ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 31 1995 Вып. 4

УДК 621.391.1

© 1995 г. Е. А. Карацуба

БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА $\zeta(s)$ ПРИ ЦЕЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА s

Предлагается основанный на БВЕ-методе алгоритм быстрого вычисления дзета-функции Римана при целых значениях аргумента. Сложность вычисления близка к наилучшей.

§ 1. Введение

В работах [1 – 5] был предложен метод БВЕ – метод быстрого вычисления значений функций типа E-функций Зигеля. Там же было доказано, что с помощью БВЕ можно быстро вычислить любую простейшую трансцендентную функцию, классические константы e, π и константу Эйлера γ и такие высшие трансцендентные функции, как гамма-функцию, функции Бесселя и другие специальные функции при алгебраических значениях аргумента и параметров.

Далее считаем, что числа записаны в двоичной системе счисления.

Назовем сложностью умножения двух n-значных чисел число элементарных (битовых) операций $M(n)$, достаточное для вычисления произведения двух n-значных чисел.

Далее элементарные (битовые) операции будем называть для краткости просто операциями.

Пусть функция $y = f(z)$ задана на некоторой ограниченной области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, $y = f(z)$ не имеет в $\overline{\mathbb{D}}$ особенностей и ограничена вместе со своей производной. Тогда вычислить $y = f(z)$ в точке $z = z_0 \in \mathbb{D}$ с точностью 2^{-n} (с точностью до n знаков), значит найти число y_n, для которого выполняется неравенство

$$|y_n - f(z_0)| \leqslant c2^{-n},$$

где постоянная c не зависит от n.

Число операций, достаточное для вычисления $y = f(z)$ с точностью 2^{-n} в какой-либо точке ее области определения, обозначается $s_f(n)$ и называется сложностью вычисления функции $f(z)$.

В [1 – 5] доказано, что оценка сложности вычисления посредством БВЕ вышеперечисленных простейших и высших трансцендентных функций и констант есть

$$s_f(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right).$$

Представление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в виде ряда Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

не дает возможности быстро вычислить $\zeta(s)$, поскольку этот ряд сходится очень медленно. Известные формулы для дзета-функции [6, с. 61] позволяют быстро вычислить с помощью БВЕ $\zeta(s)$ лишь при $s = 2m$, $s = -2m + 1$; m – натуральное число. В этом случае оценка сложности вычисления, доказанная в [4], такова:

$$s_\zeta(n) = O(M(n)\log^2 n).$$

В [4] было доказано, что столь же быстро посредством БВЕ можно вычислить значение $\zeta(3)$. При этом использовалась формула, представляющая $\zeta(3)$ в виде быстро сходящегося ряда. Эта формула содержится в статье Ван дер Портена [7], посвященной доказательству Апери́ иррациональности числа $\zeta(3)$.

В настоящей статье доказывается утверждение, что с помощью БВЕ можно быстро вычислить функцию $\zeta(s)$ при любых натуральных значениях аргумента s ($s = k$, $k \geqslant 2$) с оценкой сложности вычисления

$$s_\zeta(n) = O(M(n)\log^2 n). \tag{1}$$

Основой для доказательства служат новые формулы для $\zeta(k)$ (лемма 1) и применение БВЕ к вычислению специальных интегралов (лемма 2). Эти леммы и их доказательства содержатся в §2 настоящей статьи. В §3 содержится теорема о быстром вычислении $\zeta(k)$, $k \geqslant 2$, и ее доказательство.

В заключение следует отметить, что оценку (1) можно переписать, раскрыв выражение для сложности умножения $M(n)$.

Первый алгоритм быстрого умножения был найден А. А. Карацубой [8] (см. также [9]) и имеет оценку сложности вычисления:

$$M(n) \leqslant cn^{\log_2 3},$$

где c – постоянная.

Усовершенствованием метода А. А. Карацубы были построены другие алгоритмы и, в частности, алгоритм Шёнхаге – Штрассена [10] с лучшей в настоящее время оценкой:

$$M(n) \leqslant cn \log n \log\log n,$$

где c – постоянная.

