УДК 531.36

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

А.А.Буров

Из аналитической механики хорошо известно, как при выполнении определённых условий невырожденности с помощью преобразования Лежандра по импульсам уравнения Гамильтона можно преобразовать в уравнения Лагранжа, и наоборот, с помощью преобразования Лежандра по скоростям уравнения Лагранжа можно преобразовать в уравнения Гамильтона . Преобразование Лежандра не по всем импульсам (или, соответственно, не по всем скоростям), позволяет описать движение с помощью уравнений, известных как уравнения Рауса. В [1, 2] В.М.Татевским были предложены ещё два класса уравнений, позволяющих описывать динамику – уравнения, получающиеся из уравнений Гамильтона преобразованием Лежандра по координатам, и уравнения, также получающиеся из уравнений Гамильтона преобразованием Лежандра по всем переменным. Эти уравнения и их вариационная природа в дальнейшем изучались в [3, 4], отчего в некоторых публикациях они называются уравнениями Райцина. Аналог уравнений Рауса, получающийся в результате применения преобразования Лежандра к произвольному подмножеству аргументов функции Гамильтона, изучался в [5, 6].

Различные свойства уравнений Татевского исследуются в современной научной литературе. Так в [7] изучался аналог понятия областей возможного движения в пространстве импульсов, бфли выписаны уравнения движения и приведён аналог метрики Якоби в пространстве импульсов для систем с потенциалом, квадратичным по координатам, в частности для *релятивистских систем. В [8] также исследовалась применимость таких уравнений при описании релятивистской механики, а работа [9] посвящена изучению симметрий этих уравнений и их точным и адиабатическим инвариантам.*

В настоящей работе изучаются свойства "установившихся состояний", получающихся в результате исследования аналога интеграла энергии для уравнений Татевского с помощью теории Рауса. Доказывается, что такие установившиеся состояния – не что иное, как равновесия исходной системы. Изучаются свойства их устойчивости. Предлагаемый подход к исследованию установившихся состояний сопоставляется с подходом, применявшимся Кастильяно в задачах теории упругости. На примерах обсуждается возможность получения аналогов уравнений Татевского из уравнений Пуанкаре - Четаева.

Ключевые слова: уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона, установившиеся движения, метод Кастильяно.

1. Уравнения Татевского и их связь с уравнениями Гамильтона и Лагранжа. Пусть

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.1}$$

система уравнений Гамильтона с гладкой функцией Гамильтона

$$H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \tag{1.2}$$

Одно из основополагающих утверждений аналитической механики гласит о том, что заменяя переменную $\mathbf{p}$ на новую переменную $\mathbf{v}$, определяемую соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \tag{1.3}$$

уравнения (1.1) можно записать в виде системы уравнений Лагранжа

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.4}$$

с функцией Лагранжа

$$L = L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t) = [\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)]_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{v},\mathbf{q},t)} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)$ находится из соотношений (1.3), рассмотренных как уравнения относительно $\mathbf{p}$.

Как было подмечено в [1, 2], можно рассматривать уравнения, получающиеся из уравнений Гамильтона преобразованием Лежандра не по импульсу, а по координате, а также уравнения, получающиеся из уравнений Лагранжа преобразованием Лежандра по координате. Напомним эти уравнения.

"Уравнения в импульсах". Если ввести функцию

$$H'(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = -H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \tag{1.6}$$

то уравнения Гамильтона (1.1) запишутся в "неканоническом виде"

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H'}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.7}$$

Правая часть второй группы уравнений (1.7) – сумма обобщённой силы и того, что в [1] называется "кинетической реакций"[1]. Введём обозначение

$$\mathbf{f} = \frac{\partial H'}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.8}$$

и предположим, что, по крайней мере локально, в окрестности некоторой точки фазового пространства, соотношения (1.8), рассмотренные как уравнения относительно $\mathbf{q}$, допускают единственное решение

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{f}, t) \tag{1.9}$$

Пусть теперь

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{f}, t) = [\mathbf{q} \cdot \mathbf{f} - H'(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{p},\mathbf{f},t)} \tag{1.10}$$

[1]Этот термин не является общеупотребимым в современной литературе по механике.

Тогда

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{q}, \quad \frac{\partial M}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{p}} \tag{1.11}$$

и уравнения (1.7) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f} \tag{1.12}$$

или – в более привычном виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{p}} \tag{1.13}$$

Таким образом, уравнения движения в виде (1.13) можно называть “уравнениями в импульсах”. Если их решение найдёно, то вторая группа уравнений (1.12) позволяет установить значения величин $\mathbf{f}$, определяющих скорость изменения импульса.

