УДК 531.01

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА ГЛАВНОМ РАССЛОЕНИИ. ГАЛИЛЕЕВСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ИСКЛЮЧЕНИЕ ГРАВИТАЦИИ*

Д.П.Шевалльe †

Для уравнений движения, справедливых для деформируемых систем и полученных из вариационного принципа Гамильтона в рамках общего формализма главного расслоения, получены условия инвариантности относительно перехода к другой галилеевской системе отсчета. Показано, что эти условия также достаточны для того, чтобы обеспечить исключение гравитационных сил в системе отсчета, совершающей ускоренное движение, что указывает на примечательную связь. В этой публикации осуществляется распространение на деформируемые системы результатов, полученных в [1] для твердого тела, и дополняются результаты, полученные в общем контексте работ [2, 3].

Ключевые слова: деформируемые механические системы, главное расслоение, связность, безразличие по отношению к выбору системы отсчета, исключение гравитации.

1. Введение. Заслуживает внимания то, что принцип независимости сил инерции от выбора системы отсчета, или принцип «объективности», обсуждался в литературе. Конечно, если разрешена произвольная замена системы отсчета, то, будучи

* перевод А.А.Бурова

† Ecole nationale des ponts et chaussées, Laboratoire Navier et Université Paris-Est, 6-8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne-la-Vallée, France. e-mail: fdchevallier@yahoo.fr

строго ограниченным своим общим видом $\mathrm{f} = \dfrac{d}{dt} m\mathbf{v}$, второй закон Ньютона в динамике частицы проявляется как закон, зависящий от выбора системы отсчета. Однако так как все остальные силы являются объективными величинами (см., например, работы Нолля [4, 5]), то «необъективность» лишь только сил инерции привела бы к противоречиям в законах механики. Пристальное изучение этого предмета нуждается в более тщательном анализе.

В [1] было показано, что принцип объективности, примененный к силам инерции, оказывается достаточным, чтобы придать математическую форму классическим уравнениям Ньютона - Эйлера в динамике твердых тел, а не только в динамике частиц. Математические рамки, позволяющие осуществить такой вывод, родственны тем, что использовались В.И.Арнольдом в [6]. Такой подход также эффективен в практических приложениях в задачах динамики многих тел, см. [7]. Эта позиция основывается на более или менее произвольной модели твердого тела, рассматриваемого как совокупность частиц. Она опирается на более слабые предположения, сводящиеся к следующему:

i) Конфигурационное пространство $\mathbb{S}$ твердого тела – это главное однородное пространство группы Ли $\mathbb{D}$. Это означает, что группа $\mathbb{D}$ действует *свободно и транзитивно* на пространстве $\mathbb{S}$ ($\mathbb{D}$ – это «группа перемещений», на практике она будет евклидовой группой в размерности три).

ii) Соотношение между скоростью и моментом тела определено изоморфизмом $\mathcal{H}\colon T\mathbb{S} \to T^*\mathbb{S}$ касательного векторного расслоения на кокасательное векторное расслоение пространства $\mathbb{S}$, которое инвариантно относительно поднятых действий группы $\mathbb{D}$ на $T\mathbb{S}$ и $T^*\mathbb{S}$ ($\mathcal{H}(g.\boldsymbol{v}) = g.\mathcal{H}(\boldsymbol{v})$, где $g \in \mathbb{D}$).

iii) Силы инерции представляют собой объективные величины, определенные по отношению к произвольной системе отсчета. По отношению к галилеевским, а не к произвольным системам отсчета их значение равно взятой со знаком минус производной по времени от момента сообразно канонической связности ∇ пространства $\mathbb{S}$.

Свойство i) лишь переносит понятие «жесткости». Оно определяет дифференциальную геометрию на пространстве $\mathbb{S}$ переносом геометрии на группе Ли $\mathbb{D}$. Этого оказывается достаточно для того, чтобы определить структуру многообразия на пространстве $\mathbb{S}$ с помощью условия, согласно которому для произвольного выбора r в пространстве $\mathbb{S}$ («исходного положения тела») биекция $g \mapsto g.\mathrm{r}$ из группы $\mathbb{D}$ в пространство $\mathbb{S}$ является изоморфизмом. Геометрия пространства $\mathbb{S}$ не зависит от этого выбора и позволяет представить всю кинематику твердых тел, включая эффекты, связанные с заменой системы отсчета, в свободном от координат виде безотносительно к его начальному положению. В частности, *каноническая связность* ∇ на пространстве $\mathbb{S}$, упоминаемая в iii), соответствует правоинвариантной связности Картана группы $\mathbb{D}$ и определена внутренним образом.

Свойство ii) просто означает, что отношение между скоростью и моментом – это «объект», связанный с телом и что для фиксированного положения тела это отношение линейно. Эквивалентное выражение ii) выводит на передний план «обобщенный тензор инерции», выглядящий как «бинор инерции», преобразующий «кинематические моторы» в «моторы количества движения» и введенный Ф.М.Диментбергом в винтовом исчислении как отображение $s \mapsto H_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{L}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}^*)$ такое, что

$$\text{для всех } s \in \mathbb{S} \text{ и всех } g \in \mathbb{D}\text{: } H_{g.s} = \mathrm{Ad}^* g \circ H_s \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}, \quad (1.1)$$

где $\mathfrak{d}$ – алгебра Ли группы Ли $\mathbb{D}$, Ad и Ad^* – присоединенное и коприсоединенное представления группы $\mathbb{D}$ в алгебре $\mathfrak{d}$.

Всякое определение математической формы операторов H_s (или операторов $\mathcal{H}$) приводит к принципу объективности: согласно iii), в галилеевской системе отсчета вдоль движения $t \mapsto s(t)\,(\in \mathbb{S})$ момент, определяемый соотношением $t \mapsto \mathcal{H}(\boldsymbol{v}(t))\,(\in T^*\mathbb{S})$, и сила инерции $\mathcal{J}(t)$ связаны соотношением

$$\mathcal{J}(t) = -\frac{\nabla}{dt}\,\mathcal{H}\big(\boldsymbol{v}(t)\big), \qquad \forall \boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}\,s(t)\,(\in T\mathbb{S}).$$

В [1] доказано, что *существование объективной величины, удовлетворяющей условию iii), эквивалентно следующему общему свойству операторов* H_s:

$$\forall s \in \mathbb{S}, \quad \forall U \in \mathfrak{t}, \quad \forall V \in \mathfrak{d}: \quad C_s(U,V) = 0, \tag{1.2}$$

где билинейное отображение $C_s\colon \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \to \mathfrak{d}^*$ определено как

$$C_s(X,Y) = \mathrm{ad}^*X.H_s(Y) + \mathrm{ad}^*Y.H_s(X)] + H_s\big([X,Y]\big).$$

(ad и ad^* – присоединенное и коприсоединенное представления алгебры Ли $\mathfrak{d}$ в $\mathfrak{d}$ и в $\mathfrak{d}^*$, так что $\mathrm{ad}\,X.Y = [X,Y]$, где $[\cdot,\cdot]$ – скобка Ли алгебры Ли $\mathfrak{d}$, $\mathrm{ad}^*X = -{}^t\mathrm{ad}\,X$).

Когда, как это имеет место в евклидовой группе в размерности 3, алгебра Ли $\mathfrak{d}$ оснащена невырожденным, Ad-инвариантным внешним произведением, эта алгебра Ли $\mathfrak{d}$ и ее двойственное пространство $\mathfrak{d}^*$ могут быть отождествлены. В этом случае момент представлен с помощью операторов $H_s \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$ и C_s становится отображением $C_s\colon \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \to \mathfrak{d}$:

$$C_s(X,Y) = [X, H_s(Y)] + [Y, H_s(X)] + H_s\big([X,Y]\big).$$

Наконец, в [1] доказано, что *в случае, когда группа Ли* $\mathbb{D}$ *– обычная евклидова группа в размерности, то свойство (1.2) определяет математическую структуру симметрических* [1] *опера-*

[1] т.е. $\langle H_s(X), Y\rangle = \langle H_s(Y), X\rangle$. Несимметричные операторы зависят еще от одного вещественного параметра, см. [1].

торов H_s и они с необходимостью – те самые операторы механики Ньютона - Эйлера, определенные полной массой, центром масс и тензором инерции. Свойства, такие как теорема Кёнига, включены в (1.1) и, в конечном итоге, вся классическая механика твердого тела выводится из i), ii), iii).

Математические основания описания движения деформируемых тел с точки зрения дифференциальной геометрии изложены в [3], их приложение к механике аффинно-деформируемых тел развито в [2]. Некоторые аспекты, относящиеся к голономии динамической связности изложены в [8, 9]. Вместо i), ii), iii) теперь предполагается:

- iv) $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \mathbb{D}, \pi)$ – главное расслоение, где $\mathbb{X} = \mathbb{S}/\mathbb{D}$ – пространство орбит, а $\pi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{X}$ – каноническая проекция. (*Иными словами,* $\mathbb{S}$ – многообразие, $\mathbb{D}$ – группа Ли, действие слева которой – дифференцируемое, свободное, собственное, но в общем случае нетранзитивное.)

- v) пространство $\mathbb{S}$ оснащено римановой структурой $(\cdot \mid \cdot)$, инвариантной относительно действия группы $\mathbb{D}$.

- vi) Основным принципом динамики является принцип Гамильтона.

Группа Ли $\mathbb{D}$ в iv) – это группа, порожденная преобразованиями, сохраняющими форму системы. На практике ею будет евклидова группа перемещений, а $\mathbb{X}$ будет «пространством форм». Предположение v) вводит билинейную дифференциальную форму, ассоциированную с кинетической энергией. Тогда на расслоении $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \mathbb{D}, \pi)$ может быть выведена осмысленная главная связность ∇, так называемая «динамическая связность». Эта связность вводит осмысленным образом неголономные координаты, точнее, компоненты формы связности, расщепляющие кинетическую энергию на энергию движений как твердого тела и энергию деформаций (см. ниже разд. 2.1).