Алгоритмы умножения – "наивный" или "школьный", Карацубы, Шёнхаге – Штрассена и их модификации – подробно описаны в [11]. Там же для каждого из этих алгоритмов установлена область его бо́льшей, по сравнению с другими, эффективности.

Следовательно, оценку (1) сложности вычисления $\zeta(k)$, $k \geqslant 2$, можно переписать в виде

$$s_\zeta(n) = O(n\log^3 n \log\log n).$$

§ 2. Вспомогательные леммы

Докажем два вспомогательных утверждения.

Л е м м а 1. *Пусть k – натуральное число, $k \geqslant 2$; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – целые неотрицательные числа и*

$$G_i = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=i \\ n_1+2n_2+\ldots+kn_k=k}} \frac{k!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{J_j}{j!}\right)^{n_j}, \tag{2}$$

где

$$J_j = \int\limits_0^\infty e^{-t} \log^j t dt. \tag{3}$$

Тогда справедливо тождество

$$\zeta(k) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (i-1)! \, G_i. \tag{4}$$

Доказательство. Покажем сначала, что при любом натуральном значении k, $k \geqslant 2$, справедливо тождество

$$\frac{d^k}{ds^k} (\log \Gamma(s+1)) \Big|_{s=0} = (-1)^k (k-1)! \, \zeta(k). \tag{5}$$

По определению гамма-функции Эйлера $\Gamma(s)$ (см. [6, с. 51]) имеем

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \, e^{-\gamma s} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}} \right). \tag{6}$$

где γ – постоянная Эйлера.
Прологарифмировав выражение (6), получаем

$$\log \Gamma(s) = -\log s - \gamma s + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s}{n} - \log\left(1 + \frac{s}{n}\right)\right). \tag{7}$$

При $|s| \leqslant 1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, рассмотрим разложение функции $\log\left(1 + \dfrac{s}{n}\right)$ в ряд Тейлора по степеням $\dfrac{s}{n}$:

$$\log\left(1 + \frac{s}{n}\right) = \frac{s}{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \, \frac{s^k}{n^k}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s}{n} - \log\left(1 + \frac{s}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \, \frac{s^k}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} s^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} s^k \zeta(k). \tag{8}$$

Из (7) и (8), учитывая, что $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, имеем

$$\log \Gamma(s+1) + \gamma s = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} s^k \zeta(k). \tag{9}$$

Дифференцируя (9) k раз по s и полагая затем $s = 0$, получаем тождество (5).

Раскроем теперь левую часть тождества (5). Для этого продифференцируем k раз сложную функцию $y = \log\Gamma(s+1)$, применяя формулу сложного дифференцирования (см., например, [12]). Получим

$$\frac{d^k}{ds^k}(\log\Gamma(s+1)) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{(i-1)!}{(\Gamma(s+1))^i}\times$$

$$\times \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=i\\ n_1+2n_2+\ldots+kn_k=k\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\geqslant 0-\text{целые числа}}} \frac{k!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial s^j}\Gamma(s+1)\right)^{n_j}. \tag{10}$$

Гамма-функцию $\Gamma(s+1)$ можно определить (см. [6, с. 53]) интегралом

$$\Gamma(s+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^s dt, \quad \operatorname{Re} s > -1. \tag{11}$$

Дифференцируя выражение (11) j раз по параметру s и полагая затем $s = 0$, находим

$$\left.\frac{d^j}{ds^j}\Gamma(s+1)\right|_{s=0} = \int\limits_0^\infty e^{-t}\log^j t dt. \tag{12}$$

Учитывая, что $\Gamma(s+1)\big|_{s=0} = 1$, из (5), (10), (12) получаем утверждение леммы.▲

Оценим теперь сложность вычисления посредством БВЕ интегралов J_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, определяемых формулой (3). Обозначим через $s_J(n)$ сложность вычисления интеграла J_j при некотором натуральном параметре j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда справедлива