Замечание. Автору неизвестен принятый в механике термин для наименования векторной величины $\mathbf{f}$. Введение такого термина выглядит целесообразным в рамках предлагаемых рассуждений. На протяжении работы местами для этой величины будет использовано понятие “сила”, в котором кавычки указывают на то, что эта величины, в общем случае, не совпадает с обобщённой силой.

Замечание. С помощью первого соотношения (1.11) первое из уравнений (1.12) можно записать как

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}_p, \quad \mathbf{Q}_p = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{p}} \tag{1.14}$$

Об уравнении (1.14) в [2] говорится: “Эти уравнения можно назвать принципом Ньютона в пространстве импульсов”. Сам принцип в этой работе формулируется так: “производная от координаты равна силе в пространстве импульсов или p-силе”.

Пример 1. Для многих механических систем функция Гамильтона имеет вид

$$H = T(\mathbf{p}) + U(\mathbf{q}) \tag{1.15}$$

В этом случае соотношение (1.8) принимает вид

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.16}$$

Предположим, что, по крайней мере локально, соотношение (1.16) можно разрешить единственным образом относительно $\mathbf{q}$, и это решение имеет вид

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{f}) \tag{1.17}$$

Тогда функция Лагранжа (1.10) записывается как

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{f}) = [\mathbf{q} \cdot \mathbf{f} + U(\mathbf{q}) + T(\mathbf{p})]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{f})} = U^*(\mathbf{f}) + T(\mathbf{p}) \tag{1.18}$$

Функция $U^* = U^*(\mathbf{f})$ – аналог функции Кастильяно, возникающей в задачах упругой статики ([10], см. также, например, [11]).

Уравнения, получающиеся из уравнений Лагранжа преобразованием Лежандра по координате. Рассмотрим систему уравнений Лагранжа, записанную в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \tag{1.19}$$

с гладкой функцией Лагранжа

$$L = L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t) \tag{1.20}$$

Введём обозначение

$$\mathbf{f} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.21}$$

и рассмотрим равенство (1.21) как уравнение относительно $\mathbf{q}$. Предположим, что в окрестности точки фазового пространства существует и единстенное решение этого уравнения, которое запишем в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{v}, \mathbf{f}, t) \tag{1.22}$$

Рассмотрим функцию

$$K(\mathbf{f}, \mathbf{v}, t) = [\mathbf{f} \cdot \mathbf{q} - L]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{v},\mathbf{f},t)} \tag{1.23}$$

Тогда в силу (1.21), (1.22)

$$\frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{f} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{f}}\mathbf{f} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{q} \tag{1.25}$$

Это означает, что исходные уравнения Лагранжа представимы в виде

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}}\right) = \mathbf{f}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}}\right) = \mathbf{v} \tag{1.26}$$

или в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K'}{\partial \mathbf{v}}\right) = \mathbf{f}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K'}{\partial \mathbf{f}}\right) = -\mathbf{v} \tag{1.27}$$

если

$$K' = -K \tag{1.28}$$

Уравнения (1.26) естественно назвать уравнениями в скоростях и “силах”.

Пример 2. Пусть, как и для многих механических систем, функция Лагранжа имеет вид

$$L = T(\mathbf{v}) - U(\mathbf{q}) \tag{1.29}$$

В этом случае соотношение (1.21) принимает вид (ср. с (1.8))

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.30}$$

Предположим, что, по крайней мере локально, в окрестности некоторой точки $\mathbf{q}^0$, соотношение (1.16) можно разрешить единственным образом относительно $\mathbf{q}$, и это решение имеет вид

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{f}) \tag{1.31}$$

Тогда функция (1.23) записывается как

$$K(\mathbf{v}, \mathbf{f}) = [\mathbf{q} \cdot \mathbf{f} + U(\mathbf{q}) - T(\mathbf{v})]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{f})} = U^*(\mathbf{f}) - T(\mathbf{v}) \tag{1.32}$$

Функция $U^* = U^*(\mathbf{f})$ – вновь аналог функции Кастильяно.

Сами уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}\right) = \mathbf{f}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{f}}\right) = \mathbf{v} \tag{1.33}$$

Остаётся заметить, что

$$\frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{q} + \mathbf{f}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{f}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{q} \tag{1.34}$$

Замечание. Функции M и K не имеют специальных названий. В [1, 2] они именуются характеристическими функциями, что вряд ли можно признать удобным.

