

УДК 531.8

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПРЯМОЗУБОГО ЭВОЛЬВЕНТНОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

И. И. Косенко, И. К. Гусев

Описывается методика построения динамической модели редуктора с прямозубыми эвольвентными зацеплениями. Основное внимание уделяется технологии создания модели упругого контактирования цилиндрических тел. Для отслеживания контакта применяется техника задания контактирующих поверхностей при помощи неявных алгебраических/трансцендентных или дифференциально-алгебраических уравнений. При этом в компьютерной модели зубчатые колеса и корпус редуктора остаются трехмерными телами.

Ключевые слова: прямозубое эвольвентное зацепление, модель Джонсона, параметры зацепления, алгоритм отслеживания контакта, динамическая ошибка передачи, объектно-ориентированное моделирование

1. Введение. Компьютерное моделирование динамики редукторов различной конструкции является достаточно широко распространенной задачей в технике. Здесь можно выделить два крайних полюса подходов к построению моделей. Во-первых, для построения достаточно подробных динамических моделей можно использовать метод конечных элементов. При этом будет получаться максимально детальная динамическая картина реализации зубчатых зацеплений того или иного типа. Ясно также,

что для работы моделей, построенных на основе такого подхода, требуется весьма значительный вычислительный ресурс.

Во-вторых, на противоположном полюсе можно обнаружить упрощенные модели редукторов, позволяющие строить исключительно быстродействующие прототипы машин и агрегатов. Образцы подобных моделей мы можем найти, например, в Стандартной библиотеке языка Modelica [1]. Кроме того, на языке Modelica имеются также примеры построения моделей редукторов с достаточно хорошо проработанным динамическим описанием свойств этих устройств и учетом, в частности, влияния сил трения на характер протекающих в зубчатых зацеплениях процессов [2].

Представляется интересным рассмотреть более детально модель процесса контактирования в зубчатых зацеплениях, с одной стороны, применяя различные модели подавляющего контакта, с другой стороны, оставаясь, в рамках динамики систем твердых тел, что позволяет рассчитывать на относительно высокую вычислительную эффективность. Простейшей задачей в этом направлении можно считать моделирование на языке Modelica прямого эвольвентного зацепления.

2. Пространственная модель контакта цилиндрических тел. Оставаясь в рамках компонент библиотеки [4, 3] моделирования трехмерных движений твердых тел, естественнее всего обеспечить относительно плоскопараллельное движение тел цилиндрической формы (в нашем случае двух тел A и B) в плоскости, перпендикулярной образующей цилиндров, при помощи дополнительного тела C . С этим телом связывается вспомогательная

система координат так, что образующая будет все время параллельной оси $O_C z$, что выражается в виде геометрических условий $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{k}_C$ ($\alpha = A, B$), где \mathbf{k}_α ($\alpha = A, B, C$) — орты осей $O_\alpha z$ связанных с телами координатных систем. Чтобы обеспечить движение тел в плоскости, параллельной плоскости $O_C xy$, потребуем выполнения еще двух алгебраических условий на z -координаты центров масс тел A и B : $z_{O_A} = \text{const}$, $z_{O_B} = \text{const}$. Все координаты являются относительными по отношению к осям $O_C xy$.

Перечисленные алгебраические уравнения легко реализуются в неявной форме, если для фиксации тел A и B относительно тела C использовать, например, модели шарнирных связей [4]. В этом случае само тело C может совершать произвольные трехмерные движения, рассматриваемые нами как переносные (относительно некоторой инерциальной системы отсчета). Так что вполне естественно называть тело C корпусом редуктора (если A и B — модели зубчатых колес).

Также вполне естественно после произведенной редукции к плоскости $O_C xy$, строить аппарат механики контактирования цилиндрических тел при помощи средств двумерной геометрии. Например, отслеживание контакта цилиндров в двумерной формулировке по аналогии с [5] может быть записана в виде системы из шести (алгебраических или трансцендентных) уравнений вида

$$\begin{aligned} \text{grad } g_A(\mathbf{r}_{P_A}) &= \lambda \text{grad } g_B(\mathbf{r}_{P_B}), \\ \mathbf{r}_{P_A} - \mathbf{r}_{P_B} &= \mu \text{grad } g_B(\mathbf{r}_{P_B}), \\ g_A(\mathbf{r}_{P_A}) &= 0, \quad g_B(\mathbf{r}_{P_B}) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{r}_{P_\alpha} = (x_{P_\alpha}, y_{P_\alpha})^T$ ($\alpha = A, B$) — радиусы-векторы отслеживаемых в контакте точек P_A, P_B относительно координат

натной системы O_Cxy ; функции $g_\alpha(\mathbf{r})$ задают уравнения кривых, ограничивающих контуры тел A и B в системе координат O_Cxy , в виде $g_\alpha(\mathbf{r}) = 0$; λ, μ — вспомогательные скалярные переменные. В целом система (2.1) имеет шесть скалярных уравнений относительно шести скалярных переменных $x_{P_A}, y_{P_A}, x_{P_B}, y_{P_B}, \lambda, \mu$.

Аналогично, по примеру работы [6], можно построить модель отслеживания цилиндрического контакта в виде системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)

$$\dot{\mathbf{r}}_{P_A} = \mathbf{u}_{P_A}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{P_B} = \mathbf{u}_{P_B}, \quad \dot{\lambda} = \xi, \quad \dot{\mu} = \eta, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & [\boldsymbol{\omega}_A, \text{grad } g_A] + T_A \text{Hess } f_A T_A^T (\mathbf{u}_{P_A} - \mathbf{v}_{P_A}) - \\ & \quad \xi \text{grad } g_B - \\ \lambda & ([\boldsymbol{\omega}_B, \text{grad } g_B] + T_B \text{Hess } f_B T_B^T (\mathbf{u}_{P_B} - \mathbf{v}_{P_B})) = \mathbf{0}, \\ & \quad \mathbf{u}_{P_A} - \mathbf{u}_{P_B} - \eta \text{grad } g_B - \\ \mu & ([\boldsymbol{\omega}_B, \text{grad } g_B] + T_B \text{Hess } f_B T_B^T (\mathbf{u}_{P_B} - \mathbf{v}_{P_B})) = \mathbf{0}, \\ & \quad (\text{grad } g_A, \mathbf{u}_{P_A}) - (\text{grad } f_A, T_A^T \mathbf{v}_{P_A}) = 0, \\ & \quad (\text{grad } g_B, \mathbf{u}_{P_B}) - (\text{grad } f_B, T_B^T \mathbf{v}_{P_B}) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\mathbf{v}_{P_A}, \mathbf{v}_{P_B}$ — векторы относительных (по отношению к телу C) скоростей физических точек тел A и B , совпадающих в данный момент с геометрическими точками P_A, P_B . Эти скорости можно вычислить по формуле Эйлера в виде

$$\mathbf{v}_{P_\alpha} = \mathbf{v}_{O_\alpha} + [\boldsymbol{\omega}_\alpha, \mathbf{r}_{P_\alpha} - \mathbf{r}_{O_\alpha}] \quad (\alpha = A, B),$$

где O_A, O_B — центры масс тел, $\boldsymbol{\omega}_A, \boldsymbol{\omega}_B$ — угловые скорости тел относительно корпуса редуктора (всегда направлены вдоль оси O_Cz). Заметим, что точки O_A, O_B могут

оказаться на различных уровнях оси $O_C z$, но тем не менее уравнения (2.2), (2.3) нужно считать плоскими в проекции на плоскость $O_C xy$. В этом случае для полной реализации алгоритма отслеживания контакта необходимо уметь вычислять градиенты и гессианы в собственных осях тел $\text{grad } f_\alpha$, $\text{Hess } f_\alpha$ в отслеживаемых точках P_α . После этого можно найти, что $g_\alpha(\mathbf{r}) = f_\alpha [T_\alpha^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_\alpha})]$, $\text{grad } g_\alpha(\mathbf{r}) = T_\alpha \text{grad } f_\alpha [T_\alpha^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_\alpha})]$, где T_α — ортогональная 2×2 -матрица, задающая текущую (относительную) ориентацию тела $\alpha = A, B$.

