [12–20].

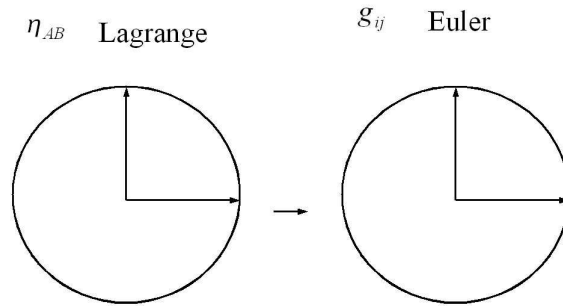


Рис. 4

Во время движения все аффинные соотношения между составляющими тела сохраняются. В общем это не так с метрическими соотношениями. Поэтому лагранжевы и эйлеровы координаты a^K , ξ^i связаны между собой как

$$\xi^i(t, a) = x^i + \varphi^i_K(t)a^K, \quad (11.1)$$

где x^i — положение центра масс, а φ^i_K — координаты внутреннего движения. В n -мерном пространстве в совокупности имеются $n(n+1)$ обобщённых координат x^i и φ^i_K .

Мы имеем обобщённые скорости v^i , V^i_K и некоторые другие определяемые ими величины, такие как аффинные скорости Ω ,

$\widehat{\Omega}$ в пространственном и связанном с телом представлениях

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad \widehat{v}^A = \varphi^{-1A}{}_i v^i, \quad V^i{}_K = \frac{d\varphi^i{}_K}{dt}, \quad (11.2)$$

$$\Omega^i{}_j = V^i{}_K \varphi^{-1K}{}_j = \frac{d\varphi^i{}_K}{dt} \varphi^{-1K}{}_j, \quad (11.3)$$

$$\widehat{\Omega}^A{}_B = \varphi^{-1A}{}_i V^i{}_B = \varphi^{-1A}{}_i \frac{d\varphi^i{}_B}{dt} = \varphi^{-1A}{}_i \Omega^i{}_j \varphi^j{}_B. \quad (11.4)$$

Они представляют собой аффинные аналоги угловых скоростей из механики твёрдого тела.

12. "Обычная" кинетическая энергия T , основанная на принципе Даламбера. В этом случае имеем функцию Лагранжа

$$L = T - \mathcal{V}(x, \varphi), \quad (12.1)$$

где $\mathcal{V}(x, \varphi)$ — это потенциальная энергия, кинетическая энергия записывается как

$$T = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{d\varphi^i{}_A}{dt} \frac{d\varphi^j{}_B}{dt} J^{AB} = T_{\text{tr}} + T_{\text{int}}, \quad (12.2)$$

а величины

$$m = \int d\mu(a), \quad J^{AB} = \int a^A a^B d\mu(a) \quad (12.3)$$

соответственно описывают трансляционную (масса) и внутреннюю инертность. Здесь T — это кинетическая энергия описывающая линейный фон.

13. Динамически аффинно-инвариантные модели. Связь между сильной нелинейностью и симметрией высокого порядка. Вышеприведённая модель, которая хотя и основана на аффинных степенях свободы, не является аффинно-инвариантной на уровне динамики, так что ее

симметрия слишком бедна. Однако мы можем ввести модели, аффинно-инвариантные в физическом пространстве:

$$\text{left}T_{\text{int}} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^B{}_A{}^D{}_C\widehat{\Omega}^A{}_B\widehat{\Omega}^C{}_D, \quad (13.1)$$

$$\text{left}T_{\text{tr}} = \frac{m}{2}\eta_{AB}\widehat{v}^A\widehat{v}^B = \frac{m}{2}C_{ij}v^iv^j, \quad (13.2)$$

где $C_{ij} = \eta_{AB}\varphi^{-1A}{}_i\varphi^{-1B}{}_j$ — тензор деформаций Коши, и материальном:

$$\text{right}T_{\text{int}} = \frac{1}{2}\mathcal{R}^j{}_i{}^l{}_k\Omega^i{}_j\Omega^k{}_l, \quad (13.3)$$

$$\text{right}T_{\text{tr}} = \frac{m}{2}g_{ij}v^iv^j = \frac{m}{2}G_{AB}\widehat{v}^A\widehat{v}^B, \quad (13.4)$$

где $G_{AB} = g_{ij}\varphi^i{}_A\varphi^j{}_B$ — тензор деформаций Грина.

Здесь \mathcal{L} , \mathcal{R} — некоторые постоянные. Но Ω и $\widehat{\Omega}$ — неголомные скорости, поэтому метрики, лежащие в основе этих T , являются неевклидовыми, и даже без потенциала динамика инвариантна относительно "большой" аффинной группы, не только относительно сохраняющих метрику групп (изометрий) как в разд. 12.

Модели, одновременно инвариантных относительно левых и правых (пространственных и материальных) действий аффинных групп, не существует. Но сама внутренняя кинетическая энергия может быть двусторонне аффинно-инвариантна. Однако такие кинетические энергии законоопределены:

$$\text{aff}T_{\text{int}}^{\text{aff}} = \frac{A}{2}\text{Tr}(\Omega^2) + \frac{B}{2}(\text{Tr}\Omega)^2 = \frac{A}{2}\text{Tr}(\widehat{\Omega}^2) + \frac{B}{2}(\text{Tr}\widehat{\Omega})^2. \quad (13.5)$$

Кроме того, существуют интересные модели, аффинно-инвариантные в физическом пространстве и только изометрически инвариантные в материальном пространстве, и наоборот.

Это соответственно

$$\text{aff}T_{\text{int}}^{\text{metr}} = \frac{I}{2}\eta_{AC}\eta^{BD}\widehat{\Omega}^A{}_B\widehat{\Omega}^C{}_D + \text{aff}T_{\text{int}}^{\text{aff}}, \quad (13.6)$$

$$\text{metr}T_{\text{int}}^{\text{aff}} = \frac{I}{2}g_{ik}g^{jl}\Omega^i{}_j\Omega^k{}_l + \text{aff}T_{\text{int}}^{\text{aff}}, \quad (13.7)$$

где I , A и B — постоянные, описывающие инерционные свойства тела во время внутреннего (относительного) движения. Другими словами это инерция по отношению к оборотам и однородным деформациям.