Л е м м а 2. *Для любого фиксированного натурального числа k и любого натурального параметра j, $1 \leqslant j \leqslant k$, справедлива оценка*

$$s_J(n) = O(n\log^3 n\log\log n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее предполагаем, что

$$n \geqslant 2k\log 2k, \quad k \geqslant 2. \tag{13}$$

Представим интеграл $J_j = \int\limits_0^\infty e^{-t}\log^j t dt$ в виде суммы двух интегралов

$$J_j = A_j + B_j, \tag{14}$$

где

$$A_j = \int\limits_0^p e^{-t}\log^j t dt, \tag{15}$$

$$B_j = \int\limits_p^\infty e^{-t}\log^j t dt; \tag{16}$$

при этом считаем, что

$$p = n. \tag{17}$$

Оценим сверху интеграл B_j. Интегрируя (16) по частям и переходя к оценкам, последовательно получаем

$$B_j = -e^{-t}\log^j t\Big|_p^\infty + j\int\limits_p^\infty e^{-t}t^{-1}\log^{j-1} t\,dt \leqslant e^{-p}\log^j p + \frac{j}{p}\int\limits_p^\infty e^{-t}\log^{j-1} t\,dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-p}\log^j p\left(1 + \frac{j}{p\log p} + \ldots + \frac{j!}{(p\log p)^j}\right) \leqslant e^{-p}\log^j p\,\frac{1-\left(\dfrac{j}{p\log p}\right)^j}{1-\dfrac{j}{p\log p}}. \tag{18}$$

Из условий (13), (17) следует, что $\dfrac{j}{p\log p} \leqslant \dfrac{1}{2\log 4}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Тогда из (18) получаем для B_j оценку

$$B_j \leqslant \frac{5}{3}e^{-p}\log^j p \leqslant \frac{5}{3}e^{-p}\log^k p. \tag{19}$$

Перед тем как применить БВЕ к вычислению интеграла A_j, преобразуем A_j к удобному виду подобно тому, как это делалось при вычислении гамма-функции в [3].

Пусть $r \geqslant p$, r – натуральное число. При $0 \leqslant t \leqslant p$ имеем

$$e^{-t} = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{t^i}{i!} + R(t), \quad R(t) = \sum_{i=r+1}^{\infty}(-1)^i\frac{t^i}{i!}. \tag{20}$$

Представим интеграл A_j, определяемый формулой (15), в виде суммы двух интегралов

$$A_j = S_j + R_j, \tag{21}$$

где S_j и R_j с учетом (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{1}{i!}\int\limits_0^p t^i\log^j t\,dt, \\ R_j &= \sum_{i=r+1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i!}\int\limits_0^p t^i\log^j t\,dt. \end{aligned} \tag{22}$$

Чтобы оценить сверху сумму R_j, представим ее в виде суммы двух слагаемых. Имеем

$$|R_j| \leqslant |U_j| + |W_j|, \tag{23}$$

где

$$U_j = \sum_{i=r+1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i!}\int\limits_0^1 t^i\log^j t\,dt, \tag{24}$$

$$W_j = \sum_{i=r+1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i!}\int\limits_1^p t^i\log^j t\,dt. \tag{25}$$

Оценим сверху суммы U_j и W_j. Учитывая, что члены знакопеременных рядов U_j и W_j являются монотонно убывающими по абсолютной величине и стремятся к нулю, для U_j и W_j соответственно имеем

$$|U_j| \leqslant \frac{1}{(r+1)!}\left|\int\limits_0^1 t^{r+1}\log^j t\,dt\right| \leqslant \frac{j!}{(r+j+2)!}, \tag{26}$$

$$|W_j| \leqslant \frac{1}{(r+1)!}\int\limits_1^p t^{r+1}\log^j t\,dt \leqslant \frac{p^{r+2}}{(r+2)!}\log^j p. \tag{27}$$

Из (23) – (27) получаем для R_j оценку

$$|R_j| \leqslant \frac{j!}{(r+j+2)!} + \frac{p^{r+2}}{(r+2)!}\log^j p. \tag{28}$$

Предполагая выполнение условия (13) ($1 \leqslant j \leqslant k$), из представлений (14), (21) для интегралов J_j, A_j и оценок (19), (28) следует, что интеграл J_j можно представить в виде

$$J_j = S_j + \Theta, \tag{29}$$

где

$$|\Theta| \leqslant \frac{5}{3}e^{-p}\log^k p + \frac{1}{(r+3)!} + \frac{p^{r+2}}{(r+2)!}\log^k p.$$