Элементарный закон динамики, основанный на естественном предположении, выглядящем как iii), становится недоступным в данных рамках. В [3] мы прибегали к принципу Гамильтона, чтобы придать смысл тому, как здесь далее будут выведены уравнения движения в виде (2.6). Грубо говоря, первое уравнение управляет деформациями системы, в то время как второе управляет движением «замороженной» системы. Конечно, эти уравнения являются независимыми друг от друга за счет присутствия перекрестных слагаемых, представленных как $(-\nabla_x \mathbf{K}(s)(.)(\mathbf{V}) + \mathbf{J}(s)\,(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x}, \cdot))$ и $\nabla_x \mathbf{I}(s)(\dot{x})(\mathbf{V}))$. Эти слагаемые имеют примечательный вид, в который включены динамическая связность и ее кривизна. Однако приемлемые механические модели должны быть не зависящими от системы отсчета, по крайней мере, не зависящими от выбора галилеевской системы отсчета. Однако это свойство не оказывается выполненным автоматически для произвольной римановой структуры на пространстве $\mathbb{S}$ или для произвольного лагранжиана, даже если он имеет как в рассмотренном ниже случае стандартный вид (2.1). Цель настоящей работы состоит в том, чтобы сосредоточить внимание на математических свойствах, обеспечивающих такую инвариантность.

Согласно нашей цели, предположения iv), v), vi) или рассматриваемое ниже уравнение (2.6), относятся к системам, свободно движущимся в пространстве. Появление дополнительных кинематических связей влечет необходимость изменения уравнения (2.6), например, за счет введения множителей Лагранжа или реакций связи в правых частях уравнений. Примечательно, что главенствующие идеи, такие как инвариантность по отношению к действиям групп и использование неголономных переменных, например, $\mathbf{V}$ в (2.1), связаны с так называемыми уравнениями Пуанкаре - Четаева, изложенными в классических работах по аналитической механике (см., например, работу В.В.Румянцева [10], а также публикацию [3]).

В разд. 2 будет доказана теорема 2.2, дающая необходимые и достаточные условия для инвариантности уравнений (2.6) по отношению к заменам галилеевской системы отсчета. Грубо говоря, те условия, которые, с одной стороны, имеют место для замороженных систем, представляют собой не что иное как условие, найденное в [1] для твердого тела. С другой стороны, два условия, присущие именно деформируемым системам, содержат динамическую связность, ассоциированную с римановой структурой v) и ее кривизной.

В разд. 3 будет доказано, что деформируемые системы подчиняются уравнениям движения (2.6), а из условий инвариантности в теореме 2.2 следует «принцип эквивалентности», позволяющий исключить гравитационный эффект за счет соответствующего выбора ускоренно движущейся системы отсчета.

В приложении с целью прояснить связь со знакомыми величинами, имеющими место в общей механике, такими как поле моментов, силовой и кинематический винты, приводятся конкретные представления алгебры Ли $\mathfrak{d}$ и ее подалгебр.

2. Условия Галилеевской инвариантности для уравнений движения деформируемых систем.

Уравнения движения и геометрия главных расслоений. Теория главных расслоений изложена в трактатах по дифференциальной геометрии, например, в [11] или [12, гл. XVI]. В отношении механики, следует отослать читателя к предположениям iv), v), vi) разд. 1, и к [3].

Пусть $\mathbb{D} \times \mathbb{S} \ni (g, s) \mapsto g.s$ – действие слева $\mathbb{D}$ на пространстве $\mathbb{S}$, а $\mathbb{D} \times T\mathbb{S} \ni (g, \boldsymbol{v}) \mapsto g.\boldsymbol{v}$ – поднятое действие $\mathbb{D}$ на касательном пространстве $T\mathbb{S}$. Практично обозначить δs (соответственно δx и так далее) произвольный касательный вектор к многообразию $\mathbb{S}$ (соответственно к пространству $\mathbb{X}$) с началом s (соотв. x).

Горизонтальное подпространство пространства $T_s\mathbb{S}$ для динамической связности определено как ортогональное подпространство к слою s согласно римановой структуре v). Форма связности и ее кривизна обозначены как $\boldsymbol{\omega}$ (принимающая значения в $\mathfrak{d}$ 1-форма) и $\boldsymbol{\Omega}$ (принимающая значения в $\mathfrak{d}$ 2-форма), причем «$\delta s\,(\in T\mathbb{S})$ *горизонтальна* тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\omega}(\delta s) = 0$». Примеры явных вычислений динамических связностей и их кривизн для конкретных механических систем представлены в [2, 9] для аффинно-деформируемых тел и в приложении работы [3] для систем твердых тел.

Горизонтальная и вертикальная составляющие $\delta s \in T\mathbb{S}$ будут обозначены как $\operatorname{hor}\delta s$ и $\operatorname{vert}\delta s$. Если $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{E}$ – дифференцируемое отображение из $\mathbb{S}$ в векторное пространство $\mathbb{E}$, то можно заметить, что $f^T\colon T\mathbb{S} \to T\mathbb{E} \sim \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ – его касательное пространство и $df\colon T\mathbb{S} \to \mathbb{E}$ – его дифференциал ($df(\delta s) = p_2 f^T(\delta s)$); при фиксированном s $df(s)$ обозначает индуцированное отображение $T_s\mathbb{S} \to \mathbb{E}$. Связность позволяет определить ковариантную производную $\nabla f(\delta s) = df(\operatorname{hor}\delta s)$ для $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$, представляющую собой не что иное, как дифференциал вдоль касательных векторов из $T\mathbb{S}$. Если $\mathcal{Q}$ – многообразие и ϕ: $\mathcal{Q} \to \mathbb{S}$, то можно определить $\nabla_q f(\delta q)$, полагая $\nabla_q f(\phi(q))(\delta q) = df(\phi(q))(\operatorname{hor}\partial_q\phi(\delta q))$.

Динамическая связность также может быть охарактеризована горизонтальным поднятием $\Gamma\colon \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \to T\mathbb{S}$, таким, что $\operatorname{hor}\delta s = \Gamma(s, \delta x)$ при $\delta x = \pi^T(\delta s)$. Тогда $\pi^T\Gamma(s, \delta x) = \delta x$, $\Gamma(g.s, \delta x) = g.\Gamma(s, \delta x)$. Также можно определить ковариантную производную вдоль касательных векторов для базы $\mathbb{X}$ как $\nabla_x f(s)(\delta x) = df\big(\Gamma(s, \delta x)\big)$ для $\delta x \in T_x\mathbb{X}$ с $x = \pi(s)$. Тогда $\nabla_x f(s)(\delta x) = \nabla f(\delta s)$, когда $\delta x = \pi^T(\delta s)$. Надо заметить, что $\nabla_x f$ определена не на $T\mathbb{X}$, а на $\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X}$.

Рассмотрим принцип Гамильтона с функцией Лагранжа стандартного вида

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t,\dot s) &= \frac{1}{2}\,(\dot s \mid \dot s) - \Pi(t,s) = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbf{J}(s)(\mathbf{V},\mathbf{V}) + \frac{1}{2}\,\mathcal{J}_{\rm def}\,(\dot x,\dot x) - \Pi(t,s),\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\dot s = \frac{ds}{dt},\quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot s),\quad x = \pi(s),\quad \dot x = \pi^T(\dot s),$$

как вариационный принцип с фиксированными концами на этом расслоении, приводящий к уравнениям Эйлера (2.6), выписанным ниже.

Величина $1/2\,\mathcal{J}_{\rm def}(\dot x,\dot x) = \mathrm{K}_{\rm def}$ – кинетическая энергия деформаций, связанная с римановой структурой $\mathcal{J}_{\rm def}$, корректно определенная на $\mathbb{X}$ благодаря инвариантности действия $\mathbb{D}$ на $\mathbb{S}$. Такое разделение кинетической энергии представляет собой ту самую причину определения динамической связности.

Величина $1/2\,\mathbf{J}(s)(\mathbf{V},\mathbf{V}) = \mathbf{K}(\mathbf{V})$ – кинетическая энергия замороженной системы. Можно определить $\mathbf{I}(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d},\mathfrak{d}^*)$ как $\mathbf{J}(s)(X,Y) = \langle \mathbf{I}(s).X, Y\rangle$, тогда $\mathbf{J}(s)$ и $\mathbf{I}(s)$ – «ковариантный» и «смешанный тензоры инерции» замороженной системы в конфигурации s.

Рассмотрим $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ как отображения из $\mathbb{S}$ в векторные пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{d},\mathfrak{d}^*)$, $\mathcal{L}_2(\mathfrak{d})$, $\mathrm{Q}_2(\mathfrak{d})$ (векторное пространство квадратичных форм на $\mathfrak{d}$). Например, $\nabla\mathbf{K}(s)$ будет отображением $\boldsymbol{v} \mapsto \nabla\mathbf{K}(\boldsymbol{v})$ из $T_s\mathbb{S}$ в $\mathrm{Q}_2(\mathfrak{d})$, и поэтому $\nabla\mathbf{K}(\boldsymbol{v})(X,Y)$ имеет смысл. Эти отображения обладают свойствами инвариантности, к которым мы будем часто обращаться:

$$\begin{gathered}\mathbf{J}(g.s)(X,Y) = \mathbf{J}(s)(\mathrm{Ad}\,g^{-1}.X, \mathrm{Ad}\,g^{-1}.Y),\\ \mathbf{I}(g.s) = \mathrm{Ad}^*g \circ \mathbf{I}(s) \circ \mathrm{Ad}\,g^{-1},\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$d\,\mathbf{J}(\delta s)(X,X) = \nabla\mathbf{J}(\delta s)(X,X) - 2\,\mathbf{J}(s)\left([\boldsymbol{\omega}(\delta s), X], X\right), \tag{2.3}$$

$$d\mathbf{I}(\delta s) = \mathrm{ad}^*\boldsymbol{\omega}(\delta s) \circ \mathbf{I}(s) - \mathbf{I}(s) \circ \mathrm{ad}\,\boldsymbol{\omega}(\delta s) + \nabla\mathbf{I}(\delta s) \tag{2.4}$$

$$\forall s \in \mathbb{S},\ \delta s \in T_s\mathbb{S}.$$

С отображением $s \mapsto \mathbf{I}(s)$ связано очень важное отображение $s \mapsto \mathbf{C}(s) \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{d};\mathfrak{d}^*)$, определенное как