3. Геометрические свойства прямозубого эвольвентного зацепления. Уравнение эвольвенты в плоскости $O_\alpha x_\alpha y_\alpha$ собственной системы координат $O_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ зубчатого колеса рассматривается для случая прямозубого эвольвентного зацепления. Это уравнение удобнее всего выписать в полярных координатах R_α, θ_α , задаваемых для каждого тела α известным образом: $x_\alpha = R_\alpha \cos \theta_\alpha$, $y_\alpha = R_\alpha \sin \theta_\alpha$. Для эвольвенты, «раскручивающейся» против часовой стрелки, уравнение в полярных координатах может быть выведено из известных соотношений [7] в виде

$$\frac{\sqrt{R_\alpha^2 - r_{ab}^2}}{r_{ab}} - \arccos \frac{r_{ab}}{R_\alpha} - \theta_\alpha = 0, \quad (3.1)$$

где r_{ab} — радиус основной окружности эвольвенты. Для вычисления $\text{grad } f_\alpha$ и $\text{Hess } f_\alpha$ следует выполнить преобразование координат $(x_\alpha, y_\alpha) \mapsto (R_\alpha, \theta_\alpha)$ и использовать вспомогательные матрицы Якоби, возникающие в процессе аналитических вычислений.

Имеющийся алгоритм отслеживания контакта требует вместо уравнения (3.1) представления уравнения кривой

внешней границы тела в виде уравнения $f(x, y) = 0$, задаваемого в декартовых координатах. Вводя обозначение

$$p(R, \theta) = \frac{\sqrt{R^2 - r_b^2}}{r_b} - \arccos \frac{r_b}{R} - \theta \quad (3.2)$$

можно обнаружить, что

$$p(R, \theta) = f(R \cos \theta, R \sin \theta). \quad (3.3)$$

Это уравнение играет ключевую роль при получении выражений для градиентов и гессианов. В самом деле, поскольку $\text{grad } p = (p_R, p_\theta)$, то в силу (3.3)

$$\text{grad } p = (f_x, f_y) \begin{pmatrix} x_R & x_\theta \\ y_R & y_\theta \end{pmatrix} = \text{grad } f \frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} \quad (3.4)$$

Следовательно

$$\text{grad } f = \text{grad } p \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} \right]^{-1}. \quad (3.5)$$

Из (3.2) можно видеть, что

$$\text{grad } p = \left(\frac{\sqrt{R^2 - r_b^2}}{r_b R}, -1 \right), \quad (3.6)$$

и из определения полярных координат следует соотношение

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -R \sin \theta \\ \sin \theta & R \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{R} & \frac{\cos \theta}{R} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Для завершения вычисления $\text{grad } f$ как функции от x и y достаточно положить

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{R(x, y)}, \quad \sin \theta = \frac{y}{R(x, y)}. \quad (3.8)$$

В силу равенства (3.4)

$$\begin{aligned} \text{Hess } p &= \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} \right)^T \text{Hess } f \frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} + \\ &\quad + f_x \text{Hess } x + f_y \text{Hess } y, \\ \text{Hess } p &= \begin{pmatrix} p_{RR} & p_{R\theta} \\ p_{\theta R} & p_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_b}{R^2 \sqrt{R^2 - r_b^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{Hess } x &= \begin{pmatrix} x_{RR} & x_{R\theta} \\ x_{\theta R} & x_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -R \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \text{Hess } y &= \begin{pmatrix} y_{RR} & y_{R\theta} \\ y_{\theta R} & y_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & -R \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В силу уравнения (3.9) формула для гессиана имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Hess } f &= \left[\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} \right)^T \right]^{-1} (\text{Hess } p - f_x \text{Hess } x - \\ &\quad - f_y \text{Hess } y) \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

В ее правой части все объекты выражаются явно в полярных координатах. Эти объекты, в свою очередь, могут быть выражены в декартовых координатах при помощи преобразования (3.8).

4. Реализация модели контактной силы. Описанные выше геометрические свойства модели контактирования эвольвент реализованы в виде класса-параметра базового шаблона, описанного в [8].

Для реализации модели силового контактного взаимодействия между зубьями колес прямозубого зацепления используем тот же класс-шаблон, что применялся раньше [8] для реализации геометрии зацепления. Здесь основное внимание уделяется технике вычисления нормальной упругой силы, возникающей при взаимном проникании внешних цилиндрических поверхностей (образующих эвольвент).

Согласно [9] одной из наиболее корректных моделей нормальной силы упругого взаимодействия между цилиндрами считают модель Джонсона [10], причем в [9] эта модель играет роль эталонной. Рассмотрим алгоритм вычисления силы в соответствии с этой моделью.

Уравнение, связывающее глубину h взаимного проникания (предполагаемых, как и в задаче Герца, геометрически твердыми) с величиной нормальной силы N , приходящейся на единицу длины контактирующих цилиндров, имеет вид

$$h = \frac{N}{\pi E^*} \left[\ln \frac{4\pi E^* (\rho_A + \rho_B)}{N} - 1 \right], \quad (4.1)$$

Данное уравнение выписано для случая так называемого внешнего контакта, когда в области контакта обе поверхности контактирующих тел выпуклы в направлении друг друга. В данном контексте случай внутреннего контакта не рассматривается. Присутствующая в уравнении (

4.1) величина E^* вычисляется из уравнения

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_A^2}{E_A} + \frac{1 - \nu_B^2}{E_B},$$

где E_A, E_B — модули упругости Юнга контактирующих тел, ν_A, ν_B — соответствующие коэффициенты Пуассона, и является приведенным модулем упругости контакта. Величины ρ_A, ρ_B являются радиусами кривизны эвольвент тел A и B , вычисленных в текущих точках отслеживания контакта P_A, P_B соответственно.

Замечание 1. *Формула (4.1) строилась для случая плоского контакта двух круговых цилиндров. В рамках предположения модели Герца об относительной малости области контакта по сравнению с размерами контактирующих тел, приближенно, с точностью до членов порядка выше второго в разложениях уравнений поверхностей по координатам отклонений от точек P_A, P_B , эвольвентные цилиндрические поверхности заменяются «мгновенными» круговыми цилиндрами с радиусами ρ_A, ρ_B , равными текущим радиусам кривизны эвольвент.*

Уравнение (4.1) задает величину удельной силы нормального давления N в виде неявной функции от h . В динамической модели редуктора формула (4.1) напрямую непригодна для непосредственного применения в секции поведения. Ситуация усложняется еще и тем, что, как станет видно в последующем динамическом анализе, неявная функция $N(h)$ определена уравнением (4.1) неоднозначно. В текущем положении контактирующих тел величины h, E^* (параметр, характеризующий материал тел), ρ_A, ρ_B следует считать заданными и искать величину N .

Удобнее всего уравнение (4.1) преобразовать к безразмерному виду

$$y \cdot \ln y = -x, \quad (4.2)$$

уравнения, задающего неявную функцию $y(x)$. Здесь

$$x = \frac{e}{4(\rho_A + \rho_B)}h, \quad y = \frac{e}{4\pi E^*(\rho_A + \rho_B)}N.$$

Уравнение (4.2) допускает решение $x = 0, y = 0$, соответствующее случаю начала контактирования, когда прямоугольная контактная площадка общего положения вырождается в линейный отрезок вдоль образующей цилиндрических поверхностей. Область монотонности функции левой части (4.2) – отрезок $[0, e^{-1}]$, причём эта функция монотонно убывает от нуля до $-e^{-1}$. Тогда область применимости модели Джонсона можно оценить неравенствами

$$h \leq \frac{4(\rho_A + \rho_B)}{e^2}, \quad N \leq \frac{4\pi E^*(\rho_A + \rho_B)}{e^2}. \quad (4.3)$$

Из Рис. 1 и из свойств эвольвенты (центры кривизны контактирующих эвольвент лежат в точках K_A, K_B) следует, что $\rho_A + \rho_B = |K_A K_B|$ с точностью до малой ошибки h . Поэтому величина h должна быть не более половины от величины $|K_A K_B|$, что всегда гарантировано при достаточно больших жесткостях. На самом деле в этом случае должно быть выполнено условие $h \ll |K_A K_B|$