Если величины I , A и B удовлетворяют некоторым ограничениям, тогда выражения (13.6), (13.7) могут быть положительно определены. Многообразии таких троек (I, A, B) — это открытое подмножество в \mathbb{R}^3 .

Следуя вышеописанной схеме, которая задана выражениями (13.1)–(13.4), можно построить некоторые интересные римановские структуры на многообразии скалярных произведений, а точнее, на многообразии (обычно симметричных) билинейных форм заданных на действительном линейном пространстве и на многообразии (обычно эрмитовых) полуторалинейных форм заданных на комплексном линейном пространстве. Вышеупомянутые римановские структуры являются также инвариантными под действием "больших" групп, например целой линейной группы как в случае моделей (13.1)–(13.7). Кроме того, получающиеся уравнения для их геодезических кривых также являются очень сильно, существенно нелинейными.

Существует надежда, что такие модели нелинейной динамики на многообразиях полуторалинейных скалярных произведений могут быть полезны при описании оснований теории квантов. Возможно также, что они могут быть выгодны в объяснении проблемы декогеренции и квантовых парадоксов измерений.

В каждом случае предложенная нелинейность является геометрической, натуральной и не имеет характера малых возму-

щений. С уверенностью можно также сказать, что она не введена "вручную", как в некоторых искусственных моделях нелинейности в квантовой механике.

14. Сильно нелинейные реалистические геодезические модели, их строгая разрешимость и цепочки. Среди всех этих аффинных моделей с кинетической энергией, аффинно-инвариантной как минимум в физическом или материальном пространстве (13.5)–(13.7) имеются такие, которые задают упругую динамику лишь в самой кинетической энергии, безо всяких потенциалов. Это имеет место как минимум в том случае, когда φ сохраняет объём. Такие модели могут описывать упругие колебания, даже если они чисто геодезические, т.е. не содержат дополнительного потенциала. Это напоминает принцип Мопертюи. И такие модели, по крайней мере частично, могут быть явно решены на основе некоторых экспоненциальных матричных функций. Всё это имеет место благодаря замечательной связи между существенной нелинейностью и симметриями высших порядков. Это напоминает наши аффинно-инвариантные модели, формально определённые для полей линейных базисов в гравитации.

Связь с интегрируемыми цепочками можно увидеть, если воспользоваться так называемым биполярным разложением

$$\varphi = LDR^{-1}, \quad (14.1)$$

где матрицы L и R ортогональны, а матрица D диагональна.

Тогда L и R описывают два некоторых фиктивных гироскопа (ортонормальные главные оси тензоров деформаций Коши и Грина). Тогда вводят сопутствующие угловые скорости этих гироскопов,

$$\hat{\chi} = L^{-1} \frac{dL}{dt} = -\hat{\chi}, \quad \hat{\vartheta} = R^{-1} \frac{dR}{dt} = -\hat{\vartheta}, \quad (14.2)$$

и инварианты деформаций, т.е. диагональные элементы матрицы D :

$$D = \text{diag} (Q^1, \dots, Q^n). \quad (14.3)$$

Удобно воспользоваться представлением

$$D_{ii} = Q^i = \exp q^i, \quad (14.4)$$

т.е.

$$q^i = \ln Q^i. \quad (14.5)$$

Далее целесообразно ввести концепцию угловых моментов (спинов) для гироскопов L и R , которые определяются как величины, канонически сопряжённые к $\widehat{\chi}$, $\widehat{\vartheta}$. Эти канонические спины обозначим $\widehat{\rho} = -\widehat{\rho}$ и $\widehat{\tau} = -\widehat{\tau}$ соответственно. Введём также следующие вспомогательные величины:

$$M = -\widehat{\rho} - \widehat{\tau}, \quad N = \widehat{\rho} - \widehat{\tau}, \quad (14.6)$$

которые, конечно, кососимметричны. Канонические моменты, сопряжённые q^i , будут обозначены через p_i , а моменты, сопряжённые переменным Q^i — через P_i .

Тогда можно показать, что в рамках модели (13.5), рассмотренной для простоты в случае, когда $B = 0$ (это на самом деле только вторичная поправка), имеем

$$\text{aff} \mathcal{T}_{\text{int}}^{\text{aff}} = \frac{1}{2\alpha} C(2), \quad (14.7)$$

где α — множитель инерционного происхождения, а $C(2)$ — вторая функция Казимира:

$$\begin{aligned} C(2) &= \sum_a p_a^2 + \frac{1}{16} \sum_{a,b} \frac{(M^a_b)^2}{\text{sh}^2(q^a - q^b)/2} \\ &- \frac{1}{16} \sum_{a,b} \frac{(N^a_b)^2}{\text{ch}^2(q^a - q^b)/2}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Второе слагаемое описывает взаимное отталкивание инвариантов деформации, а третье — их притяжение. Вследствие этого имеются области ограниченного и рассеивающего движения (и существует чёткая граница между ними) даже в чисто геодезических моделях (предполагая только их аффинную инвариантность). Другими словами получаем геодезическое моделирование колебаний — конечно же за исключением дилатаций, которые стабилизируются с помощью некоторого потенциала $\mathcal{V}(q)$. Общие изотропные потенциалы имеют вид:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(q^1, \dots, q^n). \quad (14.9)$$

Дополнительно, принимая модель из разд. 12, упрощённую за счёт подстановки

$$J^{AB} = I\delta^{AB}, \quad (14.10)$$

выражающей изотропию тензора инерции, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{int}} &= \frac{1}{2I} \sum_a P_a^2 + \frac{1}{8I} \sum_{a,b} \frac{(M^a_b)^2}{(Q^a - Q^b)^2} \\ &+ \frac{1}{8I} \sum_{a,b} \frac{(N^a_b)^2}{(Q^a + Q^b)^2}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Ясно, что формулы (14.7), (14.8), (14.11) демонстрируют некоторое глубокое родство с интегрируемыми гиперболическими цепочками Сазерлэнда и Калоджеро [21] и могут быть использованы для анализа их решений. Отрицательный вклад в (14.8) отвечает за тот факт, что соответствующие геодезические модели могут описывать устойчивые, в каком-то смысле "ограниченные", упругие колебания.

