УДК 531.332.1

О НЕВОЗМОЖНОСТИ ЧИСТОГО СКАТЫВАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНО ВНИЗ ТЯЖЕЛОГО ДИСКА ПО КРИВОЙ С КУЛОНОВЫМ ТРЕНИЕМ

А. С. Сумбатов

Доказано, что известное решение [1, 2] задачи о брахистохроне для тяжелого однородного круглого диска, который катится по опорной кривой без скольжения, несовместимо с законом трения Кулона, если именно сила сухого трения обеспечивает отсутствие скольжения диска в точке касания его с опорной кривой – эквидистантой циклоиды.

Ключевые слова: сухое трение, коэффициент трения покоя, уравнения качения диска, сила реакции.

В решении [1, 2] задачи о наибыстрейшем скатывании тяжелого диска по плоской кривой из положения A центра диска в положение B в начальный момент времени диск покоится и начинает катиться без скольжения по кривой с вертикальной касательной. Кинематическое условие отсутствия скольжения и уравнения динамики однозначно определяют действующую на диск силу со стороны опорной кривой. Оказывается, в окрестности старта тангенциальная и нормальная компоненты этой силы не подчиняются закону сухого трения Кулона. Следовательно, когда в точке контакта диска с опорой развивается только сила сухого трения, то обязательно начнется скольжение, и потому найденная в указанном решении опорная кривая, эквидистанта циклоиды, решением поставленной вариационной задачи не является.

Согласно [1, 2], брахистохрона представляет собой эквидистантную кривую, отстоящую от траектории центра O диска, на расстоянии, равном радиусу диска, а траекторией центра диска является дуга циклоиды. Указанная дуга имеет в стартовой точке вертикальную касательную, и диск начинает скатываться из состояния равновесия. На рис. дуга циклоиды обозначена Γ_1, а ее эквидистанта – Γ_2.

Введем в стартовом положении, в точке опоры O, систему координат с вертикальной осью Ox. Пусть $\mathbf{P}(mg, 0)$ – вес диска массы m, единичные векторы касательной к опорной кривой $\tau(\tau_x, \tau_y)$ и нормали $\mathbf{n}(n_x, n_y)$ в текущей точке опоры диска заданы своими координатами в осях Oxy.

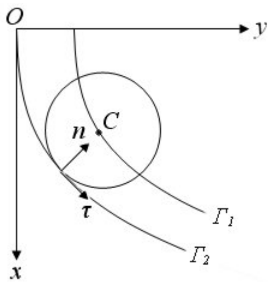

Рис.1. Скатывание диска из состояния равновесия

Уравнения качения диска без скольжения имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = R_\tau + mg\tau_x\,, \quad \frac{mv^2}{\rho} = R_n + mgn_x\,, \quad \frac{1}{2}\,mr^2\dot{\omega} = rR_\tau\,, \quad (1)$$

$$v + \omega r = 0\,, \quad (2)$$

где v - модуль скорости центра диска, r - радиус диска, ω - угловая скорость, $\rho^{-1} > 0$ - кривизна кривой Γ_1 в точке C, $\mathbf{R}(R_\tau, R_n)$ - реакция опоры Γ_2, приложенная к диску.

Продифференцировав по времени кинематическое уравнение (2), которое выражает постоянное отсутствие скольжения диска в точке контакта, исключим в нем ускорения $\dot{v}, \dot{\omega}$ при помощи динамических уравнений (1). Тогда получим

$$\frac{3}{m} R_\tau + g\tau_x = 0, \qquad R_\tau = -\frac{1}{3} mg\tau_x.$$

Из второго уравнения (1) следует, что

$$R_n = \frac{mv^2}{\rho} - mgn_x.$$

Согласно закону Кулона силы трения и нормального давления связаны неравенством

$$\left| \frac{-\frac{1}{3} mg\tau_x}{\frac{mv^2}{\rho} - mgn_x} \right| \le f_0 \tag{3}$$

($f_0 < 1$ - коэффициент трения покоя). Вблизи точки O скорость $v \ll 1$, и, следовательно, наряду с неравенством (3) обязательно должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{3} \left| \frac{\tau_x}{n_x} \right| < 1$$

Но оно противоречиво, так как $1 - \tau_x \ll 1$ и $|n_x| \ll 1$.

ВЫВОД. Сила кулонова трения не может обеспечить отсутствия скольжения в самом начале скатывания тяжелого однородного круглого диска из состояния равновесия по любой регулярной кривой, имеющей в начальной точке вертикальную касательную и конечную кривизну.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00536 и 12-08-00637).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л.Д.* Аналог классической брахистохроны для диска // Докл. РАН. 2008. Т.419. №2. С.193-196.

2. *Легеза В.П.* Брахистохрона для катящегося цилиндра // Механика твердого тела. Киев. 2010. №1. С.34-41.