$$\mathbf{C}(s)(X,Y) = \mathrm{ad}^*X.\mathbf{I}(s)(Y) + \mathrm{ad}^*Y.\mathbf{I}(s)(X) + \mathbf{I}(s)\big([X,Y]\big),$$

$$s \in \mathbb{S}, \quad X, Y \in \mathfrak{d}.$$

Согласно определению главного расслоения, $\mathbb{S}$ покрыто открытыми подмножествами $\pi^{-1}(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – открытое подмножество в $\mathbb{X}$ с локальными картами вида $s = g.\mathrm{r}(q) = \varphi(q,g)$, где g и $q = (q_1,\ldots,q_d)$ принадлежат $\mathbb{D}$ и открытому подмножеству $\mathcal{Q}$ пространства $\mathbb{R}^d$, где q_i – координаты, описывающие форму системы $\pi(s)$. По отношению к некоторой системе отсчета принцип Гамильтона, примененный к области $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ и обладающий таким локальным представлением, приводит к уравнениям движения, выписанным в [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\partial_{\dot q}\,\mathrm{K}_{\mathrm{def}} - \partial_q \mathrm{K}_{\mathrm{def}} - \nabla_q \mathbf{K}(s)(\mathbf{V}) + \\[2ex] \qquad +\mathbf{J}(s)\left(\mathbf{V}, \mathrm{Ad}\,g.\,\mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q,\cdot)\right) = Q - \nabla_q \Pi(t,s), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \pounds\Pi(t,s). \end{cases} \tag{2.5}$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}$ и $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}$ восстанавливаются с помощью $q \mapsto \mathrm{r}(q)$, например; $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}(\delta q, \delta' q) = \mathbf{\Omega}\big(\mathrm{r}^T(\delta q), \mathrm{r}^T(\delta' q)\big)$. Пусть $\mathbf{K}_{\mathrm{r}}(q) = \mathbf{K}(\mathrm{r}(q))$ – значение на “сечении” $q \mapsto \mathrm{r}(q)$ величины $\mathbf{J}_{\mathrm{r}}(q) = \mathbf{J}(\mathrm{r}(q))$. Если положить $\mathbf{U} = \mathrm{Ad}\,g^{-1}\mathbf{V}$, то формула (2.3) с $\delta s = \partial_q\varphi(q,g)(\delta q) = L_g^T \mathrm{r}^T(q,\delta q)$ приводит к более явному виду, опирающемуся на переменные q, описывающие форму и согласованные с лагранжевым описанием движения:

$$\nabla_q \mathbf{K}(s)(\delta q)(\mathbf{V}) = \partial_q \mathbf{K}_{\mathrm{r}}(q)(\delta q)(\mathbf{U}) + \mathbf{J}_{\mathrm{r}}(q)([\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\delta q), \mathbf{U}], \mathbf{U}),$$

$$\mathbf{J}(s)\big(\mathbf{V}, \mathrm{Ad}\, g.\, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q, \delta q)\big) = \mathbf{J}_{\mathrm{r}}(q)\big(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q, \delta q)\big).$$

Пусть $\nabla^{\mathbb{X}}$ обозначает ковариантную производную в связности Леви-Чивита, ассоциированную с римановой структурой $\mathcal{J}_{\mathrm{def}}$ на $\mathbb{X}$. Заметим, что ковариантная производная ∇ в динамической связности и $\nabla^{\mathbb{X}}$ – две совершенно различные операции дифференцирования. Применение к (2.5) классического вычисления из римановой динамики ведет к геометрической интерпретации левых частей уравнений Лагранжа и дает

$$\Big\langle \frac{d}{dt}\partial_{\dot q}\, \mathrm{K}_{\mathrm{def}} - \partial_q \mathrm{K}_{\mathrm{def}}, \delta q\Big\rangle = \mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\frac{\nabla^{\mathbb{X}}\dot x}{dt}, \delta x\Big).$$

Нетрудно проверить, что если $\delta x = \pi^T\big(\partial_q \varphi(q,g)(\delta q)\big)$, и определить $\mathbf{\Omega}_\Gamma\colon \mathbb{S}\times_{\mathbb{X}}(T\mathbb{X}\times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X}) \to \mathfrak{d}$ как $\mathbf{\Omega}(\Gamma(s,\xi_1),\Gamma(s,\xi_2))$, где $\times_{\mathbb{X}}$ означает произведение слоев над $\mathbb{X}$, то

$$\begin{aligned} \nabla_q \mathbf{K}(s)(\delta q)(\mathbf{V}) &= \nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x), \\ \mathbf{J}(s)\left(\mathbf{V}, \mathrm{Ad}\, g.\, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q, \delta q)\right) &= \mathbf{J}(s)\left(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}_\Gamma(s, \dot x, \delta x)\right). \end{aligned}$$

Следующая теорема дает внутренний («эйлеровский») вид уравнений движения (2.5) в виде равенства в $T^*_x\mathbb{X}$ и равенства в $\mathfrak{d}^*$:

Теорема 2.1 *Для функций Лагранжа вида (2.1), уравнения Эйлера выглядят как*

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\frac{\nabla^{\mathbb{X}}\dot x}{dt}, \cdot\Big) - \nabla_x \mathbf{K}(s)(.)(\mathbf{V}) + \mathbf{J}(s)\left(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}_\Gamma(\dot x, \cdot)\right) = \\ &\qquad\qquad = Q - \nabla_x \Pi(t,s), \\ &\frac{d}{dt}\,\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \pounds\Pi(t,s), \end{aligned} \right. \tag{2.6}$$

где $x = \pi(s)$, а $\nabla^{\mathbb{X}}$ – ковариантная производная в связности Леви-Чивита пространства $\mathbb{X}$, ассоциированного с $\mathcal{J}_{\mathrm{def}}$. Величины $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot s)$, $\mathbf{\Omega}_\Gamma(\dot x, \cdot)$ и $\nabla_x \mathbf{K}(s)(\mathbf{V})$ представляют собой линейные формы $\delta x \mapsto \mathbf{\Omega}(\Gamma(s,\dot x), \Gamma(s,\delta x))$ и $\delta x \mapsto \nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x)(\mathbf{V})$.

С помощью ковариантной производной второе уравнение (2.6) также может быть приведено к виду

$$\mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) + \mathrm{ad}^*\mathbf{V}.\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) + \nabla_x\mathbf{I}(s)(\dot{x})(\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \pounds\Pi(t,s). \quad (2.7)$$

Если теперь принять принцип Гамильтона за фундаментальный принцип динамики, то система отсчета должна быть галилеевской и тогда уравнения (2.6) оказываются верными уравнениями движения для рассматриваемой системы. Однако согласованность динамики требует того, что коль скоро эти уравнения справедливы в одной галилеевской системе отсчета, они должны оставаться справедливыми и в любой другой галилеевской системе отсчета. Доказываемая ниже теорема 2.2 содержит необходимые и достаточные условия того, чтобы это свойство было выполнено.

Галилеевская инвариантность и уравнения (2.6). Рассмотрим две системы отсчета – $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. Пусть система отсчета $\mathcal{R}$ будет галилеевской, так что динамические уравнения (2.6) в $\mathcal{R}$ оказываются выполненными. Но система отсчета $\mathcal{R}'$ не обязательно такова на настоящем этапе. Наша первая цель состоит в том, чтобы вывести уравнения движения относительно системы отсчета $\mathcal{R}'$. Вывод будет существенным образом опираться на дифференциальное исчисление на группах Ли и многообразиях, а также на свойствах инвариантности (2.2), (2.3), (2.4).

Прежде всего существует дифференцируемое отображение $t \mapsto M(t) \in \mathbb{D}$, задающее движение системы отсчета $\mathcal{R}'$ относительно системы отсчета $\mathcal{R}$ (*и относительно самой системы отсчета* $\mathcal{R}'$), такое, что если s (соответственно σ) $\in \mathbb{S}$ – конфигурация механической системы, наблюдаемая по отношению к $\mathcal{R}$ (соответственно к $\mathcal{R}'$) в момент времени t, то

$$s = M(t).\sigma, \quad s,\sigma \in \mathbb{S},$$

откуда $\pi(s) = \pi(\sigma) = x$. Полагая

$$\mathbf{U} = \vartheta_r(\dot{M}),\ \mathbf{U}' = \vartheta_\ell(\dot{M}) \equiv \mathrm{Ad}\,M^{-1}.\mathbf{U},\ \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s}),\ \mathbf{W} = \boldsymbol{\omega}(\dot{\sigma}),$$

где ϑ_r и ϑ_ℓ – правая и левая формы Маурера-Картана $\mathbb{D}$, докажем, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \operatorname{Ad} M.\mathbf{W}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{U}} + \operatorname{Ad} M.\dot{\mathbf{W}} + [\mathbf{U}, \operatorname{Ad} M.\mathbf{W}] \tag{2.8}$$

и что *первое и второе уравнения (2.6) соответственно эквивалентны уравнениям*

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\dfrac{\nabla^{\mathbb{X}}\dot{x}}{dt}, \cdot\Big) - \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(.)(\mathbf{W}) + \mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_\Gamma(\dot{x}, .)) - \\ \qquad -\nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(.)(\mathbf{U}') - \nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(.)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) + \\ \qquad +\mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{U}', \boldsymbol{\Omega}_\Gamma(\dot{x}, .)) = Q - \nabla_x \Pi'(t, \sigma). \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathbf{C}(\sigma)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) + \operatorname{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \\ &+\nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{U}') + \mathbf{I}(\sigma)\Big(\tfrac{d\mathbf{U}'}{dt}\Big) = \mathbf{F}' - \pounds\Pi'(t, \sigma), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\mathbf{F}' = \operatorname{Ad}^* M^{-1}.\mathbf{F}$ *и* $\Pi'(t, \sigma) = \Pi(t, M.\sigma)$ *– сила и потенциал, наблюдаемые в системе отсчета* $\mathcal{R}'$.