Работа выполнена в рамках программы сотрудничества между Польской и Российской Академиями Наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stawianowski J.J.* Internal geometry, general covariance and generalized Born-Infeld models. Part I. Scalar fields // Arch. Mech. 1994. Vol. 46. No. 3. P. 375–397.
2. *Misner C.M., Thorne K.S. and Wheeler J.A.* Gravitation. San Francisco: Freeman. 1973.
3. *Bergmann P.G.* Introduction to the Theory of Relativity. New York: Prentice-Hall. 1942.
4. *Möller C.K.* Title // Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 1978. Vol. 39. No. 13. P. 1.
5. *Pellegrini C. and Plebański J.* Title // Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 1963. T. 2. No. 4. P. 1.
6. *Stawianowski J.J.* Generally-covariant field theories and space-time as a micromorphic continuum. Warsaw: Prace IPPT — IFTR Reports. 1988. Vol. 51. 92 p.
7. *Stawianowski J.J.* Search for fundamental models with affine symmetry: some results, some hypotheses and some essay // In: Proceedings of the Sixth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization (June 3-10, 2004, Varna, Bulgaria). Editors: Ivaïlo M. Mladenov and Allen C. Hirshfeld. Sofia: SOFTEX. 2005. P. 126–172.
8. *Stawianowski J.J.* Geometrically implied nonlinearities in mechanics and field theory // In: Proceedings of the Eighth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization (June 9-14, 2006, Varna, Bulgaria). Editors: Ivaïlo M. Mladenov and Manuel de León. Sofia: SOFTEX. 2007. P. 48–118.

9. *Ślawianowski J.J.* $GL(n, \mathbb{R})$ as a candidate for fundamental symmetry in field theory // *Il Nuovo Cimento B.* 1991. Vol. 106. P. 645–668.
10. *Chruściński D. and Kijowski J.* Generation of multipole moments by external field in Born-Infeld non-linear electrodynamics // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1998. Vol. 31. P. 269–276.
11. *Infeld L. and Plebański J.* *Motion and Relativity.* Oxford: Pergamon. 1960.
12. *Burov A.A. and Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // *Rep. on Math. Phys.* 2008. Vol. 62. No. 3. P. 325–363.
13. *Capriz G.* *Continua with Microstructure* // *Springer Tracts in Natural Philosophy.* Vol. 35. New York-Berlin-Heidelberg-Paris-Tokyo: Springer-Verlag. 1989.
14. *Capriz G. and Mariano P.M.* Symmetries and Hamiltonian Formalism for Complex Materials // *Journal of Elasticity.* 2003. Vol. 72. P. 57–70.
15. *Chevallier D.P.* On the Foundations of Ordinary and Generalized Rigid Body Dynamics and the Principle of Objectivity // *Arch. Mech.* 2004. Vol. 56. No. 4. P. 313–353.
16. *Ślawianowski J.J., Kovalchuk V., Ślawianowska A., Gołubowska B., Martens A., Rożko E.E. and Zawistowski Z.J.* Invariant geodesic systems on Lie groups and affine models of internal and collective degrees of freedom. Warsaw: Prace IPPT — IFTR Reports. 2004. Vol. 7. 164 p.
17. *Ślawianowski J.J., Kovalchuk V., Gołubowska B., Martens A. and Rożko E.E.* Dynamical systems with internal degrees

of freedom in non-Euclidean spaces. Warsaw: Prace IPPT — IFTR Reports. 2006. Vol. 8. 129 p.

18. *Ślawianowski J.J., Kovalchuk V., Ślawianowska A., Gotubowska B., Martens A., Rożko E.E. and Zawistowski Z.J.* Affine symmetry in mechanics of collective and internal modes. Part I. Classical models // Rep. on Math. Phys. 2004. Vol. 54. No. 3. P. 373–427.
19. *Ślawianowski J.J., Kovalchuk V., Ślawianowska A., Gotubowska B., Martens A., Rożko E.E. and Zawistowski Z.J.* Affine symmetry in mechanics of collective and internal modes. Part II. Quantum models // Rep. on Math. Phys. 2005. Vol. 55. No. 1. P. 1–45.
20. *Ślawianowski J.J. and Ślawianowska A.K.* Virial coefficients, collective modes and problems with the Galerkin procedure // Arch. Mech. 1993. Vol. 45. No. 3. P. 305–331.
21. *Calogero F. and Marchioro C.J.* Exact solution of a one-dimensional three-body scattering problem with two-body and/or three-body inverse-square potentials // Math. Phys. 1974. Vol. 15. P. 1425.

ГЛОБАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛЧКА ЭЙЛЕРА В ВИДЕ
ПРОИЗВОДНОГО ДЗЕТА-КОМПЛЕКСА

Д.Л. Абраров

Дается глобальная геометрическая интерпретация решения уравнений движения волчка Эйлера. Под глобальной структурой решения понимается аналитическая склейка ветвей классического решения в силу исходных уравнений. Она представляется специальной дзета-функцией [1]. Дана иерархическая структура глобального решения в виде функционального комплекса, включающая в виде подкомплексов \wp -функцию Вейерштрасса, Θ -функцию Римана и эллиптические функции Якоби, представляющие ветви классического решения.

Ключевые слова: случай Эйлера, специальная дзета-функция, функциональный комплекс.

1. Глобальное общее решение уравнений волчка Эйлера. Уравнение, описывающее движение тяжелого твердого тела в случае Эйлера, имеет вид:

$$\frac{dM}{dt} = [M, \omega], \quad (1.1)$$

где $t \in R$ – вещественное время, $M = I \cdot \omega$ – вектор кинетического момента твердого тела, ω – вектор угловой скорости тела, $[\cdot, \cdot]$ – оператор векторного произведения в евклидовом пространстве E^3 . При этом оператор I представлен диагональными матрицами размера 3×3 с положительными вещественными элементами, удовлетворяющими неравенству треугольника.