Замечание. Используемые функции H, K, L и M, а вместе с ними – и соответствующие описаниями движений получаются друг из друга не только так, как это описано выше, но и “напрямую”, с помощью надлежащих преобразований Лежандра, представленных Татевским в виде диаграммы (Рис.1, ср. [1, 2])

Замечание. В [1, 2] также исследовано представление движения с помощью функций M и K в случае, когда в системе также действуют неконсервативные силы. Изложенная там же теория систем со связями требует дополнительного осмысления.

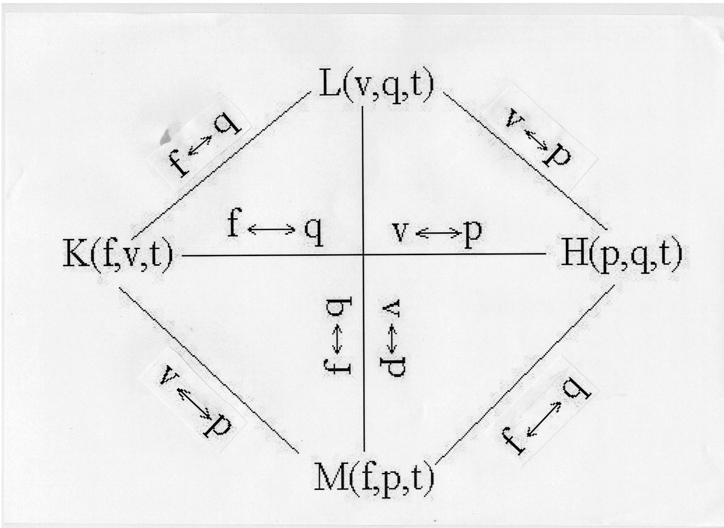

Рис. 1: Диаграмма Татевского.

2. Интеграл Пенлеве – Якоби. Предположим, что функции Гамильтона (1.2) и Лагранжа (1.20), а вместе с ними – и функции M и K не зависит явно от времени. Тогда уравнения (1.1), (1.19), (1.12) и (1.26) допускают Пенлеве – Якоби. В зависимости от выбора способа описания движения этот интеграл принимает вид

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H \tag{2.1}$$

для уравнений (1.1),

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L \tag{2.2}$$

для уравнений (1.19),

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}, \mathbf{p}) = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{f} - M \tag{2.3}$$

для уравнений (1.12) и

$$\mathcal{J}(\mathbf{v},\mathbf{f}) = K - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{f} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \tag{2.4}$$

для уравнений (1.26).

Пример 1. Продолжение. Так как в рассматриваемом примере функция H, а вместе с ней – и M, не зависит явно от времени, то интеграл (2.3) принимает вид

$$\mathcal{J}(\mathbf{f},\mathbf{p}) = \frac{\partial U^*(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{f} - U^*(\mathbf{f}) - T(\mathbf{p}) \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть, что этот интеграл отличается от интеграла энергии лишь знаком.

Пример 2. Продолжение. Так как в рассматриваемом примере функция L, а вместе с ней - и K, не зависит явно от времени, то интеграл (2.4) принимает вид

$$\mathcal{J}(\mathbf{v},\mathbf{f}) = U^* - T - \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{f} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \tag{2.6}$$

3. Существование и устойчивость “установившихся состояний”. В случае, когда имеют место интегралы (2.1) – (2.4) можно воспользоваться теорией Рауса для отыскания установившихся состояний и исследования условий их устойчивости. Для уравнений Лагранжа и Гамильтона и соответствующих им первых интегралов (2.1), (2.2) эта процедура хорошо известна [12] (см. также [14]). Исследуем, согласно методу Рауса. критические точки функций (2.3), (2.4).

Установившиеся состояния, описываемые “уравнениями в импульсах”. Для изучения установившихся состояний (УС) уравнений (1.12), обладающих первым интегралом вида (2.3), исследуем критические точки этого первого интеграла. Уравнения для критических точек имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{f}^2}\mathbf{f} + \frac{\partial M}{\partial \mathbf{f}} - \frac{\partial M}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{f}^2}\mathbf{f} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f} = 0 \tag{3.1}$$

в силу чего

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{f}} \mathbf{f} - \frac{\partial M}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\partial M}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{3.2}$$

Эти уравнения в точности эквивалентны уравнениям равновесия исходной гамильтоновой механической системы – в то время как в силу (1.7), (1.11) соотношение (3.2) определяет равенство нулю обобщённых скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ в УС, финальное соотношение (3.1) определяет равенство нулю "сил" $\mathbf{f}$, совпадающих в данном случае с обобщёнными силами в силу равенства нулю обобщённых скоростей.