Так как

$$\frac{1}{(r+3)!} \leqslant \left(\frac{e}{r+3}\right)^{r+3}, \quad \frac{p^{r+2}}{(r+2)!} \leqslant \left(\frac{ep}{r+2}\right)^{r+2},$$

то, учитывая условие (17), выберем $r \geqslant 4n$ и получим для Θ оценку

$$|\Theta| \leqslant 2e^{-n}\log^k n.$$

Отсюда и из условия (13) имеем

$$|\Theta| \leqslant 2^{-n}. \tag{30}$$

Заменяя интегралы в сумме S_j их значениями, из (22), (29), (30) получаем, что для того чтобы вычислить интеграл $J_j = \int\limits_0^\infty e^{-t}\log^j t\,dt$ с точностью 2^{-n}, достаточно вычислить с такой же точностью сумму

$$S_j = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{p^{i+1}}{(i+1)!}\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^m}{(i+1)^m}\;\frac{j!}{(j-m)!}\log^{j-m} p \tag{31}$$

при

$$p = n, \quad r \geqslant 4n, \quad n \geqslant 2k\log 2k, \quad k \geqslant 2, \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{32}$$

Перепишем выражение (31) в следующем виде:

$$S_j = \sum_{m=0}^{j}(-1)^m\frac{j!}{(j-m)!}\left(\log^{j-m} p\right)\sigma_m, \tag{33}$$

где

$$\sigma_m = \sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^i}{(i+1)^m}\;\frac{p^{i+1}}{(i+1)!}. \tag{34}$$

Вычислим сначала сумму σ_m. Возьмем $r+1=2^q (q \geqslant 1,\ 2^{q-1} < 4n \leqslant 2^q)$ членов ряда (34), и пусть числа $a_{r+1-\nu}(0)$, $\nu = 0, 1, \ldots, r$, определяются равенствами

$$a_{r+1-\nu}(0) = (-1)^{r-\nu} \frac{p^{r+1-\nu}}{(r+1-\nu)!\,(r+1-\nu)^m}.$$

По определению σ_m имеем

$$\sigma_m = a_1(0) + a_2(0) + \ldots + a_{r+1}(0). \tag{35}$$

Вычисление σ_m проведем за q шагов БВЕ-процесса, подробно описанного в [3].

1-й шаг. Объединяя в (35) слагаемые σ_m последовательно попарно и вынося за скобки "очевидный" общий множитель, получим

$$\sigma_m = a_1(1) + a_2(1) + \ldots + a_{r_1}(1),$$

где $r_1 = 2^{-1}(r+1)$, и числа $a_{r_1-\nu}(1)$, $\nu = 0, 1, \ldots, r_1 - 1$, определяются равенствами

$$a_{r_1-\nu}(1) = a_{r+1-2\nu}(0) + a_{r+1-(2\nu+1)}(0) =$$
$$= (-1)^{r-2\nu-1} \frac{p^{r-2\nu}}{(r+1-2\nu)!\,(r-2\nu)^m (r+1-2\nu)^m} \beta_{r_1-\nu}(1),$$
$$\beta_{r_1-\nu}(1) = -p\,(r-2\nu)^m + (r+1-2\nu)^{m+1}. \tag{36}$$

На 1-м шаге вычисляются числа $\beta_{r_1-\nu}(1)$, $\nu = 0, 1, \ldots, r_1 - 1$, по формуле (36).

На ℓ-м шаге ($\ell \leqslant q$) имеем

$$\sigma_m = a_1(\ell) + a_2(\ell) + \ldots + a_{r_\ell}(\ell), \tag{37}$$

где $r_\ell = 2^{-1} r_{\ell-1} = 2^{-\ell}(r+1)$, и числа $a_{r_\ell-\nu}(\ell)$, $\nu = 0, 1, \ldots, r_\ell - 1$, определяются равенствами