В [1] при учете свойства обратимости по времени t уравнений (1.1) получена аналитическая склейка ветвей классического

решения в силу уравнений (1.1), представляемого функциями Якоби со знаками \pm перед ними. Склеенное решение представляется нормированной экспонентой от ζ -функции специальной эллиптической кривой над полем рациональных чисел \mathbb{Q} .

Это решение дает пример точной разрешимости общих уравнений Эйлера-Пуассона в экспонентах от L -функций эллиптических кривых над полем \mathbb{Q} ([2]).

Теорема (глобальное общее решение уравнений волчка Эйлера). (см. [1]). Общее решение дифференциальных уравнений (1.1) представляется функцией

$$M(s) = \exp(\zeta(s, E/\mathbb{Q})\{\zeta(s, E/\mathbb{Q}) = 0(\text{mod } 3)\}), \quad s \in \mathbb{C}$$

где E/\mathbb{Q} – полустабильная эллиптическая кривая E/\mathbb{Q} над полем рациональных чисел \mathbb{Q} , задаваемая уравнением в аффинной форме

$$y^2 = x^3 + px + q,$$

где коэффициенты p, q принадлежат множеству рациональных чисел, функция $\zeta(s, E/\mathbb{Q})$ является ζ -функцией эллиптической кривой E/\mathbb{Q} . \square

Выражение $\{\zeta(s, E/\mathbb{Q}) = 0(\text{mod } 3)\}$ обозначает \mathbb{C}^3 -значный вектор, компонентами которого являются три первых нуля \mathbb{C} -значной функции $\zeta(s, E/\mathbb{Q})$. Таким образом, $M(s)$ является \mathbb{C}^3 -значной векторной функцией указанного вида.

2. Решение как функциональный дзета-комплекс.

Уравнение (1.1) может быть рассмотрено как дифференциальное уравнение, определяющее специальную функцию $\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))$. Данной функции ниже сопоставим функциональный комплекс (определение комплекса см. в [3]), остовами которого оказываются такие классические функции: экспонента $e^{2\pi iz}$, $\wp(z)$ -функция Вейерштрасса, $\Theta(z, \tau)$ -функция Римана, эллиптические функции Якоби $\text{sn}(t), \text{sn}(t), \text{dn}(t)$.

Этот комплекс будем называть производным дзета-комплексом. Структурой соответствующего комплекса наделяются и сами уравнения волчка Эйлера, остовами в котором являются уравнения для указанных тета-функций.

3. Эллиптические кривые E/\mathbb{Q} в контексте геометрии производного дзета-комплекса. Известно, что

$E/\mathbb{C} \cong \mathbb{C}/\Gamma \cong E^2/Z^2$ - одномерное абелево многообразие, гомеоморфное одномерному комплексному тору T^1 . Структура абелевого многообразия на E/\mathbb{C} индуцирована транзитивным действием группы S^1 на T^1 . Аналогично, можно показать, что

$E/\mathbb{Q} \cong E^3/Z^3/H$ - одномерное абелево многообразие, гомеоморфное одномерному комплексному проективному тору T^1 . Данное нестандартное представление кривой E/\mathbb{Q} в виде H -инвариантного топологического пространства $E^3/Z^3/H$ возможно, т.к. структура одномерного абелевого многообразия на E/\mathbb{Q} , согласованная с законом сложения точек на E/\mathbb{Q} , индуцирована транзитивным действием подгруппы H в группе $G \cong S^1 \otimes_R PSL_2(\mathbb{Q}_+)$ на торе T^1 , где \mathbb{Q}_+ - аддитивная группа поля \mathbb{Q} (см.[1], л. 1-3).

Группа G геометрически реализуется отображением непрерывного качения сферы S^2 по плоскости E^2 так, что его генератором является максимальная собственная изометрия куба, как CW -комплекса, вписанного в S^2 , относительно его главных диагоналей.

4. Визуализация классического и глобального решения волчка Эйлера по [1]. Классическое решение представляется монодромным качением куба, вписанным в стандартную сферу S^2 , по евклидовой плоскости E^2 :

Глобальное решение представляется симметризованным отображением монодромного качения куба, индуцированным $Z_2[t \rightarrow -t]$ -симметризацией направления стрелы времени (см. Рис.1):

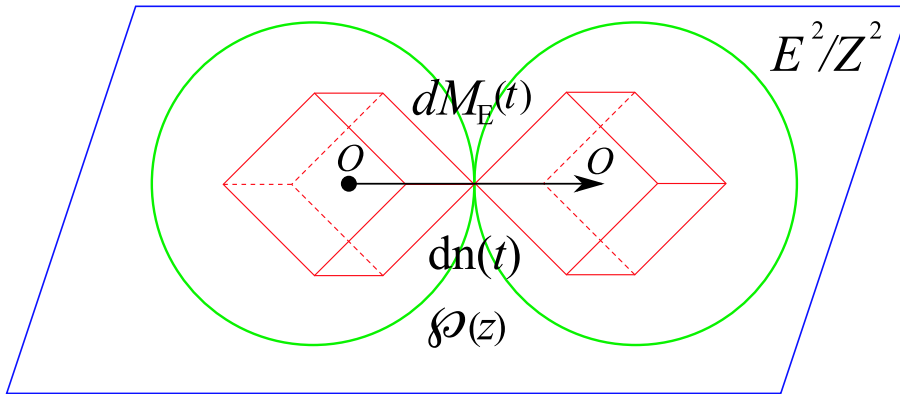


Рис. 1.

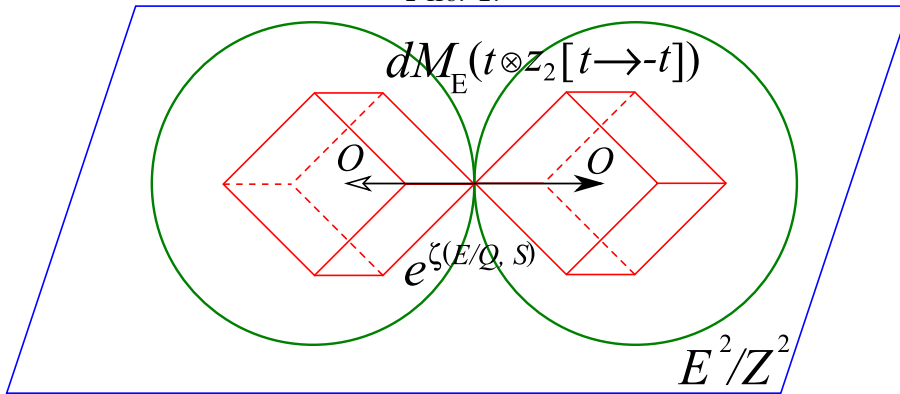


Рис. 2.