Вторую вариацию первого интеграла на УС имеет вид

$$2\delta^2 \mathcal{J} = \delta \mathbf{f}^T \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{f}^2} \cdot \delta \mathbf{f} - \delta \mathbf{p}^T \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{p}^2} \cdot \delta \mathbf{p} \tag{3.3}$$

Если квадратичная форма (3.3) знакоопределённа, то исследуемое равновесие устойчиво по Ляпунову.

Для исследования достаточных условий неустойчивости и возможности устойчивости УС в первом приближении согласно общей теории требуется анализ индекса всей квадратичной формы (3.3). В случае, когда квадратичная форма знаконеопределённа, но индекс её чётен, то для исследования необходимых условий устойчивости можно выписать уравнения, линеаризованные в окрестности равновесия. Эти уравнения и их характеристический многочлен имеют привычный для лагранжевых систем вид

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \dot{\mathbf{p}}^2} \delta \ddot{\mathbf{p}} + \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \dot{\mathbf{p}} \partial \mathbf{p}} - \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{p} \partial \dot{\mathbf{p}}} \right) \delta \dot{\mathbf{p}} - \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{p}^2} \delta \mathbf{p} = 0 \tag{3.4}$$

$$P(\lambda) = \left| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{p}}^2} \lambda^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{p}} \partial \mathbf{p}} - \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{p} \partial \dot{\mathbf{p}}} \right) \lambda - \frac{\partial^2 M}{\partial \mathbf{p}^2} \right| = 0 \tag{3.5}$$

Если все корни уравнения (3.5) чисто мнимые, то говорят, что рассматриваемое равновесие устойчиво в первом приближении.

Пример 1. Продолжение. В рамках принятых в примере предположений уравнения равновесия имеют вид

$$\mathbf{f} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{3.6}$$

При этом, вторая вариация (3.3) принимает вид

$$2\delta^2 \mathcal{J} = \delta \mathbf{f}^T \frac{\partial^2 U^*}{\partial \mathbf{f}^2} \cdot \delta \mathbf{f} - \delta \mathbf{p}^T \frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{p}^2} \cdot \delta \mathbf{p} = 2\delta^2_{\mathbf{f}} \mathcal{J} + 2\delta^2_{\mathbf{p}} \mathcal{J} \tag{3.7}$$

Для механических систем квадратичная форма $\delta^2_{\mathbf{p}} \mathcal{J}$ отрицательно определённа в силу положительной определённости квадратичной по импульсам составляющей кинетической энергии $T = T(\mathbf{p})$. Тогда, в силу теоремы Рауса, если квадратичная форма $\delta^2_{\mathbf{f}} \mathcal{J}$, т.е. вторая вариация функции Кастильяно, также отрицательно определённа, то исследуемое УС устойчиво по Ляпунову.

Для систем расматриваемого вида по аналогией с классической теорией существования и устойчивости равновесий механических систем ([13, 14]) можно называть собственные значения квадратичной формы $\delta^2_{\mathbf{f}} \mathcal{J}$ коэффициентами устойчивости, а количество положительных коэффициентов устойчивости – степенью неустойчивости "по Пуанкаре". Тогда, как и в общем случае, равенство нулю степени неустойчивости означает устойчивость рассматриваемого равновесия по Ляпунову, нечётность степени неустойчивости означает неустойчивость этого равновесия, а чётность указывает на возможность гироскопической стабилизации.

Заметим, что хотя введённая таким образом функция Кастильяно не совпадает с силовой функцией, индексы их квадратичных форм второй вариации – одни и те же на одних и тех же УС.

Установившиеся состояния при описании движения в скоростях и "силах". Согласно теореме Рауса установившиеся состояния системы (1.26) в случае существования первого интеграла (2.4) определяются как его критические точки. Эти точки задаются уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}^2}\mathbf{v} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{f}}\mathbf{f} = \\ &= -\frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}^2}\mathbf{v} - \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{f}}\mathbf{f} = 0 \qquad (3.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{f}} &= \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}} - \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}\partial \mathbf{v}}\mathbf{v} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}} - \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}^2}\mathbf{f} = \\ &= -\frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}\partial \mathbf{v}}\mathbf{v} - \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}^2}\mathbf{f} = 0 \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Система (3.8), (3.9) всегда допускает решение

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{f} = 0 \qquad (3.10)$$

Ему отвечают обычные равновесия исходной системы, так как на этом решении обращаются в нуль как её скорость $\mathbf{v}$, так и обобщёння сила, совпадающая в данном случае с "силой" $\mathbf{f}$ из-за равенства нулю скорости. При этом, если определитель матрицы Гессе функции K отличен от нуля, то такое решение единственно.