$$a_{r_\ell-\nu}(\ell) = a_{r_{\ell-1}-2\nu}(\ell-1) + a_{r_{\ell-1}-(2\nu+1)}(\ell-1) =$$
$$= \frac{p^{r+2-2^\ell \nu - 2^\ell}}{(r+1-2^\ell \nu)!\,(r+1-2^\ell \nu)^m (r-2^\ell \nu)^m \ldots (r+2-2^\ell \nu - 2^\ell)^m} \beta_{r_\ell-\nu}(\ell),$$
$$\beta_{r_\ell-\nu}(\ell) = \left(\frac{(r+1-2^\ell \nu - 2^{\ell-1})!}{(r+1-2^\ell \nu - 2^\ell)!} \right)^m p^{2^{\ell-1}} \beta_{r_{\ell-1}-2\nu}(\ell-1) +$$
$$+ \frac{(r-2^\ell \nu)!}{(r-2^\ell \nu - 2^{\ell-1})!} \left(\frac{(r+1-2^\ell \nu)!}{(r+1-2^\ell \nu - 2^{\ell-1})!} \right)^m \beta_{r_{\ell-1}-(2\nu+1)}(\ell-1). \tag{38}$$

На ℓ-м шаге вычисляются числа $\beta_{r_\ell-\nu}(\ell)$, $\nu = 0, 1, \ldots, r_\ell - 1$, по формуле (38).

($\ell+1$)-й шаг (предполагаем, что $\ell + 1 \leqslant q$). Объединяя в (37) слагаемые σ_m последовательно попарно и вынося за скобки "очевидный" общий множитель, получим

$$\sigma_m = a_1(\ell+1) + a_2(\ell+1) + \ldots + a_{r_{\ell+1}}(\ell+1),$$

где $r_{\ell+1} = 2^{-1} r_\ell = 2^{-(\ell+1)}(r+1)$, и числа $a_{r_{\ell+1}-\nu}(\ell+1)$, $\nu = 0, 1, \ldots, r_{\ell+1} - 1$, определяются равенствами

$$a_{r_{\ell+1}-\nu}(\ell+1) = a_{r_\ell-2\nu}(\ell) + a_{r_\ell-(2\nu+1)}(\ell) =$$
$$= \frac{p^{r+2-2^{\ell+1}\nu - 2^{\ell+1}}}{(r+1-2^{\ell+1}\nu)!(r+1-2^{\ell+1}\nu)^m (r-2^{\ell+1}\nu)^m \ldots (r+2-2^{\ell+1}\nu - 2^{\ell+1})^m} \beta_{r_{\ell+1}-\nu}(\ell+1),$$
$$\beta_{r_{\ell+1}-\nu}(\ell+1) = \left(\frac{(r+1-2^{\ell+1}\nu - 2^\ell)!}{(r+1-2^{\ell+1}\nu - 2^{\ell+1})!} \right)^m p^{2^\ell} \beta_{r_\ell-2\nu}(\ell) +$$
$$+ \frac{(r-2^{\ell+1}\nu)!}{(r-2^{\ell+1}\nu - 2^\ell)!} \left(\frac{(r+1-2^{\ell+1}\nu)!}{(r+1-2^{\ell+1}\nu - 2^\ell)!} \right)^m \beta_{r_\ell-(2\nu+1)}(\ell). \tag{39}$$

На $(\ell+1)$-м шаге вычисляются числа $\beta_{r_{\ell+1}-\nu}(\ell+1)$, $\nu=0,1,\ldots,r_{\ell+1}-1$, по формуле (39).

После q шагов такого процесса получим

$$\sigma_m = a_{r_q}(q) = a_1(q) = \frac{p}{((r+1)!)^{m+1}}\beta_1(q), \tag{40}$$

где

$$\beta_1(q) = p^{2^{q-1}}\left((r+1-2^{q-1})!\right)^m \beta_{r_{q-1}}(q-1)+$$
$$+\frac{r!}{(r-2^{q-1})!}\left(\frac{(r+1)!}{(r+1-2^{q-1})!}\right)^m \beta_{r_{q-1}-1}(q-1), \tag{41}$$

т.е. будет вычислено значение суммы σ_m.