5. Аналитическое описание производного дзета-комплекса.

Теорема 1 (производный дзета-комплекс как функциональная иерархия). Общее решение уравнений (1.1) является функциональным комплексом, представляемым следующей точной последовательностью отображений, связывающих отображения $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$1 \xrightarrow{\text{id}} e^{2\pi iz} \xrightarrow{f_1} \wp(z) \xrightarrow{f_2} \theta(z, \tau) \xrightarrow{f_3} \text{dn}(t) \xrightarrow{f_4} \exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s)) \xrightarrow{f_5} 1,$$

где отображения f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 описаны в теореме 2.

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из теорем 2,3,4. \square

Теорема 2 (производный дзета-комплекс как симметричная иерархия). Пусть $Z_O^{E^3/Z^3}$ - отображение непрерывного центрально-подобного вращения в E^3 (это отображение непрерывной центральной симметрии в евклидовом пространстве E^3 , симметризованное по своим образующим (повороту на угол π и зеркальному отражению относительно точки на оси центральной симметрии) и генерируемое собственной симметрией правильного тетраэдра, представленной коммутатором $[D_2, D_2]$, где D_2 - группа Клейна, представляющая собственную симметрию срединных медиан тетраэдра (леммы 1-3 из [1])). Тогда имеется следующий комплекс отображений, канонически координатизирующий производное отображение $[Z_O^{E^3/Z^3}, Z_O^{E^3/Z^3}]$:

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\text{id}} H^0(Z_O^{E^1/Z^1}, \mathbb{C}[z])[e^{2\pi iz}] \xrightarrow{f_1} H^0(Z_O^{E^2/Z^2}, \mathbb{C}[z])[\wp(z)] \xrightarrow{f_2} \\ &\xrightarrow{f_2} H^0(Z_O^{E^2/Z^2}, \mathbb{H}_+[\tau])/\mathbb{C}[z][\Theta(z, \tau)] \xrightarrow{f_3} \\ &\xrightarrow{f_3} H^0(Z_O^{E^3/Z^3}, R/\mathbb{H}_+[\tau]/\mathbb{C}[z])[[\text{dn}(t)]] \xrightarrow{f_4} \\ &\xrightarrow{f_4} H^0([Z_O^{E^3/Z^3}, Z_O^{E^3/Z^3}], \mathbb{C}[s])[\exp(\zeta(E/Q, s))] \xrightarrow{f_5} 1, \end{aligned}$$

где $\mathbb{H}_+[\tau]$ - открытая верхняя полуплоскость комплексной плоскости \mathbb{C} и $\text{Im } \tau > 0$ - каноническая координата в \mathbb{H}_+ ; t, τ, z - соответствующие переменные.

Замечание. Данная точная последовательность отображений представляет канонические координаты на отображении C^1 -гладкого центрально-подобного вращения $[Z_O^{E^3/Z^3}, Z_O^{E^3/Z^3}]$ в пространстве E^3 , реализованного в виде функционального комплекса. При этом данный комплекс определен канонически, а его потенциалом является функция $\exp(\zeta(E/Q, s))$ (см. [1]).

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из теорем 3 и 4 (см. также [1]). \square

Теорема 3 (иерархия эллиптических функций Якоби). Классические эллиптические функции Якоби $\operatorname{cn}(t)$, $\operatorname{sn}(t)$, $\operatorname{dn}(t)$ представляются следующим инвариантным образом:

$$\operatorname{cn}(t) = H^0(\operatorname{Trace} Z_O^{E^3/Z^3}, R[t]/\mathbb{H}_+[\tau]/\mathbb{C}),$$

$$\operatorname{sn}(t) = H^0(\operatorname{Det} Z_O^{E^3/Z^3}, R[t]/\mathbb{H}_+[\tau]/\mathbb{C}),$$

$$\operatorname{dn}(t) = H^0(\operatorname{Det}^2 Z_O^{E^3/Z^3}, R[t]/\mathbb{H}_+[\tau]/\mathbb{C}),$$

где Det^2 - дважды итерированное детерминантное отображение Det .

Доказательство. Для канонических скалярных инвариантов симметрии непрерывного (класса C^0) центрально-подобного вращения $Z_O^{E^3/Z^3}$ имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\operatorname{Trace} Z_O^{E^3/Z^3}, R[t]/\mathbb{H}_+[\tau]/\mathbb{C}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(\operatorname{Det} Z_O^{E^3/Z^3}, R[t]/\mathbb{H}_+[\tau]/\mathbb{C}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(\operatorname{Det}^2 Z_O^{E^3/Z^3}, R[t]/\mathbb{H}_+[\tau]/\mathbb{C}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Теперь искомые выражения для функций $\operatorname{cn}(t)$, $\operatorname{sn}(t)$, $\operatorname{dn}(t)$ следуют из геометрической модели из [1]. \square

Замечание. Таким образом, в контексте теоремы 3 эллиптический тангенс $\operatorname{dn}(t)$, как отображение, является Z_2 -градуированным комплексом, четной (симметрической) и нечетной (кососимметрической) компонентами которого являются эллиптический косинус $\operatorname{cn}(t)$ и эллиптический синус $\operatorname{sn}(t)$ соответственно. Поэтому далее для краткости будем вместо тройки функций $\operatorname{sn}(t)$, $\operatorname{cn}(t)$, $\operatorname{dn}(t)$ писать только одну функцию $\operatorname{dn}(t)$ (см рис.1).

6. Алгебро-геометрическое описание производного дзета-комплекса и его струнно-осцилляторная интерпретация.