□ Обозначим через σ_s отображение $g \mapsto g.s$, которое не следует путать с точкой σ в пространстве $\mathbb{S}$. Тогда

$$\dot{s} = \sigma_s^T\big(\vartheta_r(\dot{M})\big) + L_M^T(\dot{\sigma}).$$

Величина $\vartheta_r(\dot{M})$ – это *переносная скорость, обусловленная движением системы отсчета* $\mathcal{R}'$, в то же время $\boldsymbol{w} = \dot{\sigma}$ описывает *скорость системы по отношению к системе отсчета* $\mathcal{R}'$. В результате применения $\boldsymbol{\omega}$ к левой и правой частям и в силу общих свойств связности получается первое уравнение (2.8). Второе уравнение (2.8) следует из того, что

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Ad} M = \operatorname{ad}\vartheta_r(\dot{M}) \circ \operatorname{Ad} M.$$

Если предположить, что $s = M.\sigma$, *где* $M \in \mathbb{D}$, *то для фиксированных* X *и* Y *в* $\mathfrak{d}$

$$\nabla_x \mathbf{J}(s)(\delta x)(X,Y) = \nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(\delta x)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y) \tag{2.11}$$
$$\nabla_x \mathbf{I}(s)(\delta x)(X) = \mathrm{Ad}\, M^{*}.\nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\delta x)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X). \tag{2.12}$$

Линейные формы $\nabla_x \mathbf{J}(s)(\delta x)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y)$ и $\nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(\delta x)(X,Y)$, соответственно представляют собой значения дифференциалов соотношений $\sigma \mapsto \mathbf{J}(\sigma)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y)$ и $s \mapsto \mathbf{J}(s)(X,Y)$ для $\delta x \in T_x\mathbb{X}$ на

$$\boldsymbol{w} = \Gamma(\sigma, \delta x) \text{ и } \boldsymbol{v} = \Gamma(s, \delta x) = L_M^T(\boldsymbol{w}).$$

Более того, $\mathbf{J}(M.\sigma)(X,Y) = \mathbf{J}(\sigma)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y)$, и дифференцирование по σ левой и правой частей дает

$$d\mathbf{J}(M.\sigma)(L_M^T(\boldsymbol{w}))(X,Y) = d\mathbf{J}(\sigma)(\boldsymbol{w})(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y).$$

Дифференцирование сложной функции дает $d\mathbf{J}(M.\sigma)(L_M^T(\boldsymbol{w})) \equiv d\mathbf{J}(s)(\boldsymbol{v})$, откуда следует соотношение (2.11), эквивалентное

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x \mathbf{I}(s)(\delta x)(X), Y\rangle &= \langle \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\delta x)\big(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X\big), \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y\rangle \\ &= \big\langle \mathrm{Ad}^{\,*} M.\nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\delta x)\big(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X\big), Y\big\rangle \end{aligned}$$

и эквивалентное соотношению (2.12), так как это соотношение имеет место для всех X и $Y \in \mathfrak{d}$. Из (2.8) и (2.11) получается, что

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x)(\mathbf{V}) &= \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{U}' + \mathbf{W}) = \\ &= \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{W}) + \nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) + \\ &\quad + \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{U}'). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Так как

$$\Omega(L_M^T \boldsymbol{v}_1, L_M^T \boldsymbol{v}_2) = \mathrm{Ad}\, M.\Omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2), \quad \Gamma(M.\sigma, \delta x) = L_M^T \Gamma(\sigma, \delta x),$$

то имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\Omega_{\Gamma}(s,\dot{x},\delta x) &= \operatorname{Ad} M.\Omega_{\Gamma}(\sigma,\dot{x},\delta x) \quad \forall \delta x\in T_x\mathbb{X},\\
\mathbf{J}(s)(\mathbf{V},\boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x},\delta x)) &= \mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{W},\boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x},\delta x)) + \\
&\quad +\mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{U}',\boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x},\delta x)).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14) следует, что первое уравнение (2.6) эквивалентно уравнению (2.9).

Из соотношения (2.2) и равенства $\dfrac{d}{dt}\operatorname{Ad}^*M = \operatorname{ad}^*\vartheta_r(\dot{M})\circ \operatorname{Ad}^*M \equiv \operatorname{Ad}^*M\circ\operatorname{ad}^*\vartheta_\ell(\dot{M})$ следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) &= \operatorname{Ad}^*M.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathbf{I}(s)(\mathbf{U}),\\
\frac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) &= \operatorname{Ad}^*M.\Big(\frac{d}{dt}\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \operatorname{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})\Big) + \frac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{U}).
\end{aligned}$$

Имеем $\mathbf{I}(s)(\mathbf{U}) = \operatorname{Ad}^*M.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}')$. С помощью (2.4), где $\boldsymbol{w} = \dot{\sigma}$ можно найти, что

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{U}) &= \operatorname{Ad}^*M.\Big(\operatorname{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \operatorname{ad}^*\mathbf{W}.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') - \\
&\qquad -\mathbf{I}(\sigma)(\operatorname{ad}\mathbf{W}.\mathbf{U}')\Big) + \\
&+ \operatorname{Ad}^*M.\Big(\nabla\mathbf{I}(\boldsymbol{w})(\mathbf{U}') + \mathbf{I}(\sigma)\Big(\frac{d\mathbf{U}'}{dt}\Big)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) &= \operatorname{Ad}^*M.\Big(\frac{d}{dt}\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})\Big) + \\
&+ \operatorname{Ad}^*M.\Big(\operatorname{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \operatorname{ad}^*\mathbf{W}.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \\
&\qquad +\mathbf{I}(\sigma)([\mathbf{U}',\mathbf{W}]) + \operatorname{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}')\Big) + \\
&+ \operatorname{Ad}^*M.\Big(\nabla\mathbf{I}(\boldsymbol{w})(\mathbf{U}') + \mathbf{I}(\sigma)\Big(\frac{d\mathbf{U}'}{dt}\Big) = \Big)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Ad}^*M.\Big(\frac{d}{dt}\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathbf{C}(\sigma)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) +$$
$$+\mathrm{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \nabla_x\mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{U}') + \mathbf{I}(\sigma)\Big(\frac{d\mathbf{U}'}{dt}\Big)\Big), \tag{2.15}$$

так как $\pi^T(\dot{s}) = \pi^T(\boldsymbol{w}) = \dot{x}$, $\nabla\mathbf{I}(\boldsymbol{w}) = \nabla_x\mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})$). С другой стороны, для $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$

$$\langle \pounds(\Pi(t,s)), \mathbf{u}\rangle = \left[\frac{d}{d\tau}\Pi(t, \exp(\tau\mathbf{u}).s)\right]_{\tau=0}.$$

Однако $\exp(\tau\mathbf{u}).s = \exp(\tau\mathbf{u}).(M.\sigma) = M.M^{-1}.\exp(\tau\mathbf{u}).(M.\sigma) = M.\exp(\tau\mathrm{Ad}\, M^{-1}.\mathbf{u}).\sigma$, так что

$$\langle \pounds(\Pi(t,s)), \mathbf{u}\rangle = \langle \pounds\Pi'(t,\sigma), \mathrm{Ad}\, M^{-1}.\mathbf{u}\rangle = \langle \mathrm{Ad}^*M.\pounds\Pi'(t,\sigma), \mathbf{u}\rangle,$$

где Π' определено соотношением $\Pi'(t,\sigma) = \Pi(t, M.\sigma)$ для $\sigma \in \mathbb{S}$. Так как $\mathbf{u}$ может быть любым из множества $\mathfrak{d}$, то

$$\pounds(\Pi(t,s)) = \mathrm{Ad}^*M.\pounds\Pi'(t,\sigma).$$

Если подставить только что полученные соотношения во второе уравнение (2.6), то получается уравнение (2.10), так как Ad^*M – автоморфизм пространства $\mathfrak{d}^*$. ∎

Пусть
$$\mathfrak{K}(s) = \{\boldsymbol{\Omega}(s)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_s\mathbb{S}\}.$$

Так как каждый горизонтальный вектор из $T_s\mathbb{S}$ имеет вид $\boldsymbol{v} = \Gamma(s,u)$, где $u \in T_x\mathbb{X}$, то

$$\{\boldsymbol{\Omega}_\Gamma(s,u,v) \mid u, v \in T_x\mathbb{X}\} = \{\boldsymbol{\Omega}(s)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_s\mathbb{S}\} = \mathfrak{K}(s).$$

Теорема 2.2 *Необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнения движения (2.6) были одними и теми же во всех галилеевских системах отсчета, имеет вид*

$$\forall s \in \mathbb{S},\ \forall U \in \mathfrak{t}: \quad \begin{cases} a)\ \forall X \in \mathfrak{d}:\ \mathbf{C}(s)(U,X) = 0, \\ b)\ \forall X \in \mathfrak{d}:\ \nabla\mathbf{J}(s)(U,X) = 0, \\ c)\ \forall X \in \mathfrak{K}(s): \mathbf{J}(s)(U,X) = 0, \end{cases}$$

где ∇ – ковариантная производная в динамической связности, а $\mathbf{\Omega}$ (в определении $\mathfrak{K}(s)$) – форма кривизны динамической связности.

Примечательно, что свойство b) эквивалентно следующему

$$\forall s \in \mathbb{S}, \quad \forall U \in \mathfrak{t} \quad \nabla \mathbf{I}(s)(U) = 0$$

в $\mathcal{L}(T_s\mathbb{S}, \mathfrak{d}^*)$. Надо заметить, что $\mathbf{I}(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}^*)$ и $\mathbf{I}(s)(U) \in \mathfrak{d}^*$, поэтому $\nabla \mathbf{I}(s)(U) \in \mathcal{L}(T_s\mathbb{S}, \mathfrak{d}^*)$).

Свойство a) представляет собой условие объективности инерционных сил (торсоров), действующих на замороженную систему. Согласно результату, доказанному в работе [1, разд.7], если $\mathbb{D}$ – обычная группа движений, то это свойство определяет математическую форму оператора $\mathbf{I}(s)$ на каждом слое из расслоения.

Свойство c), вообще говоря, не надо проверять для любой инвариантной римановой структуры на $\mathbb{S}$. Однако это свойство должно быть обязательно проверено для обеспечения галилеевской инвариантности законов динамики.