Подсчитаем количество операций, достаточное для вычисления на $(\ell+1)$-м шаге, $\ell+1\leqslant q$, чисел $\beta_{r_{\ell+1}-\nu}(\ell+1)$, $\nu=0,1,\ldots,r_{\ell+1}-1$, подобно тому, как это делалось в [3 – 5]. Предполагаем, что числа $\beta_\mu(\ell)$ уже вычислены. Пусть $\beta(\ell)=\max\limits_{\mu}\beta_\mu(\ell)$. Разрядность чисел, с которыми проводятся вычисления на $(\ell+1)$-м шаге, можно оценить из (39) и (36) следующим образом:

$$\beta(\ell+1)\leqslant \beta(\ell)\left(p^{2^\ell}r^{m2^\ell}+r^{2^{\ell+1}}\right)\leqslant 2\beta(\ell)p^{2^\ell}r^{m2^{\ell+1}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^\ell\beta(1)p^{2^{\ell+1}}r^{m2^{\ell+2}}\leqslant (2pr)^{m2^{\ell+3}}. \tag{42}$$

Сложность вычисления произведений

$$\frac{(r-2^{\ell+1}\nu)!}{(r-2^{\ell+1}\nu-2^\ell)!},\quad \left(\frac{(r+1-2^{\ell+1}\nu)!}{(r+1-2^{\ell+1}\nu-2^\ell)!}\right)^m,\quad \left(\frac{(r+1-2^{\ell+1}\nu-2^\ell)!}{(r+1-2^{\ell+1}\nu-2^{\ell+1})!}\right)^m$$

составляет (см. [3])

$$O\left(\sum_{\tau=1}^{\ell} M\left(2^\tau\log r\right)+M\left(m\,2^\ell\log r\right)\right) \tag{43}$$

операций. Из (42), (43) получаем, что для вычисления $\beta_{r_{\ell+1}-\nu}(\ell+1)$ по формуле (39) достаточно $O\left(B(\ell+1)\right)$ операций, где

$$B(\ell+1)=\sum_{\tau=1}^{\ell} M\left(2^\tau\log r\right)+M\left(m\,2^\ell\log r\right)+M\left(m\,2^{\ell+3}\log p\,r\right).$$

Чтобы вычислить все $\beta_{r_{\ell+1}-\nu}(\ell+1)$, которых ровно $r_{\ell+1}=2^{-(\ell+1)}(r+1)$, достаточно $O\left(B(\ell+1)r_{\ell+1}\right)$ операций. Следовательно, для вычисления $\beta_1(q)$ по формуле (41) достаточно

$$O\left(\sum_{\ell=1}^{q-1} r_{\ell+1}B(\ell+1)\right)=O\left(\sum_{\ell=1}^{q-1} r2^{-(\ell+1)}\sum_{\tau=1}^{\ell}2^\tau\log r(\tau+\log\log r)\log(\tau+\log\log r)+\right.$$
$$\left.+\sum_{\ell=1}^{q-1} r2^{-(\ell+1)}2^{\ell+3}\log pr(\ell+\log\log pr)\log(\ell+\log\log pr)\right)=$$
$$=O\left(\sum_{\ell=1}^{q-1} r\log pr(\ell+\log\log pr)\log(\ell+\log\log pr)\right)=O(r\log^2 r\log pr\log\log pr) \tag{44}$$

операций.

Сложность вычисления значения $((r+1)!)^{m+1}$ есть

$$O\left(r\log rM\left(m\log r\right)\right) \tag{45}$$

операций.

Из (44), (45) и (32) сложность вычисления значения σ_m по формуле (40) с точностью 2^{-n} есть

$$O\left(n\log^3 n\log\log n\right)$$

операций.

Вычислим значение суммы S_j по формуле (33) с точностью 2^{-3n}, считая, что каждое значение σ_m, $m=0,1,\ldots,j$, уже вычислено с той же точностью.

Чтобы вычислить значение $\log^{j-m} p$ с точностью 2^{-3n}, учитывая (32), достаточно

$$O\left(\log^2 nM(n)\right)$$

операций.