Теорема 4 (Проективная реализация симметрии производного дзета-комплекса). Имеет место канонический изоморфизм: $Z_O^{E^3/Z^3} \cong PGL_2(Q[t])$, где $t \in R$, $Q[t] = \frac{at+b}{ct+d}$, причем $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow GL_0(Q[t])[e^{2\pi iz}] \rightarrow GL_1(Q[t])[\wp(z)] \rightarrow \\ &\rightarrow PGL_1(Q[t])[\Theta(z, \tau)] \rightarrow PGL_2(Q_+[t])[\text{dn}(t)] \rightarrow \\ &\rightarrow Ad(PGL_2(Q[t]))[\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))] \rightarrow 1, \end{aligned}$$

где $Q_+[t] = Q[R[t]/\mathbb{H}_+[\tau]/\mathbb{C}[z]]$, Ad - присоединенное представление.

Доказательство. Следует из геометрической модели фазового пространства уравнений (1.1) (леммы 1-3 из [1]). \square

Соответствующая иерархия имеет место и для уравнений, которым удовлетворяют функции \wp , $\Theta(z, \tau)$, $\text{dn}(t)$ и $\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))$.

Теорема 5 (производный дзета-комплекс как дифференциальный градуированный комплекс). Пусть dM_E - пучок дифференциалов вектора M кинетического момента. Тогда имеет место следующая иерархия дифференциальных уравнений, представляющая уравнения волчка Эйлера как комплекс отображений пучка дифференциалов, параметризованного временем t :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow Z_2[t \rightarrow -t] \rightarrow H^1(dM_E, \mathbb{C}[z])[e^{2\pi iz}] \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(dM_E, \mathbb{C}[z^{-1}])[\wp(z)] \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(dM_E, \mathbb{C}[z \otimes \tau, z^{-1}])[\Theta(z, \tau)] \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(dM_E, \mathbb{C}[z, z^{-1}])[\text{dn}(t)] \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow H^1(dM_E, \mathbb{C}[z, z^{-1}]^{\otimes 2})[\zeta(E/\mathbb{Q}, s)] \rightarrow 1 \\ &\rightarrow H^1(dM_E, \mathbb{C}[z, z^{-1}]^{\otimes 3})[\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))] \rightarrow 1, \end{aligned}$$

где

- переменные z и s связаны соотношением $s = z \otimes PSL_2(Q[t])$;
- $Z_2[t \rightarrow -t]$ - отображение инволюции обратимости по времени исходных уравнений (1.1), имеющее смысл амплитудно-частотной характеристики колебаний одномерного гармонического осциллятора (нульмерный осциллятор); данное отображение задает максимальную градуировку дзета-комплекса;
- $H^1(dM_E, \mathbb{C}[z])[e^{2\pi iz}]$ - фазовый поток уравнений одномерных колебаний гармонического осциллятора (одномерный симплектический или стандартный гармонический осциллятор);
- $H^1(dM_E, \mathbb{C}[z^{-1}])[\wp(z)]$ - пространство решений функционального уравнения для \wp -функции, имеющее смысл уравнения колебаний одномерного проективно-симплектического гармонического осциллятора (одномерный проективно-симплектический гармонический осциллятор);
- $H^1(dM_E, \mathbb{C}[z \otimes \tau, z^{-1}])[\Theta(z, \tau)]$ - пространство решений уравнения, определяющего $\Theta(z, \tau)$ -функцию (см. [4]) (одномерный голоморфный гармонический осциллятор или открытая упругая струна).
- $H^1(dM_E, \mathbb{C}[z, z^{-1}])[(dn(t))]$ - фазовый поток уравнений (1.1), определяющих (см. [1]) движение тела в карте, не

содержащей бесконечно удаленной точки времени t (одномерный мероморфный гармонический осциллятор или абсолютно упругая, т.е. замкнутая жесткая струна).

- $H^1(dM_E, \mathbb{C}[z, z^{-1}]^{\otimes 3}[\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))])$ - уравнение (1.1), определяющее (см. [1]) функцию $\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))$ (одномерный бимероморфный гармонический осциллятор или замкнутая супержесткая струна).

Схема доказательства. Доказательство следует из структуры ядер отображений, определяющих дзета-комплекс:

- $\text{Ker } f_5 \cong H^1(dM_E, \mathbb{C}[z, z^{-1}]^{\otimes 3}[\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))])$ (леммы 11-14 из [2])
- $\text{Ker } f_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$ отображений f_i определяющих симметрию дзета-комплекса из теоремы 2. \square

7. Геометрическое описание производного дзета-комплекса.

Теорема 6 (Евклидова и конформная геометрия производного дзета-комплекса). Риманова поверхность функции $\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))$ -функции является фазовым пространством уравнений (1.1) и представляется кокасательным расслоением $T_{C^1}^*S^4$ стандартной четырехмерной сферы S^4 , имеющим класс гладкости C^1 . Данное расслоение диффеоморфно некоторой C^1 -гладкой структуре на семимерной сфере $S_{C^1}^7$. Одномерный остов данного комплекса представляет пространство решений (фазовых траекторий) дифференциальных уравнений (1.1) и канонически представляется некоторым классом эквивалентности (C^1 -диффеоморфности) больших кругов $S_{C^1}^1$ на сфере $S_{C^1}^7$.

Схема доказательства. Геометрическая модель общего решения уравнений (1.1), изображенная на рис.2, является симметризацией модели из работы [1]. Эта модель представляется

отображением монодромного C^1 -гладкого качения по плоскости двумерной сферы S^2 со вписанным в нее кубом, рассмотренным как бигрупповой CW -бикомплекс.

Можно заметить, что данная динамическая система имеет канонический скалярный фактор-инвариант

$$\sum_{i=1}^8 x_i^2 \left(\text{mod } \sum_{j=1}^4 y_j^2 \right) \cong H^0(S_{C^1}^7, R) / H^0(S_{C^1}^3, R),$$

где x_i, y_i - координаты вершин и главных диагоналей куба соответственно - на катящейся сфере S^2 относительно ее центра. Данный инвариант является каноническим скалярным инвариантом C^1 -гладкого кватернионного расслоения Хопфа сферы $S_{C^1}^7$, а именно, расслоения $S^7 \xrightarrow{S^3} S^4$ (см. соответствующее определение в [3]).