Для исследования достаточных условий устойчивости решения (3.10) согласно теореме Рауса можно вычислить вторую вариацию интеграла (2.4) на этом решении. Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned}\delta^2 \mathcal{J} &= -\delta^2 K = \qquad (3.11) \\ &= -\left(\delta \mathbf{v}^T \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}^2}\cdot \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v}^T \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{f}}\cdot \delta \mathbf{f} + \delta \mathbf{f}^T \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}^2}\cdot \delta \mathbf{f}\right)\end{aligned}$$

где все частные производные вычислины на решении (3.10). Знакоопределённость второй вариации (3.11) влечёт за собой устойчивость исследуемого решения.

Для исследования необходимых условий устойчивости осуществляют линеаризацию уравнений (1.26) в окрестности равновесия (3.10). Линеаризованные уравнения принимают вид

$$-\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}^2}\delta\dot{\mathbf{v}} + \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{f}}\delta\dot{\mathbf{f}}\right) = \delta\mathbf{f}, \quad \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}\partial \mathbf{v}}\delta\dot{\mathbf{v}} + \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}^2}\delta\dot{\mathbf{f}}\right) = \delta\mathbf{v} \tag{3.12}$$

Тогда характеристическое уравнение записывается как

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}^2}\lambda & -\dfrac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{f}}\lambda - \mathbf{I} \\ \dfrac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}\partial \mathbf{v}}\lambda - \mathbf{I} & \dfrac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{f}^2}\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.13}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица размером $n \times n$. Если все корни уравнения (3.13) чисто мнимы, то говорят, что движение (3.10) устойчиво в первом приближении.

Пример 2. Продолжение. В условиях примера квадратичная форма (3.11) на решении (3.10) записывается в виде

$$\begin{aligned} 2\delta^2\mathcal{J} &= 2\delta^2_{\mathbf{v}}\mathcal{J} + 2\delta^2_{\mathbf{f}}\mathcal{J} = -\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \\ &= \delta\mathbf{v}^T \frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{v}^2} \cdot \delta\mathbf{v} - \delta\mathbf{f}^T \frac{\partial^2 U^*}{\partial \mathbf{f}^2} \cdot \delta\mathbf{f} \end{aligned} \tag{3.14}$$

если, как это обычно имеет место для механических систем, квадратичная форма $\delta^2_{\mathbf{v}}\mathcal{J}$ положительно определена, то решение будет устойчивым, если будет положительно определена квадратичная форма $\delta^2_{\mathbf{f}}\mathcal{J}$.

4. Уравнения Ньютона и их представление “в силах”. В предыдущих разделах существенно предполагалось, что исходные, подлежащие преобразованию уравнения движения либо гамильтоновы, как (1.1), либо лагранжевы, как (1.19). Откажемся от этих ограничений и рассмотрим механическую систему, описываемую дифференциально-алгбраическими уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \tag{4.2}$$

Введённые обозначения довольно прозрачны – величины $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ определяют состояние системы – её положение и скорость, в то время как величины $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^n$ задают импульс системы и действующую на неё “силу”.

Классу систем (4.1), (4.2) несомненно принадлежат уравнения движения материальной точки в трёхмерном евклидовом пространстве. На самом деле, если точка P массы m под действием силы $\mathbf{f}$ совершает движение в трехмерном евклидовом пространстве, то уравнения Ньютона имеют вид (4.1), где $\mathbf{x} \in R^3$ – декартовы координаты точки в конфигурационном пространстве, $\mathbf{v} \in R^3$ – её скорость, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – её импульс.

В дальнейшем предполагается, что ни инертные свойства системы, ни действующая на неё сила не зависят явно от времени.

Предположим, что соотношения (4.2) по крайней мере локально, в окрестности задающей начальные условия точки фазового пространства $(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}^0)$, могут быть разрешены единственным образом относительно $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{f}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{p}, \mathbf{f}) \tag{4.3}$$

Дифференцируя по времени соотношения (4.2) и опираясь на соотношения (4.1), имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \tag{4.4}$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}} \tag{4.5}$$

При выполнения условий невырожденности

$$\left|\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{v}}\right| \neq 0, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}\right| \neq 0$$

и после подстановки в имеющиеся в (4.4), (4.5) частные производные соотношений (4.3), из (4.4), (4.5) имеем

$$\dot{\mathbf{f}} = \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{v}}\right)^{-1} \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v}\right) = \mathbf{V}(\mathbf{f}, \mathbf{v}) \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}\right)^{-1} \left(\dot{\mathbf{f}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}\right)^{-1} \left(\mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v}\right) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{f}, \mathbf{v}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Уравнения (4.6), (4.7) “свободны” от координат $\mathbf{x}$, определяющих положения системы в конфигурационном пространстве. Они описывают движение в скоростях и “силах”, т.е задают поток в пространстве $(\mathbf{v}, \mathbf{f})$, причём траектория определяется начальными условиями $(\mathbf{f}^0, \mathbf{v}^0)$, первое из которых вычисляется с помощью второго соотношения (4.2) по начальным условиям $(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}^0)$ исходной задачи.