Обозначим через $\widetilde{S}_j$ значение

$$\widetilde{S}_j=\sum_{m=0}^{j}(-1)^m\frac{j!}{(j-m)!}\left(\log^{j-m} p+\Theta_1 2^{-3n}\right)\left(\sigma_m+\Theta_2 2^{-3n}\right),$$
$$|\Theta_1|\leqslant 1,\quad |\Theta_2|\leqslant 1,$$

и рассмотрим разность $\widetilde{S}_j-S_j$:

$$\widetilde{S}_j-S_j=\sum_{m=0}^{j}(-1)^m\frac{j!}{(j-m)!}\left(\left(\log^{j-m} p\right)\Theta_2 2^{-3n}+\sigma_m\Theta_1 2^{-3n}+\Theta_1\Theta_2 2^{-6n}\right),$$
$$|\Theta_1|\leqslant 1,\quad |\Theta_2|\leqslant 1.$$

Пользуясь формулой (34) для оценки значения σ_m, для $|\widetilde{S}_j-S_j|$ получаем

$$|\widetilde{S}_j-S_j|\leqslant j!\left(\log^j p\right)\Theta_2 2^{-3n}+j!e^p\,\Theta_1 2^{-3n}+j!\,\Theta_1\Theta_2 2^{-6n},$$
$$|\Theta_1|\leqslant 1,\quad |\Theta_2|\leqslant 1.$$

Отсюда имеем

$$|\widetilde{S}_j-S_j|\leqslant k^{k+1}e^n 2^{-3n}\leqslant 2^{-n},$$

так как согласно (32) $1\leqslant j\leqslant k$, $p=n$, $k\geqslant 2$.

Из предыдущих оценок находим, что сложность вычисления суммы S_j с точностью 2^{-n} есть

$$O\left(n\log^3 n\log\log n\right)$$

операций. Отсюда и из (29), (30) следует, что для вычисления интеграла

$$J_j=\int_0^\infty e^{-t}\log^j t\,dt$$

с точностью 2^{-n} достаточно

$$O\left(n\log^3 n\log\log n\right)$$

операций. ▲

§ 3. Основной результат

Получим оценку сложности вычисления с точностью 2^{-n} значения $\zeta = \zeta(k)$, k – натуральное число, $k \geqslant 2$, где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана.

Т е о р е м а. *Для сложности вычисления $\zeta = \zeta(k)$ при любом натуральном k, $k \geqslant 2$, справедлива оценка*

$$s_\zeta(n) = O\left(n \log^3 n \log\log n\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для вычисления значения $\zeta = \zeta(s)$ при $s = k$, где k – некоторое натуральное число, $k \geqslant 2$, воспользуемся формулой (4).

Обозначим через P_i выражение

$$P_i = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=i\\ n_1+2n_2+\ldots+kn_k=k}} \frac{k!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{S_j}{j!}\right)^{n_j}, \tag{46}$$

в котором S_j есть сумма, определяемая формулой (31).

Обозначим через R_i разность $R_i = G_i - P_i$, в которой G_i определяется формулой (2). Оценим $|R_i|$, учитывая, что из (29), (30) для интеграла J_j и суммы S_j справедливо соотношение

$$J_j = S_j + c2^{-n}, \quad |c| \leqslant 1. \tag{47}$$

Для R_i имеем

$$R_i = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=i\\ n_1+2n_2+\ldots+kn_k=k}} \frac{k!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} \left(\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{J_j}{j!}\right)^{n_j} - \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{S_j}{j!}\right)^{n_j}\right). \tag{48}$$

Пусть

$$\Delta = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{J_j}{j!}\right)^{n_j} - \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{S_j}{j!}\right)^{n_j}. \tag{49}$$

Путем тождественных преобразований (49) можно переписать в виде

$$\Delta = \sum_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{J_j}{j!}\right)^{n_j} - \left(\frac{S_j}{j!}\right)^{n_j}\right)\left(\frac{S_1}{1!}\right)^{n_1}\ldots$$
$$\ldots\left(\frac{S_{j-1}}{(j-1)!}\right)^{n_{j-1}}\left(\frac{J_{j+1}}{(j+1)!}\right)^{n_{j+1}}\ldots\left(\frac{J_k}{k!}\right)^{n_k}. \tag{50}$$

Оценим сверху $|J_j|$ и $|S_j|$.