Следовательно, фазовое пространство указанной геометрической модели волчка Эйлера представляется кокасательным расслоением $T_{C^1}^* S^4 \cong S_{C^1}^7$, снабженным указанной выше нормировочной структурой.

В силу конструкции модели многообразие $T_{C^1}^* S^7$ является римановой поверхностью функции $\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))$.

Каждое частное решение уравнений (1.1) является собственным сечением пространства $T_{*,C^1} S^7$ и представляется большим кругом $S_{C^1}^1$ на C^1 -гладкой сфере $S_{C^1}^7$, что и требовалось доказать. \square

Следствие. Уравнение для \wp -функции представляет отображение монодромии куба (Рис.1); это отображение является четной частью используемого в доказательстве теоремы 6 отображения бимонодромии куба, ограниченного на противоположные пары его открытых граней.

Уравнение для $\Theta(z, \tau)$ -функции представляет отображение указанной монодромии куба для \wp -функции, ограниченного на противоположные пары его уже замкнутых граней.

Уравнение для $dn(t)$ -функции представляет отображение указанной монодромии куба без разбиения его на четную и нечетную части.

Уравнение для $\exp(\zeta(E/\mathbb{Q}, s))$ -функции представляет отображение бимонодромии куба (Рис. 2). \square

Автор благодарен С.Я. Степанову за полезные обсуждения и С.Ф. Адлаю за обсуждение свойств \wp -функции Вейерштрасса. Автор признателен В.О. Бучину за постоянную помощь в технической работе над текстами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 08-01-00600, 07-01-00295).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абраров Д.Л.* Решение уравнений волчка Эйлера с учетом их обратимости по времени // *Механика твердого тела.* – 2008. – вып. 38. – С. 31-55.
2. *Абраров Д.Л.* Точная разрешимость и каноническая модель уравнений Эйлера-Пуассона // *Механика твердого тела.* – 2007. – вып. 37. – С. 42-68.
3. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения, 2-е изд., – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 760 с.
4. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. / Пер. с англ. Д.Ю. Манина под ред. Ю.И. Манина. – М.: Мир, 1988. – 448 с.

ГЛОБАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ГОРОДСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

С. В. Зубарев, С. Я. Степанов

Разработана модель движения транспортных потоков путем объединения гидродинамических уравнений потока с алгоритмами поиска кратчайшего пути на графах.

1. Постановка задачи. Рассматривается глобальная модель динамики потоков движения автомобилей в рамках целого города, учитывая количество дорог, развязок, пропускную способность дорог и т.д. Помимо равномерно распределенных случайно движущихся автомобилей выделяется n потоков, каждый из которых движется в определенное время к своему месту назначения (автостоянки крупных учреждений и предприятий). Каждый из потоков имеет накопленную информацию об условиях проезда по конкретным улицам города. Исследуются законы взаимодействия потоков и динамика изменения этой информации от дня ко дню.

В модель не включены короткопериодичные факторы, такие как светофоры, которые создают колебания в масштабах нескольких десятков секунд в рамках одной улицы. Эти колебания в конечном итоге можно учесть соответствующим образом задавая пропускную способность улицы.

Предполагаются известными сеть улиц города и плотность автомобилей паркующихся на ночь на какой улице. Первоначальное утреннее распределение плотности автомобилей, выехавших на улицы, – нулевое. Далее в определенное время, которое основывается на оценке времени проезда до места назначения, автомобилисты начинают выезжать на улицы и двигаться

к пунктам своего назначения. В процессе движения запоминаются времена проезда, затраченные на проезд по той или иной улице, на основании которых вычисляется оптимальный путь и время начала следующей поездки.

Выделены 3 основных этапа реализации описанного алгоритма:

- 1) Описание движения автомобилей в рамках одной дороги;
- 2) Выбор оптимального пути с учетом структуры города и накопленного опыта;
- 3) Определение времени выезда на следующий день.

2. Движение по единичной дороге.

Пусть t - время, x - координата, отсчитываемая вдоль дороги в направлении движения потока, $v(x, t)$ ($0 \leq v \leq v_{max}$) - скорость потока и $\rho(x, t)$ - усредненная безразмерная плотность, определяемая как отношение площади занятой автомобилями S_1 к площади всего рассматриваемого участка движения S_0 .

$$\rho = \frac{S_1}{S_0}, \quad (2.1)$$

Для непрерывного потока машин имеет место уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = f(x, t) \quad (2.2)$$

Следуя работе Н. Н. Смирнова, А. Б. Киселева, В. Ф. Никитина, М. В. Юмашева [1] примем следующую зависимость скорости движения потока от плотности .

$$v(\rho) = \begin{cases} -k \ln(\rho), & e^{-\frac{v_{max}}{k}} < \rho \leq 1 \\ v_{max}, & 0 < \rho \leq e^{-\frac{v_{max}}{k}} \end{cases} \quad (2.3)$$

График этой зависимости представлен на рис.1.

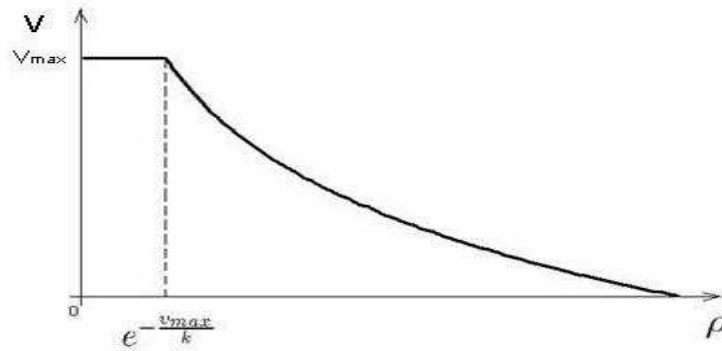


Рис. 1. зависимость скорости от плотности

Параметр k характеризует скорость распространения малых возмущений. Введем пропускную способность однополосной дороги $q = \rho v$ и используя предыдущую формулу, запишем q как функцию плотности потока ρ (см. рис. 2)

$$q(\rho) = \begin{cases} -k\rho \ln(\rho), & e^{-\frac{v_{max}}{k}} < \rho \leq 1 \\ \rho v_{max}, & 0 < \rho \leq e^{-\frac{v_{max}}{k}} \end{cases} \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что максимальная пропускная способность достигается при плотности $\rho = \frac{1}{e}$ и скорости $v = k$.