Предположим, что из уравнения (4.6) однозначным образом, по крайней мере локально, можно выразить скорость $\mathbf{v}$. Тогда

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) \tag{4.8}$$

Дифференцируя теперь уравнение (4.6) по времени и подставляя в полученное выражение сначала $\dot{\mathbf{v}}$ из (4.7), а затем – $\mathbf{v}$ из (4.8), имеем

$$\ddot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{f}}\dot{\mathbf{f}} = \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{f}}\dot{\mathbf{f}}\right]_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{f},\dot{\mathbf{f}})} = \mathbf{X}(\dot{\mathbf{f}}, \mathbf{f}) \tag{4.9}$$

На уравнения (4.9) можно смотреть как на уравнения динамики в "пространстве сил". При этом начальное значение $\dot{\mathbf{f}}^0$ определяется из уравнения (4.6), в то время как определение начального значения $\mathbf{f}^0$ по начальным данным исходной задачи описано выше.

Предположим теперь, что из уравнения (4.7) однозначным образом, по крайней мере локально, можно выразить "силу" $\mathbf{f}$. Тогда

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tag{4.10}$$

Дифференцируя теперь уравнение (4.7) по времени и подставляя в полученное выражение сначала $\dot{\mathbf{f}}$ из (4.6), а затем – $\mathbf{f}$ из (4.10), имеем

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{f}}\dot{\mathbf{f}} = \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{f}}\mathbf{V}\right]_{\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}})} = \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \tag{4.11}$$

На уравнения (4.11) можно смотреть как на уравнения динамики в "пространстве скоростей".

5. Функция Лагранжа, линейно-квадратичная по координатам. В ряде задач встречается ситуация, когда функция Лагранжа линейно-квадратична по координатам. В этом случае переход от уравнений Лагранжа к уравнениям Татевского может быть реализован в явном виде.

Пусть

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{b}^T\mathbf{q} + C \quad - \tag{5.1}$$

функция Лагранжа, такая, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{v}), \quad C = C(\mathbf{v})$$

Тогда

$$\mathbf{f} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{b}, \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{f}) \tag{5.2}$$

$$
\begin{aligned}
K &= \mathbf{q}^T(\mathbf{A}\mathbf{q}+\mathbf{b}) - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{b}^T\mathbf{q} - C = \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{A}\mathbf{q} - C = \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{f})\right)^T \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{f}) - C = \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{f})\right)^T (\mathbf{b}-\mathbf{f}) - C = \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{f}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{f}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - C
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Функция (5.3) позволяет представить уравнения движения в виде (1.26).

Пример 3. Релятивистская частица в квадратичном силовом поле Движение релятивистской частицы массы m определяется функцией Лагранжа (5.1) такой, что

$$
\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad C = mc^2\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{1/2}, \qquad \mathbf{A} = \text{const}, \quad \mathbf{B} = \text{const}
\tag{5.4}
$$

c – скорость света. Функция (5.3) после подстановки в неё соотношений (5.4) позволяет описать движение с помощью уравнений

$$
\frac{d}{dt}\left[m\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2}\mathbf{v} + \mathbf{B}^T\mathbf{q}\right] = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{q}
\tag{5.5}
$$

Так как дифференцирование второго соотношения (5.5) даёт

$$
\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{A}\mathbf{v}
$$

то дифференцирование уравнений (5.5) позволяет описать движение в скоростях. При этом уравнения движения принимает вид

$$
\frac{d^2}{dt^2}\left[m\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2}\mathbf{v}\right] = \left(\mathbf{B}-\mathbf{B}^T\right)\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{A}\mathbf{v}
\tag{5.6}
$$

Пример 4. Уравнения Вольтерра. Согласно [15], уравнения популяционной динамики при определённых предположениях могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа и Гамильтона. В оригинальных обозначениях ([15]) пусть $N_i(t)$ – число особей i-го вида, проживающих в момент времени t, а $X_i(t)$ – величина, такая, что

$$X_i(t) = \int\limits_0^t N_i(\tau)d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x}_i = N_i$$