В силу вышесказанного при достаточно большом значении модуля упругости материалов тел модель Джонсона реализуется с гарантией на отрезке $y \in [0, e^{-1}]$ монотонности функции левой части уравнения (4.2). Поскольку в точке $y = e^{-1}$ производная левой части (4.2) равна нулю, то ограничиваясь множеством строгой монотонности

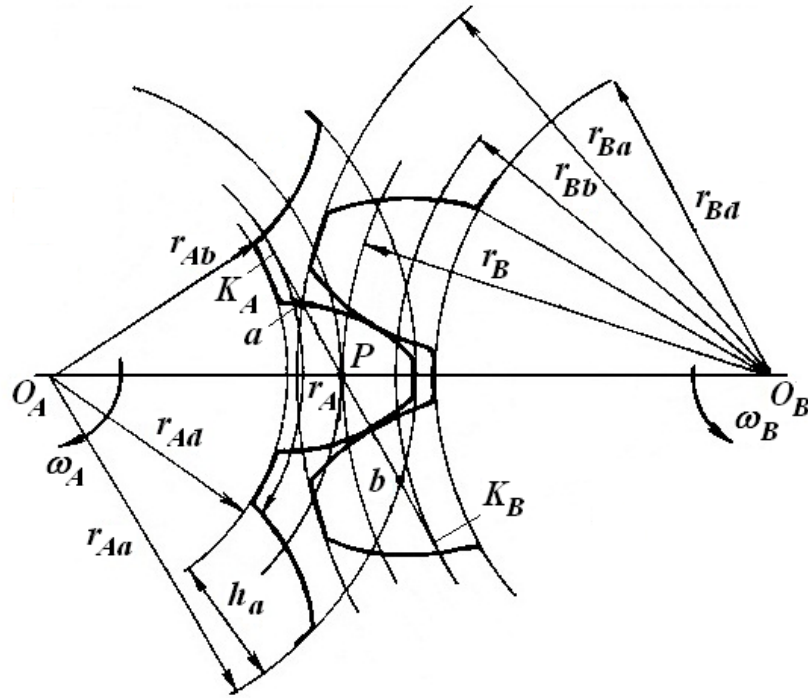


Рис. 1:

будем считать, что $0 \leq x < e^{-1}$ или, что эквивалентно, $0 \leq y < e^{-1}$.

Более того, вырождение имеет место в точке нулевого решения $x = y = 0$, поскольку производная от функции $y \ln y$ в этом случае бесконечна. Поэтому для вычисления функции $y(x)$ построим алгоритм с учетом условия $0 < x < e^{-1}$. Для этого преобразуем уравнение (4.2), вводя вместо неизвестной функции $y(x)$ масштабированную функцию $\eta(x)$ по формуле $y(x) = x\eta(x)$. Тогда уравнение

(4.2) принимает вид

$$\eta(\ln x + \ln \eta) + 1 = 0. \quad (4.4)$$

Введение вместо величины x величины

$$\nu = -\frac{1}{\ln x}$$

позволяет преобразовать уравнение (4.4) к более удобному виду

$$\eta = \nu(1 + \eta \ln \eta) \quad (4.5)$$

Заметим, что при малом $x > 0$ величина η также будет мала и положительна, причем $\eta \mapsto 0$ при $x \mapsto 0$.

Формула (4.5) в явной форме позволяет построить итерационный процесс

$$\eta_{n+1} = \nu(1 + \eta_n \ln \eta_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.6)$$

В качестве начального приближения здесь можно взять какое-нибудь значение $0 < \eta_0 \leq e^{-1}$.

Числовая последовательность $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$, построенная по итерационной формуле (4.6), будет строго положительной и ограниченной: $0 < \eta_n < \nu$. Следовательно, у этой последовательности будет хотя бы один предел. Поэтому существует подпоследовательность $\{\eta_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, сходящаяся к этому пределу: $\eta_{n_k} \rightarrow \eta_*$ при $k \rightarrow \infty$.

Этот предел единственен. В самом деле, в силу (4.6) предел удовлетворяет уравнению (4.5). Если бы был другой предел η_{**} , то он также должен удовлетворять уравнению (4.5), что невозможно, поскольку уравнение (4.5) на множестве $[0, 1)$ эквивалентно уравнению (4.2) на множестве $[0, e^{-1})$, которое имеет в точности одно решение.

Вычисления показывают, что итерационный процесс (4.6) сходится достаточно быстро. Достоинство этого процесса состоит в том, что он работает одинаково регулярно при всех допустимых значениях x . Кроме того, при любых сколь угодно малых $\eta > 0$ функция $\eta \ln \eta$ всегда остается равномерно ограниченной. Так что при любых допустимых значениях x итерационный оператор остается регулярным.

В качестве модели вязкой составляющей нормальной силы используется нелинейная модель, примененная в [6]. В модели касательной силы трения для простоты по примеру других работ [11] применялся регуляризованный закон Кулона [5]. Нет никаких трудностей изменить соответствующий класс-параметр и применить какую-нибудь более сложную зависимость силы трения от скорости относительного проскальзывания.

5. Алгоритм переключения пар контактирующих зубьев. В данной реализации рассматриваемой модели предполагается, что в начальный момент времени зубчатые колеса находятся в покое, и одна из пар зубьев колес A и B находится в контакте в геометрической точке a зацепления (Рис. 1). Для определенности зубчатое колесо A предполагается ведущим, а колесо B — ведомым. При этом соответствующий зуб колеса B имеет в начальной конфигурации в точке a свою угловую точку пересечения окружности вершин и эвольвенты зуба.

Для «запуска» системы ДАУ (2.2), (2.3), предназначенной для отслеживания контакта, необходимо обеспечить корректные начальные условия для этой системы. Начальные условия обеспечиваются для векторных переменных $\mathbf{r}_{PA}, \mathbf{r}_{PB} \in \mathbf{R}^3$ и скалярных переменных $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

В начальный момент «щёки» эвольвентных поверхностей контактирующих зубьев предполагаются просто геометрически «приставленными» друг к другу. Так что в момент начала моделирования предполагается, что

$$\mathbf{r}_{P_A}(t_0) = \mathbf{r}_{P_B}(t_0) = \mathbf{r}_a.$$

Поскольку эвольвентные поверхности при $t = t_0$ не «вдавлены» друг в друга, то «глубина» их взаимного проникания равна нулю

$$\mu(t_0) = 0.$$

Для вычисления начального значения $\lambda(t_0)$ в соответствии с первым уравнением системы уравнений (2.1) отслеживания контакта необходимо вычислить длины (ко-)векторов градиентов $|\text{grad } g_A|$, $|\text{grad } g_B|$ контактирующих поверхностей. Поскольку всегда предполагается, что градиенты направлены «наружу» от контактирующих тел, то следует считать, что $\lambda(t_0) < 0$. Так как функции g_A , g_B получаются из функций f_A , f_B при помощи твердотельных движений (поступательных перемещений и ортогональных поворотов) трехмерного пространства \mathbf{R}^3 , то

$$|\text{grad } g_\alpha| = |\text{grad } f_\alpha| \quad (\alpha = A, B).$$

Для расчета величины $|\text{grad } f_\alpha|$ воспользуемся формулами (3.5), (3.6), (3.7), полученными ранее. Имеем

$$\text{grad } f_\alpha = \left(\frac{\sqrt{R_\alpha^2 - r_{\alpha b}^2}}{r_{\alpha b} R_\alpha}, -1 \right) \begin{pmatrix} \cos \theta_\alpha & \sin \theta_\alpha \\ -\frac{\sin \theta_\alpha}{R_\alpha} & \frac{\cos \theta_\alpha}{R_\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{R_\alpha^2 - r_{ab}^2}}{r_{ab}R_\alpha}, -\frac{1}{R_\alpha} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta_\alpha & \sin \theta_\alpha \\ -\sin \theta_\alpha & \cos \theta_\alpha \end{pmatrix},$$

где R_α, θ_α — полярные координаты в собственной системе координат $O_\alpha x_\alpha y_\alpha$ тела α . Из последнего соотношения видно, что (ко)вектор $\text{grad } f_\alpha$ есть результат поворота на угол θ_α (ко)вектора

$$\left(\frac{\sqrt{R_\alpha^2 - r_{ab}^2}}{r_{ab}R_\alpha}, -\frac{1}{R_\alpha} \right),$$

длина которого равна

$$|\text{grad } g_\alpha| = |\text{grad } f_\alpha| = \frac{1}{r_{ab}} \quad (\alpha = A, B).$$

Таким образом, (ко)вектор градиента задающей эвольвенту функции имеет постоянную длину, обратно пропорциональную радиусу соответствующей основной окружности. Теперь из первого уравнения системы (2.1) имеем

$$\lambda(t_0) = -\frac{|\text{grad } g_A|}{|\text{grad } g_B|} = -\frac{r_{Bb}}{r_{Ab}}.$$

В результате установлено следующее

Утверждение 1. *В случае эвольвент уравнение*

$$\lambda = -\frac{r_{Bb}}{r_{Ab}}$$

задает интеграл движения для системы ДАУ (2.2), (2.3) отслеживания контакта.