Для численного решения уравнения (2.2) используем разностную схему

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\Delta t} = \frac{\rho_{i-1}^j * V_i^j - \rho_i^j * V_{i+1}^j}{\Delta x} \quad (2.5)$$

где $V_i^j = V(\rho_i^j)$ – функция от ρ_i^j , определяемая формулой (2.3), индекс j соответствует разбиению времени t , а индекс i – разбиению по координате x .

Из (2.5) следует явная формула 1-го порядка для вычисления плотности ρ_i^{j+1} на $j + 1$ временном слое при одностороннем движении

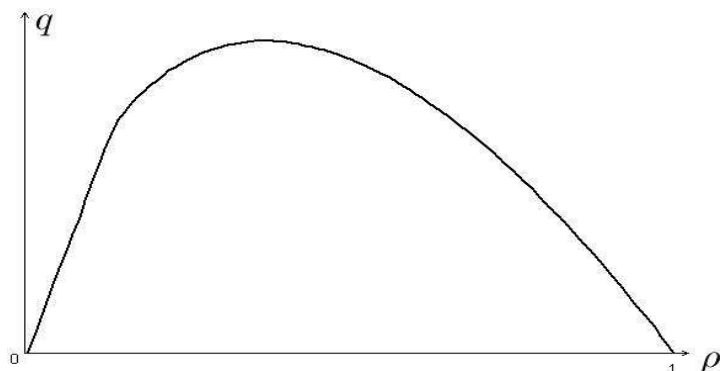


Рис. 2. зависимость пропускной способности от плотности

$$\rho_i^{j+1} = \rho_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} * (\rho_{i-1}^j * V_i^j - \rho_i^j * V_{i+1}^j) \quad (2.6)$$

При нескольких потоках (которые имеют различные пункты назначения), движущихся по одной улице, уравнение (2.6) записывается для каждого потока отдельно, но при вычислении скорости V используется суммарная плотность всех потоков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 08-01-00600, 08-08-00553).

ЛИТЕРАТУРА

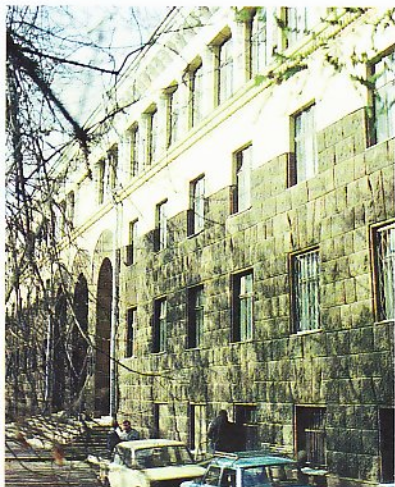
1. Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В. Математическое моделирование автотранспортных потоков. М.: мех-мат МГУ, 1999.
2. Bellomo N. and Delitala M. On the mathematical theory of vehicular traffic flow I. Fluid dynamic and kinetic modelling // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2002. V.12, No.12. P.1801-1843.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Сергеев В.С.</i> К задаче об устойчивости движения железно-дорожной колесной пары	3
<i>Муницына М.А.</i> Относительные равновесия точки в гравитационном поле прецессирующего динамически симметричного твёрдого тела	14
<i>Буров А.А., Косенко И.И.</i> О периодических движениях орбитального лифта	20
<i>Блинов А.П., Сумбатов А.С.</i> Об устойчивости стационарных движений разомкнутой связки трёх тел	48
<i>Кожевников И.Ф.</i> Динамика колёс с деформируемой периферией. Обзор	53
<i>Гусева Н.А., Кулешов А.С.</i> О применении теоремы В.В. Козлова для доказательства несуществования аналитических интегралов в некоторых задачах механики	84
<i>Адлай С.Ф.</i> Двойственность решений задачи о равновесии нити в притягивающих и отталкивающих полях параллельных сил	110
<i>Славяновский Я.Е., Ковальчук В.</i> Симметрия и геометрически обусловленные нелинейности в механике и теории поля	119
<i>Абраров Д.Л.</i> Глобальная геометрическая структура решения уравнений волчка Эйлера в виде производного дзета-комплекса	151
<i>Зубарев С.В., Степанов С.Я.</i> Глобальная динамика городских транспортных потоков	162

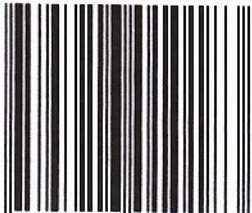
CONTENTS

<i>Sergeev V.S.</i> To the problem of stability of motion of a railway wheelset	3
<i>Munitsyna M.A.</i> Relative equilibria of a point in a gravitational field of the precessing dynamically symmetric rigid body	14
<i>Burov A.A., Kosenko I.I.</i> On periodic motions of an orbital elevator	20
<i>Blinov A.P., Sumbatov A.S.</i> On stability of stationary motions of an open-loop bunch of three bodies	48
<i>Kogevnikov I.F.</i> Dynamics of wheels with a deformable periphery. Survey	53
<i>Guseva N.A., Kuleshov A.S.</i> Application of V.V.Kozlov theorem for proving of nonexistence of analytical integrals for some problems of mechanics	84
<i>Adlaj S.F.</i> Duality of solutions of tether equilibrium problem in attracting and repelling fields of parallel forces	110
<i>Stawianowski J.J., Koval'chuk V.</i> Symmetries and geometrically implied nonlinearities in mechanics and field theory	119
<i>Abrarov D.L.</i> Global geometrical structure of the solution of the Euler top equations given in the derived dzeta-complex	151
<i>Zubarev S.V., Stepanov S.Ya.</i> Global dynamics of city transport flows	162



Учреждение Российской академии наук
Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына РАН
119991, Москва, ул. Вавилова, 40

ISBN 978-5-91601-018-3



9 785916 010183