Как будет показано в разд. 4, безотносительно к общей теории свойства a), b), и c) надо проверять для конкретных общих моделей систем твердых тел или аффинно-деформируемых тел.

□ Рассмотрим две галилеевских системы отсчета $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$, такие, что $M(t) = A.\exp(tU)$ при $U \in \mathfrak{t}$ и фиксированном $A \in \mathbb{D}$. Тогда величина $\mathbf{U}' = U$ также постоянна. Экспоненциальное отображение exp определено на группе Ли $\mathbb{D}$, и так как $\mathfrak{t}$ – алгебра Ли подгруппы поступательных движений, то $\exp(tU)$ – поступательное движение с постоянной скоростью. Для произвольного выбора $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ уравнения движения относительно $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ должны быть идентичны тем, что были выведены из теоремы 2.1. Однако, как было показано выше, уравнения, выведенные из этой теоремы для системы отсчета $\mathcal{R}$, *эквивалентны* уравнениям (2.9) и (2.10). Поэтому необходимое и достаточное условие того, что дополнительные слагаемые, появляющиеся в левых частях уравнений (2.9) и (2.10) (для постоянной скорости $\mathbf{U}'$) обращаются в нуль для всех динамических процессов и для всех выборов галилеевской системы отсчета $\mathcal{R}'$:

$$-\nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(.)(\mathbf{U}') - \nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(.)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) + \mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{U}', \mathbf{\Omega}_{\text{г}}(\dot{x}, .)) = 0.$$

$$\mathbf{C}(\sigma)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) + \operatorname{ad}^* \mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{U}') = 0,$$

Зафиксируем момент времени $t = t_o$. Прежде всего условие следует проверить, когда система отсчета $\mathcal{R}'$ выбрана таким образом, что $M(t_o) = e$ для данной скорости $U \in \mathfrak{t}$. Однако для всех конфигураций s системы в момент времени t_o и для всех заданных значений $X \in \mathfrak{d}$, $u \in T_x\mathbb{X}$ существует динамический процесс, такой что $\mathbf{W} = X$ и $\dot{x} = u$. Таким образом, для всех $U \in \mathfrak{t}$, всех $X \in \mathfrak{d}$ и всех $u \in T_x\mathbb{X}$ должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} -\nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(.)(U) - \nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(u)(U, X) + \mathbf{J}(\sigma)(U, \mathbf{\Omega}_{\text{г}}(u, .)) = 0, \\ \\ \mathbf{C}(\sigma)(U, X) + \operatorname{ad}^* U.\mathbf{I}(\sigma)(U) + \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(u)(U) = 0. \end{cases}$$

В этих уравнениях можно заменить U, X, u на αU, βX, γu и получить два полиномиальных условия, которые должны выполняться для всех $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Для того чтобы коэффициенты этих многочленов обращались в нуль, необходимо и достаточно, чтобы для любых $s \in \mathbb{S}$, $U \in \mathfrak{t}$ выполнялись условия

$$\begin{cases} \forall X \in \mathfrak{d}\colon \mathbf{C}(s)(U, X) = 0, \\ \operatorname{ad}^* U.\mathbf{I}(s)(U) = 0, \\ \nabla_x \mathbf{I}(s)(.)(U) = 0 \ \ (\text{в } T_x^*\mathbb{X}), \\ \nabla_x \mathbf{K}(s)(.)(U) = 0 \ (\text{в } T_x^*\mathbb{X}), \\ \forall X \in \mathfrak{d}\colon \nabla_x \mathbf{J}(s)(.)(U, X) = 0 \ (\text{в } T_x^*\mathbb{X}), \\ \ \forall u \in T_x\mathbb{X}\colon \mathbf{J}(s)(U, \mathbf{\Omega}_{\text{г}}(u, .)) = 0 \ (\text{в } T_x^*\mathbb{X}). \end{cases} \tag{2.16}$$

Наоборот, нетрудно видеть, что если условия (2.16) выполнены, то уравнения движения относительно $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ идентичны для любого выбора галилеевских систем отсчета $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. Однако эти свойства не являются независимыми друг от друга. С одной стороны, если заметить, что

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(s)(U,U) &= \operatorname{ad}^*U.\mathbf{I}(s)(U) + \operatorname{ad}^*U.\mathbf{I}(s)(U) + \mathbf{I}(s)([U,U]) = \\ &= 2\operatorname{ad}^*U.\mathbf{I}(s)(U),\end{aligned}$$

то второе свойство оказывается следствием первого и может быть удалено. С другой стороны, можно заметить, что

$$\mathbf{J}(s)(U,X) = \langle \mathbf{I}(s)(U), X\rangle \Longrightarrow$$

$$\nabla\mathbf{J}(\boldsymbol{v})(U,X) = \langle \nabla\mathbf{I}(\boldsymbol{v})(U), X\rangle, \quad \boldsymbol{v}\in T_s\mathbb{S},$$

так что поскольку вектор из $T_s\mathbb{S}$ имеет вид $\boldsymbol{v} = \Gamma(s,\delta x)$, где $\delta x \in T_x\mathbb{X}$, и поскольку $\mathbf{K}(s)$ – квадратичная форма, ассоциированная с $\mathbf{J}(s)$, то

$$\begin{aligned}\forall X\in\mathfrak{d},\ \forall \boldsymbol{v}\in T_s\mathbb{S} : \nabla\mathbf{J}(\boldsymbol{v})(U,X) = 0 \Longleftrightarrow\\ \forall X\in\mathfrak{d}, \forall\,\delta x\in T_x\mathbb{X} : \nabla_x\mathbf{J}(s)(\delta x)(U,X) = 0 \Longleftrightarrow\\ \forall\,\delta x\in T_x\mathbb{X} : \nabla_x\mathbf{I}(s)(\delta x)(U) = 0 \ \Longrightarrow\\ \forall\,\delta x\in T_x\mathbb{X} : \nabla_x\mathbf{K}(s)(\delta x)(U) = 0.\end{aligned}$$

Можно сделать вывод, согласно которому третье и четвертое свойства являются следствием пятого и могут быть удалены. В конечном итоге условия (2.16) сводятся к свойствам a), b) и c). ∎

Здесь и далее относительно группы $\mathbb{D}$ будем считать, что она является группой перемещений трехмерного евклидова точечного пространства $\mathcal{E}$ и что $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}^*$ будут отождествлены с помощью формы Клейна $[\cdot \mid \cdot]$, так что можно считать, что соотношение $\mathbf{I}(s)\in\mathcal{L}(\mathfrak{d})$ и оно определено как $[\mathbf{I}(s)(X)\mid Y] = \mathbf{J}(s)(X,Y)$ – см. Приложение.

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{D}$ – обыкновенная евклидова группа. Необходимое и достаточное условие выполнения свойства a)* *состоит в том, что существуют дифференцируемые эквивариантные отображения $s \mapsto m_s$ из $\mathbb{S}$ в $]0, +\infty[$, $s \mapsto c_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{E}$ и $s \mapsto \mathsf{l}_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ такие, что для $s \in \mathbb{S}$, X и $Y \in \mathfrak{d}$:*

функция l_s симметрична и положительно определена для всех s,

$$\mathbf{J}(s)(X, Y) = m_s X(c_s) \cdot Y(c_s) + \mathsf{l}_s(\omega_X) \cdot \omega_Y.$$

Эквивариантность предусматривается по отношению *к действию группы* $\mathbb{D}$, т.е.

$$m_{g.s} = m_s, \quad c_{g.s} = g(c_s), \quad \mathsf{l}_{g.s} = \mathbf{g} \circ \mathsf{l}_s \circ \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}_* \mathsf{l}_s,$$

где $\mathbf{g}$ составляет линейную часть аффинного отображения g.

$\Box$ Каждый слой расслоения $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{D})$ – это главное однородное пространство группы $\mathbb{D}$, поэтому результат, доказанный в [1, разд.7], применим к римановой структуре, индуцированной одним к одному из $\mathbb{S}$ и ведет к алгебраическим свойствам, эквивалентным свойству *a)*, именно: существует отображение $s \mapsto m_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}$ (которое фактически постоянно на каждом слое расслоения) и существуют отображения $s \mapsto c_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{E}$, $s \mapsto \mathsf{l}_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{L}_{sim}(\mathfrak{d})$ с алгебраическими свойствами, упомянутыми в лемме 1 и ведущими к упомянутому выражению для $\mathbf{J}(s)(X, Y)$. Свойства инвариантности и эквивариантности выводятся из соотношения $\mathbf{J}(g.s)(\mathrm{Ad}\, g.X, \mathrm{Ad}\, g.Y) = \mathbf{J}(s)(X, Y)$, преобразующего X и Y в $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{c}_s$. $\blacksquare$

Лемма 2. *Если однородное пространство $\mathbb{S}$ связно и выполняется свойство* a)*, то свойство* b) *эквивалентно высказыванию:*

$$m_s \text{ постоянно на пространстве } \mathbb{S} \text{ и } d\,c(\boldsymbol{v}) = 0, \text{ если вектор } \boldsymbol{v} \in T\mathbb{S} \text{ горизонтален.} \tag{2.17}$$

$\Box$ Из результата, доказанного в [1], следует, что если ε – дуальное число, такое что $\varepsilon^2 = 0$, рассмотренное как $\mathbb{R}$-линейный оператор в $\mathfrak{d}$, преобразующий каждое векторное поле в $\mathfrak{d}$ в постоянное векторное поле на $\mathfrak{t}$:

$$\varepsilon\mathbf{I}(s)(U) = m_s U \qquad \forall U \in \mathfrak{t}, \quad - \tag{2.18}$$

и в общем случае, если $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ – значение векторного поля U в произвольной точке $\mathcal{E}$:

$$\forall a \in \mathcal{E}: \quad \mathbf{I}(s)(U)(a) = m_s\,\mathbf{u} \times \overrightarrow{c_s a}. \tag{2.19}$$

Условие b) означает, что $\nabla\mathbf{I}(s)(U) = 0$. Это эквивалентно высказыванию о том, что для всех *горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$ величина $d\mathbf{I}(\boldsymbol{v})(U)$ обращается в нуль $\mathfrak{d}$, или что производные левых частей соотношений (2.18) и (2.19) обращаются в нуль.