При последующем разгоне ведущего (левого на Рис. 1) колеса в силу податливого характера рассматриваемой контактной модели в ситуации общего положения эвольвенты тел A и B «вдавятся» друг в друга.

Утверждение 2. *Взаимно противоположные точки P_A и P_B эвольвент, удовлетворяющие системе уравнений (2.2), (2.3), всегда находятся на прямой $K_A K_B$.*

Доказательство. В самом деле, для любой эвольвенты, «растущей» из основной окружности тела A или B , в точке её пересечения с прямой $K_A K_B$, вектор $\text{grad } g_A$ или $\text{grad } g_B$ всегда направлен вдоль линии $K_A K_B$. Это следует из того, что точка K_A является центром кривизны для любой эвольвенты, «растущей» из основной окружности колеса A в точке её пересечения с прямой $K_A K_B$ [7]. Аналогичную роль играет точка K_B для эвольвент, начинающихся на основной окружности колеса B . Так что всегда прямая $K_A K_B$ будет общей нормалью для любой пары эвольвент, на основных окружностях колес A и B . Поэтому всегда в точках их пересечения будут выполнены условия

$$\text{grad } g_A \parallel K_A K_B, \quad \text{grad } g_B \parallel K_A K_B.$$

Подбирая теперь соответствующим образом множители λ и μ получим, что радиусы-векторы \mathbf{r}_{P_A} , \mathbf{r}_{P_B} и величины λ , μ удовлетворяют системе алгебраических уравнений (2.1). При этом точки P_A , P_B находятся на прямой $K_A K_B$. Следовательно, при выполненном выше подходящем подборе начальных условий те же функции $\mathbf{r}_{P_A}(t)$, $\mathbf{r}_{P_B}(t)$, $\lambda(t)$, $\mu(t)$ в силу единственности удовлетворяют также и системе (2.2), (2.3) ДАУ отслеживания контакта. \square

В общем случае, в силу податливости контакта точка P_B будет находиться на прямой $K_A K_B$ левее и выше точки P_A (Рис. 1). Так что при повороте колеса A на угол $\Delta\gamma_A$ и достижении точкой P_A положения b , контакт, как таковой, не прекратится. Прекращение контакта произойдет лишь тогда, когда точка P_B достигнет (и пройдет) положение b .

При этом, в указанном промежутке времени между проходами положения b сначала точкой P_A , а затем – точкой P_B , контакт, вообще говоря, будет более сложным, чем предусматривается в модели Джонсона. Здесь в эвольвентную поверхность зуба колеса B будет вдавливаться острый (или закругленный) угол зуба колеса A .

Одновременно с прохождением точкой P_A положения b аналогичная ей точка P'_A следующего по вращению зуба будет проходить положение a . При этом, в силу уже имеющегося запаздывания во вращении колеса B (по причине податливости контакта) точка P'_B следующего зуба колеса B будет лежать выше и левее точки P'_A . Когда вслед за точкой P'_A точка P'_B достигает положения a , контактная модель, до того включавшая угловую точку следующего зуба колеса B , снова будет соответствовать модели Джонсона.

Таким образом, в случае модели контакта с податливостью неизбежно присутствие сразу двух контактов: а) контакта, «убывающего» после прохождения точки P_A текущей пары зубьев через положение b и б) контакта, «нарастающего» после прохождения точки P'_A следующей пары зубьев через положение a . Напомним, что оба «прохождения» возникают одновременно, в один и тот же момент.

В описываемой модели контактирования будем придерживаться упрощенного приближенного подхода, при кото-

ром в момент прохождения точкой P_A положения b контактная модель Джонсона мгновенно переключается на следующую пару зубьев в момент t_* прохождения соответствующей точкой P'_A положения a .

При этом, как и ранее, следует положить

$$\mathbf{r}_{P_A}(t_*) = \mathbf{r}_a, \quad \lambda(t_*) = -\frac{|\text{grad } g_A|}{|\text{grad } g_B|} = -\frac{r_{Bb}}{r_{Ab}},$$

где t_* — момент переключения контакта. Для вычисления вектора $\mathbf{r}_{P_A}(t_*)$ и для задания величины $\mu(t_*)$ достаточно найти расстояние между точками P'_A и P'_B новой пары зубьев.

Нетрудно убедиться, что это расстояние в точности равно расстоянию $|P'_A P'_B|$, вычисленному для текущей пары зубьев в тот же момент (прохождения позиции b). В самом деле, в силу свойств эвольвенты расстояние $|P_A P'_A|$ в точности равно длине дуги основной окружности колеса A , соответствующей углу $\Delta\gamma_A$, на который повернется тело A за один шаг зуба. Аналогично $|P_B P'_B|$ — это дуговое расстояние шага основной окружности колеса B при его повороте на угол $\Delta\gamma_B$. Так что по построению зубчатой передачи $|P_A P'_A| = |P_B P'_B|$.

Но поскольку $|P_A P'_A| = |P_A P_B| + |P_B P'_A|$, $|P_B P'_B| = |P_B P'_A| + |P'_A P'_B|$, то $|P_A P_B| = |P'_A P'_B|$. С другой стороны, для текущей пары зубьев

$$\mu(t_*-) = -\frac{|P_A P_B|}{|\text{grad } g_B|} = -|P_A P_B| r_{Bb}.$$

Для следующей пары аналогично

$$\mu(t_*) = -\frac{|P'_A P'_B|}{|\text{grad } g_B|} = -|P_A P_B| r_{Bb} = \mu(t_*-),$$

поскольку $|P_A P_B| = |P'_A P'_B|$, а вектор $\text{grad } g_B$ имеет постоянную длину $1/r_{Bb}$. Теперь, наконец, следует положить

$$\mathbf{r}_{P_B}(t_*) = \mathbf{r}_{P_A}(t_*) + \mathbf{r}_{P_B}(t_*-) - \mathbf{r}_{P_A}(t_*-).$$

Последующие переключения контактирующих пар зубьев выполняются аналогично.

Замечание 2. *Для простоты и определенности в рассматриваемой модели ослабление и исчезновение контакта зубьев не учитывается. Для такого учета требуется более сложная реализация.*

6. Реализация на языке Modelica. На основе накопленного опыта представляется полезным для разработки широкого класса моделей упругого контактного взаимодействия твердых тел в механических системах использовать гибкость языка Modelica. Набор основных свойств механического контакта можно классифицировать в следующие четыре категории:

- а) геометрические свойства поверхностей тел в окрестности пятна контакта (градиенты функций, задющих поверхности, их матрицы Гессе);
- б) модель для вычисления размеров области контакта и нормальной упругой силы;
- в) модель для нормальной силы вязкого сопротивления;
- г) модель касательных сил вдоль плоскости контактной площадки.