В этом случае динамика популяции может быть описана уравнениями Лагранжа с функцией Лагранжа [15]

$$L = \chi + \frac{1}{2}Z + P \tag{5.7}$$

где

$$\chi = \sum_{r=1}^{n} \beta_r \dot{X}_r \log \dot{X}_r \quad - \tag{5.8}$$

функция, интеграл от которой по времени Вольтерра называет жизненным действием [2],

$$Z = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} \dot{X}_r X_s \quad - \tag{5.9}$$

слагаемое, отвечающее за популяционный аналог гироскопических взаимодействий,

$$P = \sum_{r=1}^{n} \beta_r \varepsilon_r X_r + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} c_{rs} X_r X_s \quad - \tag{5.10}$$

[2]фр.: `l'action vitale`

демографический потенциал [3]. Согласно Вольтерра, динамика популяции описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_r} \tag{5.11}$$

после преобразований принимающими вид

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_r \log \dot{X}_r\right) = \frac{\partial P}{\partial \dot{X}_r} + \sum_{s=1}^{n} a_{sr}\dot{X}_s \tag{5.12}$$

В работе [15] выполнено преобразование Лежандра функции Лагранжа (5.7) по скоростям, позволяющее преобразовать уравнения движения (5.12) к гамильтонову виду. Преобразование Лежандра функции Лагранжа (5.7) по координатам, задаваемое приведёнными выше соотношениями, выглядит гораздо более простым в силу его линейности.

6. О преобразование уравнений Пуанкаре - Четаева. Приведённые рассуждения относительно замен переменных в уравнениях Лагранжа и Гамильтона естественным образом распространяются и на более общий класс уравнений Пуанкаре - Четаева [16, 17]. Покажем это на двух примерах.

Пример 5. "Звёздная вахта". Вращение твёрдого тела вокруг центра масс в поле притяжения удалённых объектов Пусть спутник-гиростат $\mathcal{G}$ совершает вращение вокруг центра масс под действием моментов сил, порождаемых гравитирующими телами, расположенными от него на значительных расстояниях, например, удалёнными светилами. Пренебрегая поступательным движением спутника, его вращательное движение можно описать уравнениями вида (см., например, [18])

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \times \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} \tag{6.1}$$

[3] фр.: `le potentiel démographique`

$$L = T - U \tag{6.2}$$

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}), \quad U = \frac{1}{2}\left(æ_\alpha(\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + æ_\beta(\mathbf{I}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) + æ_\gamma(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})\right)$$

дополненными кинематическими уравнениями Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \tag{6.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – единичные векторы осей абсолютной системы координат, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости, $\mathbf{I}$ – центральный тензор инерции, $\mathbf{K}$ – вектор гиростатического момента, $æ_\alpha$, $æ_\beta$ и $æ_\gamma$ – постоянные, зависяцие от положения светил.

Выполним преобразование Лежандра функции Лагранжа (6.2) по избыточным, зависящим друг от круга переменным $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Имеем

$$\mathbf{f}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -æ_\alpha \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{f}_\beta = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -æ_\beta \mathbf{I}\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{f}_\gamma = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} == -æ_\gamma \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma} \tag{6.4}$$

В силу (6.4)

$$\boldsymbol{\alpha} = -(æ_\alpha \mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}_\alpha, \quad \boldsymbol{\beta} = -(æ_\beta \mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}_\beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = -(æ_\gamma \mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}_\gamma \tag{6.5}$$

и с помощью (6.5) можно выписать функцию

$$\begin{aligned} K &= [\mathbf{f}_\alpha \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{f}_\beta \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{f}_\gamma \cdot \boldsymbol{\gamma} - L] \\ &= U^* - T \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$U^* = -\frac{1}{2}\left(\left((æ_\alpha \mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}_\alpha\right) + \left((æ_\beta \mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}_\beta, \mathbf{f}_\beta\right) + \left((æ_\gamma \mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}_\gamma, \mathbf{f}_\gamma\right)\right) \tag{6.7}$$

Вычисления показывают, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = -\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \quad \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}, \quad \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}, \tag{6.8}$$

Это означает, что уравнения (6.1), (6.3) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\alpha} \times \mathbf{f}_\alpha + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\beta} \times \mathbf{f}_\beta + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\gamma} \times \mathbf{f}_\gamma \tag{6.9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\alpha} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\alpha}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\beta} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\beta}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\gamma} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}_\gamma}\times\boldsymbol{\omega} \tag{6.10}$$