Из соотношения (2.18) следует, что функция $s \mapsto m_s$ дифференцируема. Однако из свойства b) и из (2.18) следует, что $dm(\boldsymbol{v}) = 0$ для всех *горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v}$. Так как величина m_s постоянна на слоях, то $dm(\boldsymbol{v}) = 0$ для всех *вертикальных* векторов $\boldsymbol{v}$. Поэтому $dm(\boldsymbol{v}) = 0$ для всех $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$. Следовательно, величина m постоянна на связном многообразии $\mathbb{S}$. Так как $\mathbf{J}(s)(U,U) = m\mathbf{u}^2$ и $\mathbf{J}(s)$ – положительно определенная квадратичная форма на $\mathfrak{d}$, то $m > 0$.

Теперь из b) и соотношения (2.19) следует, что отображение $s \mapsto c_s$ дифференцируемо и что

$$d\big(\mathbf{I}(\boldsymbol{v})(U)(a)\big) = m\,d\big(\mathbf{u} \times \overrightarrow{c_s a}\big) = -m\mathbf{u} \times dc(\boldsymbol{v}) = 0$$

для всех *горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S}$ и для всех $\mathbf{u}$. Окончательно

$$dc(\boldsymbol{v}) = 0$$

для всех *горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S}$. И наоборот, если величина m_s постоянна на $\mathbb{S}$ и если предыдущее свойство выполнено, то условие b) также выполнено. ■

Теорема 2.3 *Пусть пространство* $\mathbb{S}$ *связно и пусть* $\mathbb{D}$ *– обычная евклидова группа. Необходимые и достаточные условия того, что уравнения движения (2.6) остаются теми же самыми во всех галилеевских системах отсчета, таковы:*

1. *Существует число* $m > 0$ *и дифференцируемые эквивариантные отображения* $s \mapsto c_s$ *из* $\mathbb{S}$ *в* $\mathcal{E}$ *и* $s \mapsto \mathsf{I}_s$ *из* $\mathbb{S}$ *в* $\mathcal{L}(\mathbb{E})$, *такие что для* $s \in \mathbb{S}$, X *и* $Y \in \mathfrak{d}$:

   I_s *– симметрическая положительно определенная функция для всех* s,

$$\mathbf{J}(s)(X, Y) = mX(c_s) \cdot Y(c_s) + \mathsf{I}_s(\omega_X) \cdot \omega_Y.$$

2. *Для всех* горизонтальных *векторов* $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$ *имеет место соотношение* $d\,c(\boldsymbol{v}) = 0$.

3. *Для всех* $s \in \mathbb{S}$ *выполнено соотношение* $\mathfrak{K}(s) \subset \mathfrak{c}_s$, *где* $\mathfrak{c}_s$ *– подалгебра Ли векторных полей* $X \in \mathfrak{d}$, *таких что* $X(c_s) = 0$.

Свойство 1 означает, что для «замороженных систем» инертные свойства описываются как для твердого тела; свойство 2 означает, что когда играют роль деформации, центр масс системы остается фиксированным вдоль горизонтальных кривых динамической связности.

□ Свойства являются необходимыми: если выполнены условия a), b) и c), то свойства 1 и 2 представляют собой следствия леммы 1. Из свойства 1 следует, что подпространство пространства $\mathfrak{d}$, ортогональное $\mathfrak{t}$ относительно билинейной формы $\mathbf{J}(s)$, представляет собой подпространство $\mathfrak{c}_s$, так что свойство 3 эквивалентно условию c). Обратное очевидно. ■

3. Исключение гравитации в динамике. Классическая теория исключения гравитации в «свободно падающей» системе отсчета обычно излагается для частиц. В этом разделе эта теория объясняется для систем с помощью геометрии главных расслоений. Более того, во главу угла ставится примечательная связь – математические свойства, которые как это было доказано в разд. 2, необходимы и достаточны для галилеевской инвариантности законов динамики, оказываются достаточными для исключения гравитации в «свободно падающих» системах отсчета.

Замечание. Конечно, помимо упомянутых важнейших свойств, приходится сталкиваться с той ролью, которую играет равенство инертной и гравитационной масс, а также совпадение инертного и гравитационного центров масс.

Хорошо известно, что в случае, когда гравитационное поле может быть рассмотрено как постоянное по направлению и величине, оказывается справедливым «принцип эквивалентности», представляющий собой основу для эйнштейновской теории гравитации. Также хорошо известно, что в некоторых конкретных проблемах динамики спутников в центральном ньютоновском поле сил такое предположение не было бы корректным, а посему, чтобы определить достаточно аккуратно действие гравитации, было бы необходимо принять во внимание градиент гравитационного поля в правой части второго уравнения (3.1).

В этом разделе $\mathbb{D}$ по-прежнему будет евклидовой группой движений в размерности 3, $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}^*$ отождествлены с помощью формы Клейна. Рассмотрим систему, подверженную действию гравитации и внешних сил иного происхождения, описанных как $\mathbf{F}$. Предположим, что гравитация может быть описана (внешней) силой $mgG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}) \in \mathfrak{c}_s$, приложенной к *«центру тяжести»*, где m – *гравитационная масса*, g – ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{\chi}$ – фиксированный и нормализованный элемент $\mathfrak{t}$, определяющий направление действия гравитации, $\mathfrak{c}_s$ – подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{d}$, связанная с поворотами вокруг центра тяжести. Используя обозначения из приложения, можно описать «торсор» $G(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi})$ как поле моментов, таких что $X(c_s) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}_X = \boldsymbol{\chi}$. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.4 *Для механической системы такой, что пространство $\mathbb{S}$ связно, и удовлетворяющей условиям инвариантности теоремы 2.2 (или эквивалентным условиям теоремы 2.3) и пребывающей под действием гравитации, определенной, как и выше, с помощью $\boldsymbol{\chi}$ и g, в неинерциальной системе отсчета $\mathcal{R}'$, движущейся относительно галилеевской системы отсчета сообразно $t \mapsto M(t) = \exp(z(t)\,\boldsymbol{\chi})$ с $\ddot{z}(t) = g$, динамические уравнения оказываются прежними, если система отсчета $\mathcal{R}'$ была бы галилеевской и не было бы гравитации.*

□ По отношению к некоторой галилеевской системе отсчета $\mathcal{R}$ уравнения движения (2.6) записываются как

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\dfrac{\nabla^{\mathbb{X}}\dot{x}}{dt}, \cdot\Big) - \nabla_x \mathbf{K}(s)(.)(\mathbf{V}) + \mathbf{J}(s)\,(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x}, \cdot)) = Q, \\ \mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) + [\mathbf{V}, \mathbf{I}(s)(\mathbf{V})] + \nabla_x \mathbf{I}(s)(\dot{x})(\mathbf{V}) = \mathbf{F} + mgG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}^*$ отождествлены и $\mathrm{ad}^*\mathbf{V}$ становится $\mathrm{ad}\,\mathbf{V}$. Как и в начале разд. 2, рассмотрим иную систему отсчета $\mathcal{R}'$, движение которой в рассматриваемом случае будет зависящим от времени поступательным перемещением по отношению к $\mathcal{R}$, определяемым как $M(t) = \exp\big(z(t)\,\boldsymbol{\chi}\big)$, где $\boldsymbol{\chi} \in \mathfrak{t}$. Положения s и σ системы по отношению к системам отсчёта $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ вновь связаны соотношением $s = M.\sigma$, из которого следует, что $\pi(s) = \pi(\sigma) = x$. Тогда в (2.8) мы должны принять $\vartheta_r(\dot{M}) = \dot{z}\boldsymbol{\chi}$, а в (3.1) –

$$\mathbf{V} = \dot{z}\boldsymbol{\chi} + \mathrm{Ad}\,M.\mathbf{W},\ \dot{\mathbf{V}} = \ddot{z}\boldsymbol{\chi} + \dot{z}[\boldsymbol{\chi}, \mathrm{Ad}\,M.\mathbf{W}] + \mathrm{Ad}\,M.\dot{\mathbf{W}},\ \mathbf{W} = \boldsymbol{\omega}(\dot{\sigma}).$$

Прежде всего докажем, что из свойств теоремы 2.2 вытекает, что для $\delta x \in T_x\mathbb{X}$

$$\begin{cases} \nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x)(\mathbf{V}) & = & \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{W}), \\ \mathbf{J}(s)\Big(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x}, \delta x)\Big) & = & \mathbf{J}(\sigma)\Big(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x}, \delta x)\Big), \\ \nabla_x \mathbf{I}(s)(\delta x)(\mathbf{V}) & = & \operatorname{Ad} M.\nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{W}). \end{cases} \tag{3.2}$$

Из формулы (2.11) и равенства $\operatorname{Ad} M^{-1}.\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}$ получается, что для фиксированных M и $\mathbf{W}$

$$\nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x)(\mathbf{V}) = \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\operatorname{Ad} M^{-1}.\mathbf{V}) =$$

$$= \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{W} + \dot{z}\boldsymbol{\chi}) =$$

$$= \Big\langle \nabla_x \Big(\mathbf{K}(\sigma)(\mathbf{W}) + \dot{z}\mathbf{J}(\sigma)(\chi, \mathbf{W}) + \frac{1}{2}\dot{z}^2 \mathbf{J}(\sigma)(\chi, \chi)\Big), \delta x\Big\rangle.$$

Тогда первое свойство (3.2) следует из теоремы 2.2 b). Так как $\boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(s, \dot{x}, \delta x) = \operatorname{Ad} M.\boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\sigma, \dot{x}, \delta x)$ и $\operatorname{Ad} M.\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}$, то

$$\mathbf{J}(s)\Big(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(s, \dot{x}, \delta x)\Big) =$$

$$= \mathbf{J}(s)\Big(\operatorname{Ad} M.\mathbf{W}, \operatorname{Ad} M.\boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\sigma, \dot{x}, \delta x))\Big) +$$

$$+ \mathbf{J}(s)\Big(\dot{z}\boldsymbol{\chi}, \operatorname{Ad} M.\boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\sigma, \dot{x}, \delta x))\Big) =$$

$$= \mathbf{J}(\sigma)\Big(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\sigma, \dot{x}, \delta x)\Big) + \dot{z}\, \mathbf{J}(\sigma)\Big(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\sigma, \dot{x}, \delta x))\Big).$$