Подмодель геометрических свойств предназначена для аналитического описания контактирующих поверхностей достаточно сложной структуры. Описание шаблона модели геометрических свойств в общем случае дано в [6]. Частный случай эвольвентных цилиндров был описан выше. Для реализации алгоритма вычисления нормальной упругой силы можно выбрать из нескольких возможностей: а) общий пространственный случай (модель Герца или её объемометрическая модификация [8]); б) случай поверхностей, имеющих цилиндрическую симметрию (описанная выше реализация контактной модели Джонсона). В последнем случае считается, что приближенно пятно контакта является прямоугольной полосой, в общем случае — достаточно тонкой. Нормальная упругая сила предполагается равномерно распределенной по контактной площадке вдоль образующей цилиндра. Нормальная сила вязкого сопротивления также может быть рассчитана несколькими различными способами: по линейной модели, по нелинейной модели, с гистерезисом и т. д. В моделях для касательных сил можно принять либо «упрощенные» подходы, основанные на модели трения Амонтона – Кулона, либо более сложные модели, представляемые, например, моделью Контенсу – Эрисмана [12], или еще более усложненные модели.

В описываемом здесь подходе для реализации модели контакта двух зубчатых колес с прямозубым эвольвентным зацеплением был применен шаблон класса, разработанный ранее [8] на языке Modelica. Шаблон имеет четыре класса-параметра, задающих модели: а) нормальной упругой силы, б) нормальной силы вязкого сопротивления, в) касательной силы сопротивления при относитель-

ном проскальзывании в контакте, γ) геометрии поверхностей в окрестности контакта (в нашем случае — это цилиндры с эвольвентными направляющими). Визуальная модель шаблона на различных стадиях наследования показана на Рис. 2. Описание базового шаблона класса контактной модели полностью реализовано в рамках общего подхода для конструирования моделей механических связей, представленного ранее в [4].

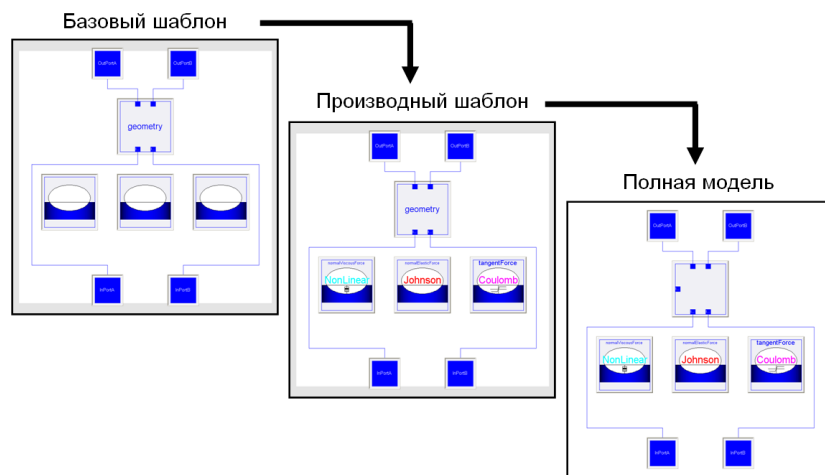


Рис. 2:

Для разработки полной работающей модели контакта можно поступить различным образом. Для решения описываемой задачи конструирования класса контакта двух твердых упругих тел удобны средства параметризации классов, обеспеченные в языке Modelica. В нашем случае имеется четыре упоминавшихся выше класса-параметра. Пример того, как можно было бы построить конкретную

модель взаимодействия, представлен на Рис. 2 и включает следующие две стадии наследования:

1. Получение шаблона с заполненными моделями для сил, именно: моделью Джонсона для нормальной упругой силы, моделью нелинейной вязкой нормальной силы сопротивления, моделью Амонтона – Кулона для сил сухого трения. Для этого нужно «заполнить» три гнезда в середине визуальной модели базового шаблона (это показано в визуальной модели производного шаблона в центральном положении на Рис. 2).
2. Вся конструкция завершается определением геометрической подмодели для контактирующих поверхностей. Здесь следует «запечатать» гнездо для геометрических свойств (показано на завершенной визуальной модели в правом нижнем углу Рис. 2).

На всех стадиях наследования рассмотренные шаблоны имеют внутренние информационные межсоединения для «гнезд», в которые устанавливаются подмодели. Эти межсоединения реализованы при помощи уравнений, скрытых за визуальной моделью. Уравнения, в свою очередь, могут варьироваться для различных моделей, требующих различных переменных для алгоритмов вычисления нормальных и касательных сил полной модели. Так что вся картина напоминает многослойную плату компьютера с гнездами и проводными межсоединениями во внутренних слоях (базовый шаблон). В этом случае роль чипов, устанавливаемых в гнезда, играют классы-параметры четырех вышеупомянутых типов. При этом производный шаб-

лон (в середине на Рис. 2) сам может интерпретироваться в виде платы-накладки, со своими внутренними межсоединениями, обслуживающими установленные фактические классы-параметры.

Нужно, наконец, заметить, что представленный здесь подход позволяет достаточно быстро и легко менять различные типы моделей упругого контактирования при разработке виртуальных прототипов динамики систем тел.

Ясно, что при работе редуктора пара зубьев колес A и B не может оставаться в зацеплении длительное время. На Рис. 1 можно видеть, что в случае вращения ведущего колеса (A) по часовой стрелке точка (или отрезок прямой) контакта, или, точнее, достаточно малое контактное пятно, движется от точки a к точке b , лежащих на линии зацепления $K_A K_B$. В тот самый момент, когда текущая пара зубьев теряет контакт в геометрической точке b , в геометрической точке a приходит в контакт следующая пара зубьев, и новая контактная «точка» начинает свое движение прямой линии зацепления.

Для простоты здесь рассматривается процесс зацепления без взаимного перекрытия интервалов времени контактирования пар зубьев. Если бы такое перекрытие имело бы место, то следовало бы создать не менее двух объектов контактирования, «соединяющих» объекты тел A и B . Эти объекты контакта должны поочередно активироваться/деактивироваться при возникновении контакта в точке a / его исчезновении в точке b .

При перемещении пятна контакта от точки a до точки b каждое из колес A , B поворачивается на шаговый угол (угловое расстояние между радиусами соответственных точек соседних зубьев) $\Delta\gamma_A$, $\Delta\gamma_B$ соответственно. По-

следний класс в рассмотренной выше линии наследования помимо вычисления градиентов и гессианов реализует также процесс переключения пар зубьев, синхронизируя, таким образом, это переключение с соответствующими углами поворота тел A и B . Этот механизм (для скачков точек контакта при переключениях) реализован при помощи средств управления событиями языка Modelica.

7. Параметры виртуальной экспериментальной установки. Для проведения испытаний разработанной модели зацепления была построена виртуальная установка, состоящая из двух зубчатых колес: ведущего A и ведомого B . Для простоты предполагается, корпус редуктора C является неподвижным телом. Начало O_C инерциальной системы координат O_Cxyz совпадает с центром колеса A , в котором находится цилиндрический шарнир, соединяющий тела A и C . Центр колеса B расположен на горизонтальной оси O_Cx . В нем находится второй цилиндрический шарнир, соединяющий тело B и вспомогательный ползун S . Ползун S , в свою очередь, может свободно скользить относительно тела C вдоль оси O_Cx . Однако это скольжение ограничивается сдерживается пружиной очень большой жесткости, соединяющей тела C и S .

В данной экспериментальной установке мы ввели податливость между телами B и C , обеспечиваемую при помощи вспомогательного ползуна S . Эта податливость направлена вдоль линии O_AO_B , соединяющей центры колес и совпадающей с осью O_Cx . Такая конструкция предотвращает возникновение статической неопределимости в модели для случая твердотельного контакта по точке в зубчатом зацеплении колес A и B . На Рис. 3 показана визуальная модель виртуальной экспериментальной уста-

НОВКИ.