$$|J_j| = \left|\int_0^\infty e^{-t}\log^j t\,dt\right| \leqslant \int_0^1 e^{-t}\left|\log^j t\right|dt + \int_1^\infty e^{-t}\log^j t\,dt. \tag{51}$$

Так как

$$\int_0^1 \left|\log^j t\right| dt = \left|\int_0^\infty u^j e^{-u} du\right| = j!,$$

$$\int_1^\infty e^{-t} \log^j t dt = \int_0^\infty e^{-e^u+u} u^j du \leqslant \frac{1}{2}(j!),$$

то из (47) и (51) получаем оценки

$$|J_j| \leqslant \frac{3}{2}(j!), \quad |S_j| \leqslant 2(j!) \tag{52}$$

Пользуясь оценками (52), для $|\Delta|$ из (50) находим

$$|\Delta| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left|\left(\frac{J_j}{j!}\right)^{n_j} - \left(\frac{S_j}{j!}\right)^{n_j}\right| 2^i \left(\frac{3}{2}\right)^i \leqslant$$

$$\leqslant 3^i \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{j!}\right)^{n_j} n_j |J_j - S_j| \, |\max(J_j, S_j)|^{n_j-1} \leqslant$$

$$\leqslant c3^i 2^{-n} \sum_{j=1}^{k} n_j \frac{2^{n_j-1}}{j!}.$$

Отсюда и из (48) для $|R_i|$, $i \leqslant k$, имеем

$$|R_i| \leqslant c3^i 2^{-n} \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=i \\ n_1+2n_2+\ldots+kn_k=k}} \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} n_j \frac{2^{n_j-1}}{j!} \leqslant$$

$$\leqslant c3^i i 2^{-n} \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{j!} \leqslant c3^i i \frac{k^{k+1}}{k-1} 2^{-n} \leqslant 2c3^k k^{k+1} 2^{-n}. \tag{53}$$

Вычислим значение $\zeta(k)$ по формуле (4), подставив в нее вместо выражения G_i выражение P_i, определяемое формулой (46). Из формулы (4) следует, что, вычисляя с некоторой точностью значение G_i, мы с той же точностью вычисляем $\zeta(k)$. Согласно оценке (53), для того чтобы вычислить G_i с точностью 2^{-n}, достаточно с той же точностью вычислить значение P_i по формуле (46).

Тогда для вычисления значения $\zeta(k)$ с точностью 2^{-n} достаточно

$$O\left(n \log^3 n \log\log n\right)$$

операций. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карацуба Е. А.* О новом методе быстрого вычисления трансцендентных функций // УМН. 1991. Т. 46. № 2 (278). С. 219–220.
2. *Карацуба Е. А.* О быстром вычислении трансцендентных функций // ДАН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 278–279.

3. *Карацуба Е. А.* Быстрые вычисления трансцендентных функций // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 4. С. 87–110.
4. *Карацуба Е. А.* Быстрое вычисление $\zeta(3)$ // Пробл. передачи информ. 1993. Т. 29. № 1. С. 68–73.
5. *Karatsuba Catherine A.* Fast Evaluation of Bessel Functions // Integral Transforms and Special Functions. 1993. V. 1. № 4. P. 269–276.
6. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
7. *Poorten A. van der.* A Proof that Euler Missed ... Apery's Proof of Irrationality of $\zeta(3)$ // An Informal Report, Math. Intelligence. 1979. V. 1. № 4. P. 195–204.
8. *Карацуба А. А., Офман Ю. П.* Умножение многозначных чисел на автоматах // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 293–294.
9. *Karacuba A.* Berechnungen und die Kompliziertheit von Beziehungen // EIK. 1975. № 11. S. 10–12.
10. *Schönhage A., Strassen V.* Schnelle Multiplikation grosser Zahlen // Computing. 1971. B. 7. S. 281-292.
11. *Schönhage A., Grotefeld A.F.W., Vetter E.* Fast Algorithms: a multitape turing machine implementation. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI – Wiss. – Verl., 1994.
12. *Ла Валле-Пуссен Ш. Ж. де.* Курс анализа бесконечно малых. Т. 1. М.: ГТТИ, 1933.

Поступила в редакцию
14.03.95