Второе свойство (3.2) представляет собой следствие из $\boldsymbol{\chi} \in \mathfrak{t}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\sigma, \dot{x}, \delta x) \in \mathfrak{K}(\sigma)$ и c). Последнее из свойств (3.2) – следствие (2.12) и b) (см. замечание после теоремы 2.2). Так как $\mathcal{J}_{\mathrm{def}}$ и Q зависят лишь от $(x, \dot{x})$, то для произвольного выбора функции $t \mapsto z(t)$ первое уравнение (3.1) эквивалентно уравнению

$$\mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\frac{\nabla^{\mathbb{X}} \dot{x}}{dt}, \cdot\Big) - \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathbf{J}(\sigma)\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x}, \cdot)\right) = Q. \tag{3.3}$$

Некоторые непосредственные вычисления или приложение (2.15) с постоянным $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\chi}$ дают

$$\mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) + [\mathbf{V}, \mathbf{I}(s)(\mathbf{V})] + \nabla_x \mathbf{I}(s)(\dot{x})(\mathbf{V}) =$$

$$= \operatorname{Ad} M. \Big\{ \mathbf{I}(\sigma)(\dot{\mathbf{W}}) + [\mathbf{W}, \mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})] + \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{W}) \Big\} +$$

$$+ \operatorname{Ad} M. \Big\{ \dot{z} \mathbf{C}(\sigma)(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{W}) + \dot{z}^2 [\boldsymbol{\chi}, \mathbf{I}(\sigma)(\boldsymbol{\chi})] \Big\} + \ddot{z}\, m G(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}) =$$

$$= \operatorname{Ad} M. \Big\{ \mathbf{I}(\sigma)(\dot{\mathbf{W}}) + [\mathbf{W}, \mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})] + \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{W}) \Big\} + \ddot{z}\, m G(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}),$$

так как, согласно доказанному в [1, разд.7], из свойства a) теоремы 2.2 следует, что

$$\mathbf{C}(\sigma)(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{W}) = 0, \quad [\boldsymbol{\chi}, \mathbf{I}(\sigma)(\boldsymbol{\chi})] = 0, \quad \mathbf{I}(s)(\boldsymbol{\chi}) = m G(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}).$$

(на этом шаге m, $\mathfrak{c}_s$ – *инертная масса* и *центр масс*, выведенные из свойства a), см. также лемму 1). Теперь, если предположить, что, с одной стороны, инертная и гравитационная массы, а с другой стороны – центр масс и центр тяжести совпадают, то второе уравнение (3.1) запишется как

$$\operatorname{Ad} M. \Big\{ \mathbf{I}(\sigma)(\dot{\mathbf{W}}) + [\mathbf{W}, \mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})] + \nabla_q \mathbf{I}(\sigma)(\dot{q})(\mathbf{W}) \Big\} + \ddot{z}\, m G(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}) =$$

$$= \mathbf{F} + m g G(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}).$$

Если мы зададим движение системы отсчета $\mathcal{R}'$ как $\ddot{z}(t) = g$, то второе уравнение (3.1) будет эквивалентным уравнению

$$\mathbf{I}(\sigma)(\dot{\mathbf{W}}) + [\mathbf{W}, \mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})] + \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{W}) = \boldsymbol{\Phi}, \tag{3.4}$$

где согласно объективности сил $\boldsymbol{\Phi} = \operatorname{Ad} M^{-1}.\mathbf{F}$ – внешняя сила, за исключением гравитации, как она наблюдаема в системе отсчета $\mathcal{R}'$. Теперь уравнения (3.3) и (3.4) – те самые уравнения, которые были бы получены из принципа Гамильтона с помощью системы отсчета $\mathcal{R}'$, если бы она была галилеевская. Теорема 3.4 доказана. ∎

4. Примеры. Покажем, что условия общих теорем 2.2 и 3.4 были выполнены в задачах о движении конкретных механических систем, рассмотренных в [2] и [3] (системы обычных твердых тел или аффинно-деформируемого тела). Чтобы облегчить чтение, выпишем в приложении к этой статье конкретные представления алгебр Ли, играющих роль в этих примерах.

Система твердых тел. Рассмотрим систему твердых тел, стесненных лишь *внутренними* голономными связями – см. разд.2.2, пример 3 и приложение в работе [3]. Пусть $\mathbb{B}$ – конечное множество, «список» тел, образующих систему. Согласно свойствам i), ii), iii), разд. 1, конфигурационное пространство каждого тела $a \in \mathbb{B}$ – это главное однородное пространство $\mathbb{S}_a$ группы $\mathbb{D}$, и инертные свойства тела определены как $\mathcal{H}_a \colon T\mathbb{S}_a \to T\mathbb{S}_a$ или, что эквивалентно, операторами $H_a(s_a) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$.

Конфигурационное пространство системы в целом представляет собой подмногообразие $\mathbb{S}$ произведения $\prod_{a\in\mathbb{B}} \mathbb{S}_a$, *инвариантного под действием* $\mathbb{D}$. Элемент s из $\mathbb{S}$ (соответственно $\boldsymbol{v}$ из $T_s\mathbb{S}$) – это семейство $s = (s_a \mid a \in \mathbb{B})$ (соответственно, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_a \mid a \in \mathbb{B},\ \boldsymbol{v}_a \in T_{s_a}\mathbb{S}_a)$), удовлетворяющее условиям, наложенным внутренними связями. Заметим, что Θ_a – это $\mathfrak{d}$-значная 1-форма на $\mathbb{S}$, такая что $\Theta_a(\boldsymbol{v}) = \vartheta(\boldsymbol{v}_a)$, где ϑ – каноническая $\mathfrak{d}$-значная 1-форма на $\mathbb{S}_a$ (см. [1]). Вводя обобщенный смешанный тензор инерции $\overset{\circ}{H}(s) = \sum_{a\in\mathbb{B}} H_a(s_a)$ замороженной системы в положении s, имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= \sum_{a\in\mathbb{B}} [H_a(s_a)(\Theta_a(\boldsymbol{v})) \mid \Theta_a(\boldsymbol{w})],\\
\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{v}) &= \overset{\circ}{H}(s)^{-1}\Big(\sum_{a\in\mathbb{B}} H_a(s_a)(\Theta_a(\boldsymbol{v}))\Big), \qquad (4.1)\\
\mathbf{J}(s)(X,Y) &= [\overset{\circ}{H}(s)(X) \mid Y],
\end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in T\mathbb{S}, \quad o(\boldsymbol{v}) = o(\boldsymbol{w}), \quad X,\ Y\ \in \mathfrak{d}.$$

Свойство a) теоремы 2.2 имеет вид

$$\forall\, s \in \mathbb{S},\ \forall\, U \in \mathfrak{t},\ \forall\, X \in \mathfrak{d} \colon [U, \overset{\circ}{H}_s(X)] + [X, \overset{\circ}{H}_s(U)] + \overset{\circ}{H}_s([U, X]) = 0.$$

Оно выполнено, так как для каждого оператора $H_a(s_a)$ выполнены условия (1.2), введенные в разд. 1.

Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{d}$ с алгеброй Ли кососимметрических векторных полей на $\mathcal{E}$. Для $U \in \mathfrak{t}$ и $X \in \mathfrak{d}$, так как X – аффинное отображение, то

$$\mathbf{J}(s)(U, X) = \sum_{a \in \mathbb{B}} m_a \mathbf{u} \cdot X(c_{s_a}) = \mathbf{u} \cdot \sum_{a \in \mathbb{B}} m_a X(c_{s_a}) = m\mathbf{u} \cdot X(c_s), \tag{4.2}$$

где $\mathbf{u}$ – значение векторного поля U во всех точках из $\mathcal{E}$. c_{s_a} и $c_s \in \mathcal{E}$ – центры масс тела a и системы в конфигурации $s = (s_a) \in \mathbb{S}$. Нетрудно доказать, что для $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$:

$$m\, dc_s(\boldsymbol{v}) = \sum_{a \in \mathbb{B}} m_a \mathbf{V}_a(c_{s_a}) \qquad \mathbf{V}_a = \Theta_a(\boldsymbol{v}),\ \ m = \sum_{a \in \mathbb{B}} m_a,$$

где m_a – масса тела a. С учетом соотношения (4.1), условие, означающее, что вектор $\boldsymbol{v}$ горизонтален, принимает вид

$$\sum_{a \in \mathbb{B}} H_a(s_a)(\mathbf{V}_a) = \mathbf{0}.$$

Соотношение, включающее линейный и угловой моменты, в развернутом виде записывается как

$$\sum_{a \in \mathbb{B}} \begin{bmatrix} -m_a \tilde{\mathrm{c}}_{s_a} & m_a \mathbf{1} \\ \mathbf{I}_{s_a}, & m_a \tilde{\mathrm{c}}_{s_a} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_a \\ \mathbf{V}_a(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где $\mathrm{c}_{s_a} = \overrightarrow{o c}_{s_a}$ и $\tilde{\mathrm{c}}_{s_a}$ – оператор «векторного произведения с c_{s_a}». Выделяя часть, дающую линейный момент, выводим, что

$$\sum_{a\in\mathbb{B}} m_a \mathbf{V}_a(c_{s_a}) = \mathbf{0}.$$

Следовательно, для горизонтального $\boldsymbol{v}$ выполняется равенство $dc_s(\boldsymbol{v}) = 0$ и с учетом (4.2) выполняется свойство b).