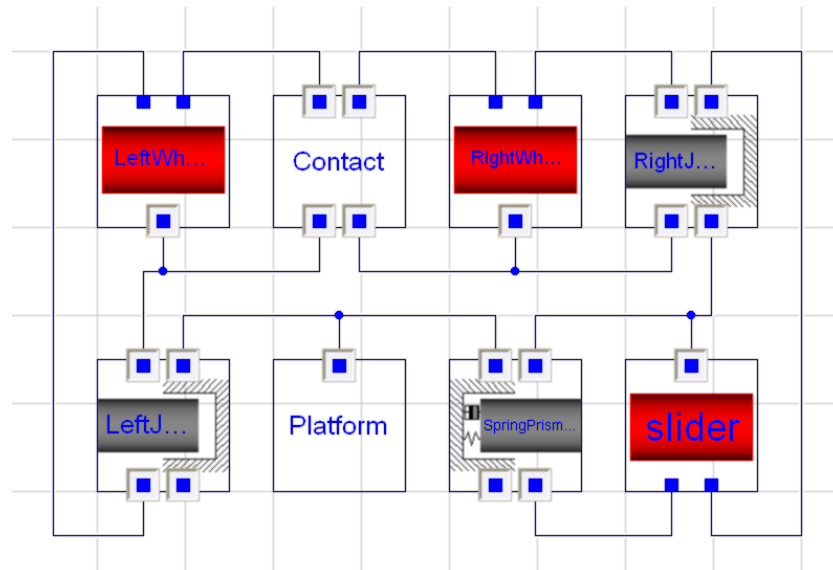


Рис. 3:

Предварительная цель наших численных экспериментов — сравнить две модели контактирования в зацеплении: а) модель Джонсона, б) модель твердого контакта без податливости. В модели зацепления задаются следующие независимые параметры:

- $z_A = 20$ — число зубьев ведущего колеса;
- $z_B = 30$ — число зубьев ведомого колеса;
- $r_A = 0.2\text{м}$ радиус начальной окружности ведущего колеса.

После этого остальные геометрические характеристики вычисляются в виде:

- $n = z_B/z_A$ – передаточное число;
- $r_B = nr_A$ – радиус начальной окружности ведомого колеса;
- $\Delta\gamma_A = 2\pi/z_A$, $\Delta\gamma_B = 2\pi/z_B$ – шаговые углы ведущего и ведомого зубчатых колес.

Для дальнейшего определения зацепления важное значение имеет задание величины угла зацепления. Она может выбрана при удовлетворении условия

$$\alpha_w > \alpha_{w \text{ inf}},$$

где $\alpha_{w \text{ inf}} = \inf \alpha_w$ – нижняя грань всех возможных углов зацепления, допускаемых фиксированными значениями вышеперечисленных параметров. Величина этой грани определяется по формуле

$$\alpha_{w \text{ inf}} = \arctan \frac{2\pi}{z_A(1+n)}.$$

Для определенности будем использовать величину

$$\alpha_w = 2.8\alpha_{w \text{ inf}}.$$

Далее при помощи значения угла зацепления и величины передаточного числа вычисляются все необходимые геометрические характеристики, показанные на Рис. 1. Сначала могут быть найдены радиусы основных окружностей в виде

$$r_{\alpha b} = r_{\alpha} \cos \alpha_w \quad (\alpha = A, B).$$

Затем можно вычислить полную длину линии зацепления следующим образом

$$|\overrightarrow{K_A K_B}| = r_A(1 + n) \sin \alpha_w.$$

В то же время, длина любого отрезка контактирования $[a, b] \subset (K_A K_B)$ вдоль этой линии является в точности длиной дуги основной окружности, соответствующей шаговому углу $\Delta\gamma_A$ (либо $\Delta\gamma_B$), любого из колес редуктора. Так что имеем

$$|\overrightarrow{ab}| = r_\alpha \Delta\gamma_\alpha \quad (\alpha = A, B).$$

Расстояние между центрами колес легко вычисляется в виде $L = r_A + r_B$. Для вычисления начальных условий системы (2.2), (2.3) ДАУ необходимо выполнить дополнительные расчеты. Для определенности будем считать, что система координат $O_C x_C y_C z_C$ имеет свое начало в точке O_A центра ведущего колеса A : $O_C = O_A$. Начальные абсолютные начальные координаты этих точек совпадают

$$\mathbf{r}_{O_C} = \mathbf{r}_{O_A} = (0, 0, 0)^T,$$

и начальное положение центра ведущего колеса определяется равенством

$$\mathbf{r}_{O_B} = (L, 0, 0)^T.$$

Начальные положения точек K_A и K_B вычисляются по легко выводимым векторным формулам (Рис. 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{K_A} &= \mathbf{r}_{O_A} + r_{Ab} (\cos \alpha_w, \sin \alpha_w, 0)^T, \\ \mathbf{r}_{K_B} &= \mathbf{r}_{O_B} - r_{Bb} (\cos \alpha_w, \sin \alpha_w, 0)^T, \end{aligned}$$

после чего вектор направления линии зацепления может быть получен в виде $\overrightarrow{K_A K_B} = \mathbf{r}_{K_B} - \mathbf{r}_{K_A}$. Теперь положение точки a начала контакта можно задать в виде

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{K_A} + \frac{1}{2} \left(|\overrightarrow{K_A K_B}| - |\vec{ab}| \right) \frac{\overrightarrow{K_A K_B}}{|\overrightarrow{K_A K_B}|},$$

а начальное положение точки b конца контактирования — в виде

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_a + \frac{|\vec{ab}|}{|\overrightarrow{K_A K_B}|} \overrightarrow{K_A K_B}.$$

Учтем, что расстояние от точки a до O_B в точности равно радиусу окружности вершин r_{Ba} колеса B , а расстояние от точки b (в её начальном положении) до O_A — радиусу окружности вершин r_{Aa} колеса A . Именно

$$r_{Aa} = |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_{O_A}|, \quad r_{Ba} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{O_B}|.$$

Для вычисления начальных углов поворота тел A и B будем считать, что в начальный момент в точке a зубы колес A и B просто геометрически соприкасаются без всяких начальных усилий и, как следствие, без какого-либо взаимного проникания. Угловые скорости колес в начальный момент предполагаются нулевыми. Для определенности будем также считать, что ось $O_A x_A$ тела A проходит через корневую точку эвольвенты, лежащую на основной окружности тела. Эта эвольвента в точности задает поверхность зуба, находящуюся в начальный момент в контакте в точке a . Аналогично проходит ось $O_B x_B$ колеса B — через корневую точку начальной контактной эвольвенты этого колеса.

В силу соответствующих уравнений (3.1) полярные углы раствора каждой из упомянутых эвольвент вычисляются в виде

$$\theta_\alpha = \frac{\sqrt{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{O_\alpha}|^2 - r_{\alpha b}^2}}{r_{\alpha b}} - \arccos \frac{r_{\alpha b}}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{O_\alpha}|},$$

Таким образом, начальные значения углов поворота колес A и B можно вычислить в виде

$$\varphi_\alpha(t_0) = \arg \zeta_\alpha - \theta_\alpha \quad (\alpha = A, B),$$

где комплексные числа ζ_A, ζ_B определяются при помощи компонент векторов $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{O_\alpha}$ в виде

$$\zeta_\alpha = (x_a - x_{O_\alpha}) + i(y_a - y_{O_\alpha}) \quad (\alpha = A, B).$$

Заметим, что функция комплексного аргумента \arg имеет компьютерную реализацию — стандартную библиотечную функцию `atan2`.

Начальные кватернионы ориентации тел A и B задаются при помощи известных формул

$$\mathbf{q}_\alpha(t_0) = \left(\cos \frac{\varphi_\alpha(t_0)}{2}, 0, 0, \sin \frac{\varphi_\alpha(t_0)}{2} \right)^T \quad (\alpha = A, B).$$

Фазовые переменные системы ДАУ (2.2), (2.3) отслеживания контакта удовлетворяют следующим, согласованным с предыдущими соотношениями, начальным условиям

$$\mathbf{r}_{P_A}(t_0) = \mathbf{r}_{P_B}(t_0) = \mathbf{r}_a, \quad \mu(t_0) = 0, \quad \lambda(t_0) = -\frac{r_{Bb}}{r_{Ab}}.$$

Как было замечено выше, в случае эвольвенты фазовая переменная $\lambda(t)$ оказалась постоянной

$$\lambda(t) \equiv \text{const} = \lambda(t_0),$$

что соответствует интегралу движения и может быть с удобством использовано для контроля точности вычислений.