Пример 6. Движение тела в жидкости в центральном поле сил В [19] изучалось движение твёрдого тела в идеальной жидкости в центральном поле сил. Было показано, что уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} \tag{6.11}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{6.12}$$

$$L = T - U, \quad T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{D}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{E}, \mathbf{v}), \quad U = U(\mathbf{r}) \tag{6.13}$$

дополненными кинематическими уравнениями Эйлера

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \tag{6.14}$$

Здесь $\mathbf{r}$ – вектор, соединяющий притягивающий центр и, например, центр масс тела, $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ – векторы абсолютных угловой скорости и скорости центра масс тела, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ – постоянные матрицы и векторы, определяющие кинетическую энергию изучаемой механической системы в целом, $U = U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия гравитационных и архимедовых сил.

Выполним преобразование Лежандра функции Лагранжа (6.2) по переменным $\mathbf{r}$. Имеем

$$\mathbf{f} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \tag{6.15}$$

Предположим, что соотношение (6.15) можно разрешить единственным образом относительно $\mathbf{r}$, и это решение имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{f}) \tag{6.16}$$

Тогда с помощью (6.16) можно выписать функцию

$$\begin{aligned} K &= [\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - L] \\ &= U^* - T \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$U^*(\mathbf{f}) = [\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} + U]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{f})} \tag{6.18}$$

Вычисления показывают, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = -\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{f} \tag{6.20}$$

Эти соотношения позволяют переписать уравнения движения (6.11), (6.12) и 6.14

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}} \times \mathbf{f} \tag{6.21}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{f} \tag{6.22}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{v} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{f}} \times \boldsymbol{\omega} \tag{6.23}$$

7. Обсуждение. Как было указано выше, в [2] было положено начало обсуждению применимости уравнений (1.14) в качестве эквивалентной альтернативы именуемого в этой работе принципом второго закона Ньютона. Такое обсуждение может оказаться целесообразным и для описания движения “в силах” или скоростях.

Список литературы

1. Татевский В.М. Характеристические функции в уравнениях динамики // Вестник Московского университета. 1947. Вып.5. С.83 – 104.

2. Татевский В.М. О некоторых формах уравнений динамики и их приложениях // ЖЭТФ. 1947. Т.17. Вып.6. С.520 – 529.

3. Raitzin C.M.A. Sobre una forma de las ecuasiones de la dinámica // Ann. de la Sociedad Scient. Argent. 1961. T.171. N.3-4. P.50.

4. Raitzin C.M.A. Sobre los principios varacionales de la dinámica// Ann. de la Sociedad Scient. Argent. 1963. T.176. N.1-6. P.62.

5. Дёмин В.Г. Об одной форме уравнений динамики // Труды Университета Дружбы Народов им. П.Лумумбы. 1966. Т.17. Сер. теоретическая механика. Вып.4. С.64.

6. Дёмин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968. - 352 С.

7. Буров А.А. О преобразовании уравнений механики // ПММ. 2003. Т.67. Вып.5. С.722-730.

8. Qiao Yong-Fen, Zhao Shu-hong, Sun Fu-Tian. Form Invariance of Raitzin's Canonical Equations of Relativistic mechanical System // Communs Theor. Phys. (Beijing, China). 2005. V.43. N.4. P.607 – 610.

9. Wang Peng, Fang Jian-Hui, Ding Ning, Zhang Xiao-Ni. Perturbation of Lie Symmetry and Hojman Exact and Adiabatic Invariants of Generalized Raitzin Canonical Equation of Motion // Communs Theor. Phys. (Beijing, China). 2007. V.48. N.4. P.615 – 618.

10. Castigliano C.A. Nuovo teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici // Atti R. Acad delle Sci. di Torino, 1875.

11. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983. 448 с.

12. Routh E.J. Treatise on the Stability of a Given State of Motion. 1877.

13. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.:ГИТТЛ. 1955. 208 с.

14. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС. 1998. 168 с.

15. Volterra V. Principes de biologie mathématique. Première partie. Les fondements de la théorie de la lutte pour la vie // Acta Biotheoretica. 1937. Vol.III. No.1. P. 1 – 36.

16. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la méchanique // CR Acad. Sci. 1901. Tome 132. P.369 – 371.

17. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М.: Наука. 1987 - 368 с.

18. Буров А.А. О пуассоновых вариациях в задаче об устойчивости равновесий в механике твердого тела // ПММ. 2010. Т.74. Вып.1. С.98 – 107.

19. Буров А.А., Шевалье Д.П. О движении твердого тела в жидкости под действием центральных сил ньютоновского притяжения // ПММ, 2001. Т.65. Вып.4.