Кривизна $\boldsymbol{\Xi}$ для $\boldsymbol{\varpi}$ вычислена в публикации [3]: для $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in T\mathbb{S}$, $o(\boldsymbol{v}) = o(\boldsymbol{w}) = s$

$$\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \overset{\circ}{H}(s)^{-1}\Big(\sum_{a\in\mathbb{B}} \delta H_a(s_a)\big(\Theta_a(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{v}), \Theta_a(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{w})\big)\Big).$$

Выражение

$$\delta H_a(s_a)(X,Y) = [H_a(s_a)(X), Y] + [X, H_a(s_a)(Y)] - H_a(s_a)\big([X,Y]\big) -$$

это «дифференциал» $H_a(s_a) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$ (ко-граница в когомологии алгебр Ли). Для классических твердых тел все отображения $\delta H_a(s_a)$ принимают свои значения в $\mathfrak{t}$, где $\overset{\circ}{H}(s)^{-1}$ – изоморфизм $\mathfrak{t}$ на $\mathfrak{z}_s^-$ (алгебра Ли группы поворотов вокруг центра масс системы), поэтому $\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathfrak{z}_s^-$. Формула (4.2) показывает, что $\mathbf{J}(s)\big(U, \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\big) = 0$ для $U \in \mathfrak{t}$ и условие c) выполнено.

Аффинно-деформируемые тела. Воспользуемся непосредственным подходом к динамике аффинно-деформируемого тела в евклидовом аффинном пространстве $\mathcal{E}$, представленным в публикации [2], в частности в разд.5.3. В обозначениях настоящей статьи формула (40) из [2] для X и $Y \in \mathfrak{d}$ примет вид

$$\mathbf{J}(s)(X,Y) = mX(c_s)\cdot Y(c_s) + \mathsf{J}_s(\Omega_X, \Omega_Y), \qquad (4.3)$$

где c_s – центр масс тела в конфигурации s. Ω_X и Ω_Y кососимметричны и

$$\mathsf{J}_s(\Omega_X,\Omega_Y) = \int \Omega_X\big(\overrightarrow{c_s x}\big)\cdot \Omega_Y\big(\overrightarrow{c_s x}\big)\, d\mu_s(x).$$

Свойства a), b), c) теоремы 2.2 могут быть выведены непосредственно. На самом деле, свойство *a)* имеет вид

$$\forall\, s \in \mathbb{S},\ \forall\, U \in \mathfrak{t},\ \forall\, X \in \mathfrak{d}\colon [U, \overset{\circ}{H}_s(X)] + [X, \overset{\circ}{H}_s(U)] + \overset{\circ}{H}_s([U, X]) = 0,$$

где $\overset{\circ}{H}_s \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$ – оператор инерции, ассоциированный с замороженным телом. Иными словами, это твердое тело, конфигурации которого сосредоточены на слое из s. Поэтому условие a) выполнено, как и в динамике твердого тела.

В работе [9] доказано, что для дифференциала отображения $s \mapsto c_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{E}$ имеет место равенство $dc_s(\boldsymbol{v}) = 0$ *для горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S}$. Согласно (4.3) для постоянного векторного поля $U \in \mathfrak{t}$, равного $\mathbf{u}$ в каждой точке пространства $\mathcal{E}$: $\mathbf{J}(s)(U, X) = m\mathbf{u} \cdot X(c_s)$. Тогда $\nabla \mathbf{J}(s)(X, U) = 0$ для $U \in \mathfrak{t}$. Поэтому свойство b) выполнено.

В работе [2] доказано Предложение 4-2, согласно которому форма кривизны Ξ удовлетворяет соотношению $\Xi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathfrak{z}_s^-$, алгебра Ли кососимметрических векторных полей на $\mathcal{E}$ обращается в нуль в центре масс c_s. Так как $\Omega_U = 0$ для $U \in \mathfrak{t}$ и $\Xi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})(c_s) = 0$, то из формулы (4.3) следует свойство c):

$$\mathbf{J}(s)\big(U, \Xi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\big) = 0 \quad \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in T_s\mathbb{S}.$$

5. Приложение. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathbb{E}$ – евклидово аффинное пространство и ассоциированное векторное пространство. Пусть $\mathrm{Ga}(\mathcal{E})$ и $\mathbb{D}$ – аффинная группа и группа движений пространства $\mathcal{E}$, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{d}$ – их алгебры Ли. Согласно общему результату (см. [11, глава I.4] или [12, глава V.2]) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (соответственно $\mathfrak{d}$) изоморфна и будет отождествлена с алгеброй Ли аффинных (соответственно кососимметричных) векторных полей на $\mathcal{E}$. Тогда, если X, Y, $Z\colon \mathcal{E} \to \mathbb{E}$ обозначают векторные поля на $\mathcal{E}$, то $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{d}$, а также некоторые примечательные подпространства определены как

- $X \in \mathfrak{g} \Longleftrightarrow$ существует $\Omega_X \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, такая что$X(p) = X(q) + \Omega_X(\overrightarrow{pq}) \quad (p, q \in \mathcal{E})$.

- Скобка Ли $Z = [X, Y]$ определена как $Z(p) = \Omega_X(Y(p)) - \Omega_Y(X(p))$ для $p \in \mathcal{E}$.

- алгебра Ли $\mathfrak{d} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \Omega_X$ кососимметрична$\}$ (подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$).

- $\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \Omega_X = 0\}$, множество постоянных векторных полей на $\mathcal{E}$ (идеал $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{d}$).

- $\mathfrak{z}_a = \{X \in \mathfrak{g} \mid X(a) = \mathbf{0}\}$ (a фиксирован в $\mathcal{E}$).

$\mathfrak{t}$ ($\subset \mathfrak{d}$) – алгебра Ли группы параллельных переносов пространства $\mathcal{E}$ (нормальная подгруппа, включенная в $\mathbb{D}$), $\mathfrak{z}_a$ – алгебра Ли подгруппы в $\mathrm{Ga}(\mathcal{E})$ элементов, оставляющих точку a инвариантной, и $\mathfrak{z}_a^- = \mathfrak{z}_a \cap \mathfrak{d}$ – алгебра Ли группы поворотов вокруг a. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{z}_a$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{z}_a^-$.

Если размерность пространства $\mathcal{E}$ равна трем (и пространство $\mathcal{E}$ ориентируемо), то кососимметричные операторы описаны с помощью векторных произведений и $X \in \mathfrak{d}$ тогда и только тогда, когда существует $\boldsymbol{\omega}_X \in \mathbb{E}$, такая что

$$X(p) = X(q) + \boldsymbol{\omega}_X \times \overrightarrow{pq} \quad (p, q \in \mathcal{E}).$$

Тогда невырожденное внутреннее произведение, форма Клейна, определена на $\mathfrak{d}$ как

$[X \mid Y] = \boldsymbol{\omega}_X \cdot Y(a) + \boldsymbol{\omega}_Y \cdot X(a)$ (значение, не зависящее от $a \in \mathcal{E}$).

В общей механике элементы $\mathfrak{d}$ описывают поля скоростей в движениях как твердого целого («кинематические моторы» в теории винтов) и элементы $\mathfrak{d}^*$ описывают торсоры («динамические винты»). В размерности три $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}^*$ могут быть отождествлены с помощью формы Клейна, и тогда векторное поле $\mathcal{M}$, соответствующее динамическому винту $T \in \mathfrak{d}^*$ ($\langle T, V\rangle = [\mathcal{M} \mid V]$ для всех $V \in \mathfrak{d}$) – это поле моментов динамического винта T. Если $\mathcal{M} \in \mathfrak{t}$, то динамический винт сводится к моменту сил, а если $\mathcal{M} \in \mathfrak{z}_a$, то он равен силе, действующей вдоль прямой, задаваемой a.

Элемент $\mathrm{Ga}(\mathcal{E})$ (соответственно $\mathbb{D}$) – это отображение $g\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, такое что существует элемент g линейной группы $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ (соответственно специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}(\mathbb{E})$), удовлетворяющий соотношению $g(p) = g(q) + \mathrm{g}(\overrightarrow{pq})$. Тогда $\mathrm{Ad}\, g.X$ – векторное поле $\mathrm{g} \circ X \circ g^{-1}\colon p \mapsto \mathrm{g}X\big(g^{-1}(p)\big)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chevallier D.P.* On the foundations of ordinary and generalized rigid body dynamics and the principle of objectivity // Arch. Mech. 2004. Vol.56. No.4. P. 313 – 353.

2. *Bourov A.A., Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // Reports on Mathematical Physics. 2008. Vol.62. No.3. P. 283 – 321.

3. *Шевалльe Д.П.* Динамика с лагранжевой и эйлеровой точек зрения. Продолжение: нетранзитивные действия групп. М.: ВЦ РАН, 2007. С. 19 – 71.

4. *Noll W.* The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics // In: The Axiomatic Method with Special References to Geometry and Physics. Symposium at Berkeley, 1957. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1959. P. 266 – 281.

5. *Noll W.* La Mécanique Classique Basée sur un Axiome d'Objectivité // In: La Méthode axiomatique dans les

mécaniques Classiques et Nouvelles. Colloque International, Paris 1959. Paris: Gauthier-Villars. 1963.

6. *Arnold V.I.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1966. No 1. P.319 – 361.

7. *Chevallier D.P.* Lie Groups and the Mathematical Structure of the Mechanics of Multibody Systems // In: Proc. Third Internat. Workshop on Advances in Robot Kinematics. Ferrara: Editor Felloni. 1992. P. 194 – 201.

8. *Chevallier D.P.* Curvature and Dynamics of an Affinely Deformable Body. Proceedings Third International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, 23-28 août 1998, Velikie Luki, Russia.

9. *Шеваллье Д.* Уравнения Пуанкаре-Четаева. Динамика аффинного тела и группа голономий // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: сборник научных статей, посвященный памяти акад. Валентина Витальевича Румянцева. М.: Физматлит, 2009. С. 190-207.

10. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре-Четаева // ПММ. Т. 58. Вып. 3. С. 3-16 = *Rumjantsev V.V.* On the Poincaré-Chetayev equations // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 1994. Vol. 58. No 3. P. 373 – 386.

11. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т.1. М.: Наука. 1981. 344 с.; Т.2. М.: Наука. 1981. 415 с. = Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. Interscience Pub. (1963).

12. *Chevallier D.P.* Introduction à la théorie des groupes de Lie réels. Paris: Ellipses, 2006. 360 p.