В рассматриваемом нами примере к колесу A приложен постоянный крутящий момент $M_A = (0, 0, -1\text{Н} \cdot \text{м})^T$, а к колесу B приложен момент вязкого сопротивления $M_B = (0, 0, -10\dot{\varphi}_B)^T$. Сами колеса предполагаются изготовленными из стали (модули упругости Юнга $E_A = E_B = 2 \cdot 10^{11}\text{П}$, коэффициенты Пуассона $\nu_A = \nu_B = 0.3$) и имеют одинаковую толщину, равную 0.1м вдоль образующей цилиндров.

8. Динамическая ошибка передачи. Для вычислительной верификации была выбрана величина динамической ошибки передачи редуктора. Вначале введем вспомогательную переменную

$$\Delta = -r_{Ab}\varphi_A - r_{Bb}\varphi_B, \quad (8.1)$$

характеризующую рассогласование длин дуг основных окружностей колес. В случае идеальной «твердотельной» связи зубьев и при идеальном их переключении в отсутствие трения эта величина должна быть тождественно равной нулю.

Для проведения более подробного анализа рассмотрим результаты численного эксперимента. Прежде всего заметим, что в рассматриваемой модели эвольвентного зацепления невязка $\Delta(t)$ должна (почти) совпадать с глубиной $\kappa(t)$ взаимного проникания твердотельных зубьев в

окрестности контактной точки в применяемой нами модели Джонсона. В самом деле, рассогласование (8.1) есть в точности разность дуговых расстояний основных окружностей на которые поворачиваются колеса A и B . Эта разность накапливается с начала движения в точности тогда, когда зубчатые колеса начинают контактировать.

С другой стороны, в силу известных свойств эвольвент, невязка $\Delta(t)$ реализуется в точности вдоль линии зацепления $K_A K_B$, «сходящей» с основной окружности колеса A и «наматываемой» на основную окружность колеса B . При этом, с кинематической точки зрения с основной окружности колеса A «смотана» нить длины $-r_{Ab}\varphi_A$, в то время как на основную окружность колеса B «намотана» нить длины $r_{Bb}\varphi_B$. Если бы контакт был геометрически твердым, то должно выполняться условие $\Delta(t) \equiv 0$.

Известно, общий перпендикуляр $P_A P_B$ к эвольвентам контактирующих поверхностей зубьев лежит в точности на линии зацепления $K_A K_B$. Поэтому, геометрически должно выполняться соотношение

$$|\overrightarrow{P_A P_B}| \equiv \kappa(t) \equiv \Delta(t).$$

Сравнение указанных переменных, полученных в процессе симуляции, показано на Рис. 4.

Эффект, имеющий место за счет твердотельного «продавливания» тел в контактной модели Джонсона, в определенном смысле похож на эффект, связанный с крутильными деформациями упругих шестеренок A и B [13, 14]. Более того, конечноэлементное моделирование упругого изгиба контактирующих зубьев [15] не слишком существенно искажает общую картину динамики зацепления.

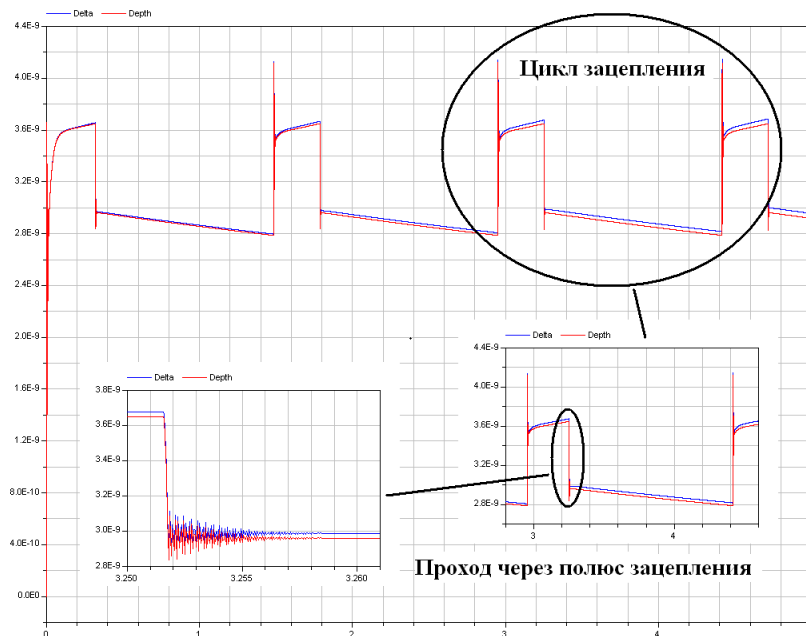


Рис. 4:

В самом деле, динамическая ошибка передачи с точностью до знака вычисляется по формуле

$$\delta = -r_{Ab}\psi_A - r_{Bb}\psi_B, \quad (8.2)$$

аналогичной формуле (8.1). Здесь величины ψ_A , ψ_B являются отклонениями углов поворота тел A и B от некоторых своих номинальных значений $\Phi_A(t)$, $\Phi_B(t)$ так, что выполняются равенства

$$\varphi_\alpha(t) = \Phi_\alpha(t) + \psi_\alpha(t) \quad (\alpha = A, B).$$

Эти номинальные значения $\Phi_\alpha(t)$ в точности соответствуют твердотельному контакту, при котором, очевидно,

выполняется кинематическое тождество

$$-r_{Ab} \Phi_A(t) - r_{Bb} \Phi_B(t) \equiv 0.$$

Поэтому в рамках данного рассмотрения оказывается, что $\Delta(t) \equiv \delta(t)$.

Рассмотрим теперь источники динамической ошибки редуктора, представленной на Рис. 4. Если в модели полностью убрать трение между поверхностями зубьев, то величина $\delta(t)$ будет асимптотически увеличиваться до предельного значения, дающего систематическую ошибку (Рис. 5, синий график). Если же в рассмотрение ввести простейшую модель сухого трения с коэффициентом $f = 0,3$, то на систематическую ошибку наложится периодическая ошибка, терпящая скачки в моменты смены пар контактирующих зубьев и прохождения через полюс зацепления P . Соответствующая кривая показана на Рис. 5 красным цветом.

Последняя кривая на Рис. 5 показывает, что найденная ошибка полностью идентична аналогичной ошибке, выведенной в [13, 14]. В последнем случае мы видим дополнительные малые искажения графика Рис. 5, получающиеся за счет дополнительных вкладов от крутильных колебаний, и всплеск, возникающий с моментом потери контакта еще одной, предшествующей, пары зубьев. Напомним, что в нашей модели для простоты рассматривается случай, когда в каждый данный момент времени контактирует только одна пара зубьев. В работах же [13, 14] временные сегменты контактирования пар зубьев перекрываются (одно-временно не более двух).

9. Сравнение со случаем твердого контакта. Помимо описанной выше верификации проводилось также

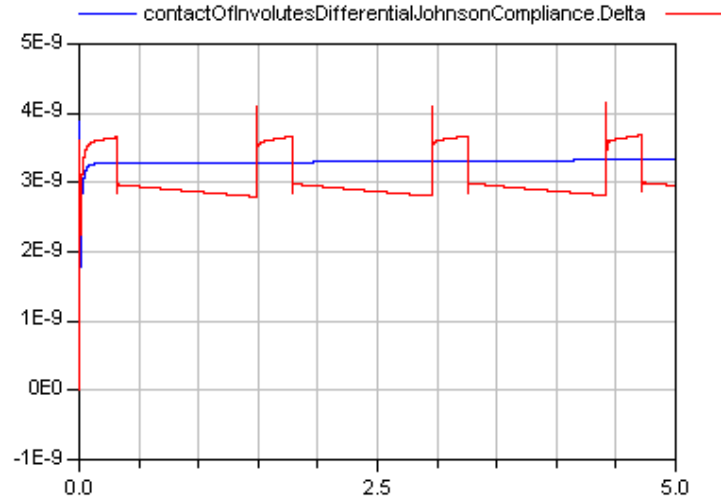


Рис. 5:

численное сравнение построенной модели и модели, включающей твердый контакт. Сравнение результатов симуляции показано на рис. 6. Вдоль оси ординат отсчитывается величина нормальной контактной силы. Случай модели Джонсона соответствует графику синего цвета, а красный цвет используется для случая твердотельной контактной модели.

Из рис. 6 видно, что обе контактные модели дают почти идентичный динамический результат. Разница лишь в том, что модель Джонсона порождает дополнительные осцилляции значений нормальной силы. Более того, из детализации, показанной на рис. 6, видно, что твердотельная модель ведет себя как усреднение модели с податливостью. Преимуществом последней является то, что она позволя-

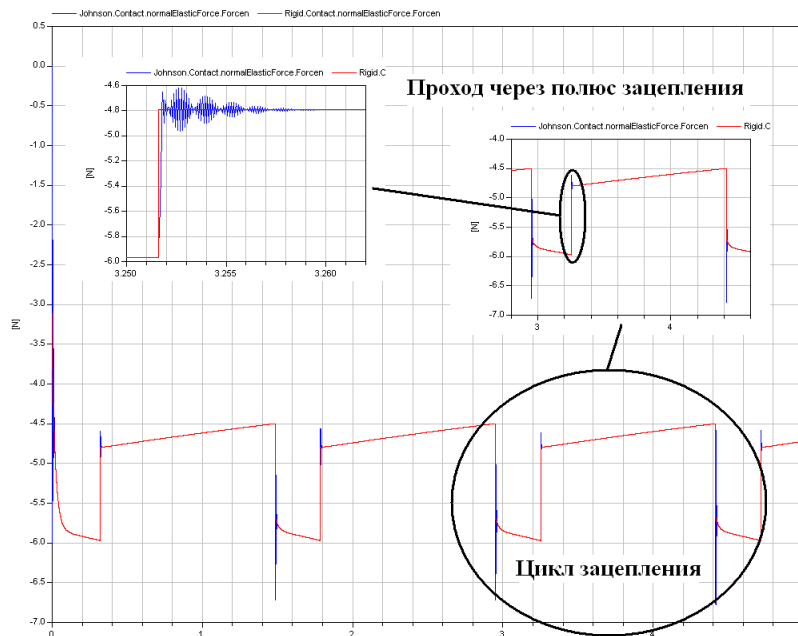


Рис. 6:

ет рассматривать задачи с любым количеством контактов взаимодействующих тел. В то же время, твердотельная модель этого делать не позволяет. Таким образом, можно сказать, что в данной работе рассмотрена неограниченная контактная задача для редукторов. В традиционной инженерной постановке контактные задачи обычно рассматриваются в ограниченной постановке, включающей дополнительные гипотезы о распределении нормальной силы по набору, в общем случае множественных пятен контакта для одного и того же твердого тела.

С другой стороны, любая конечноэлементная модель

Тип модели контакта	Коэффициент трения	Время счета
Джонсона	0,3	20,4
Джонсона	0	16,1
твердая	0,3	13
твердая	0	11,4

Таблица 1: Сравнительная эффективность

требует вычислительных ресурсов, на порядок больших, чем построенная здесь модель контактирования шестеренок. Для оценки ресурсоемкости последней приведем таблицу (Табл. 1) сравнения прогонов нашей модели с моделью контакта Джонсона и твердым контактом. Внутреннее время модели во всех случаях одно и то же и равно 5 секундам.

Из Табл. 1 легко заметить, что контактная модель Джонсона не намного увеличивает время счета (не более, чем в два раза) в сравнении с самым быстрым случаем твердотельного контакта. В то же время, модель с податливостью значительно повышает гибкость и универсализм соответствующих средств моделирования в широком спектре прикладных задач. Можно указать еще один интересный пример [16] упрощенной модели упругой податливости с дополнительными степенями свободы между каждым, предполагаемым твердым, зубом и колесом, также предполагаемым твердым. Дополнительные степени свободы обеспечивают подвижность отдельного зуба относительно корпуса колеса вдоль его окружности внадин. Жесткости податливостей подбираются с учетом упругих

свойств изгибной деформации зубьев.

10. Заключение. Сравнивая полученные в данной работе результаты с более ранними, можно сформулировать следующие выводы:

- цилиндрические контактные модели в определенном смысле проще общих трехмерных моделей, поскольку они ограничены двумерным геометрическим анализом;
- напротив, динамические модели при этом становятся в некоторой степени сложнее, поскольку в модели Джонсона используется трансцендентное уравнение, имеющее сингулярность в нуле;
- моделирование эвольвентного зацепления требует дополнительных аналитических усилий, порождая увеличение вычислительной сложности;
- в силу изгиба зубьев модели с податливостью создают эффект, аналогичный крутильным упругим деформациям зубчатых колес;
- в моделях с податливостью учет эффекта динамического изгиба зубьев позволяет немного уменьшать нормальную контактную жесткость;
- данная контактная модель доставляет возможность построения так называемой неограниченной контактной задачи с любым числом параллельных контактов для тела в моделируемой системе тел;
- построенная модель податливости показала достаточно высокую эффективность даже в сравнении с

наиболее быстродействующим случаем геометрически твердой связью;

- разработанная компьютерная модель открывает возможность построения редукторов любой сложности для прямозубых эвольвентных зацеплений.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00354-а).

Литература

1. <https://www.modelica.org/libraries/Modelica/>
2. *Pelchen C., Schweiger C., Otter M.* Modeling and simulating the efficiency of gearboxes and of planetary gearboxes // Proc. of 2nd Int. Modelica Conf., Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V. (DLR), Oberpfaffenhofen, Germany, March 18–19, 2002, pp. 257–266.
3. *Kosenko I., Aleksandrov E.* An approach to construct the multibody dynamics library on Modelica language. // Proc. of IV European Conf. on Comput. Mech., Palais des Congres, Paris, France, May 16–21, 2010.
4. *Косенко И. И.* Графовые представления моделей динамики систем тел // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 9. С. 80–88.
5. *Kossenko I. I.* Implementation of unilateral multibody dynamics on Modelica // Proc. of 4th Int. Modelica Conf., Hamburg University of Technology, Hamburg–Harburg, Germany, March 7–8, 13–23, 2005, pp. 13–23.

6. *Kosenko I. I., Alexandrov E. B.* Implementation of the Hertz contact model and its volumetric modification on Modelica // Proc. of 6th Int. Modelica Conf., University of Applied Sciences Bielefeld, Bielefeld, Germany, March 3–4, 2008, pp. 203–212.
7. *Левитский Н. И.* Теория механизмов и машин. — М: Наука, 1990. 592 с.
8. *Kosenko I., Aleksandrov E.* Implementation of the Contensou–Erismann model of friction in frame of the Hertz contact problem on Modelica // Proc. of 7th Int. Modelica Conf., Como, Italy, 20–22 September 2009, pp. 288–298.
9. *Pereira C. M., Ramalho A. L., Ambrosio J. A.* A critical overview of internal and external cylinder contact force models // Nonlin. Dynamics. Vol. 63. 2011. P. 681–697.
10. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
11. *Förg M., Engelhardt T., Ulbrich H.* Comparison of different contact models within valve train simulations // Proc. of ACMD2006, The Third Asian Conf. on Multibody Dynamics 2006, Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, Tokyo, Japan, August 1–4, 2006.
12. *Kosenko I. I., Aleksandrov E. B.* Implementation of the Contensou–Erismann tangent forces model in the Hertz contact problem // Multibody System Dynamics. Vol. 24. 2010. P. 281–301.

13. *Vaishya M., Singh R.* Sliding friction-induced non-linearity and parametric effects in gear dynamics // J. of Sound and Vibration. Vol. 248. 2001. P. 671–694.
14. *Vaishya M., Singh R.* Strategies for modeling friction in gear dynamics // J. of Mech. Design. Vol. 125. 2003. P. 383–393.
15. *He S.* Effect of sliding friction on spur and helical gear dynamics and vibro-acoustics – PhD thesis. The Ohio State University. 2008.
16. *Ebrahimi S.* A contribution to computational contact procedures in flexible multibody systems – PhD thesis. Institute of Engineering and Computational Mechanics. University of Stuttgart. 2007.