

УДК 519.624

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ С УЧЕТОМ ИНВЕСТИЦИЙ: СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

© 2016 г. Т. А. Белкина*, Н. Б. Конюхова**, С. В. Курочкин**

(*117418 Москва, Нахимовский просп., 47, ЦЭМИ РАН и Международная лаборатория количественных финансов НИУ ВШЭ;

**119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: tbel@cemi.rssi.ru; nadja@ccas.ru; kuroch@ccas.ru

Поступила в редакцию 16.12.2014 г.

Переработанный вариант 22.04.2015 г.

На основании ранее полученных и новых результатов дается сравнение двух математических моделей страхования при одинаковой стратегии поведения страховых компаний на финансовом рынке – вложении всего текущего капитала или постоянной его доли в рисковый актив (акции), а оставшейся доли – в безрисковый (банковский счет). I модель основана на классическом процессе риска Крамэра–Лундберга при экспоненциальном распределении размеров страховых требований (исков); в основе II модели – модификация классического процесса риска (процесс риска со случайными премиями) при экспоненциальных распределениях как размеров исков, так и размеров премий. Для вероятности неразорения страховой компании за бесконечное время (как функции ее начального капитала) возникают сингулярные задачи для линейных интегродифференциальных уравнений (ИДУ) второго порядка, определенных на полубесконечном интервале и обладающих неинтегрируемыми особенностями в нуле: I модель приводит к сингулярной начальной задаче с ограничениями для ИДУ с вольтерровым интегральным оператором, II модель – к более сложной нелокальной задаче с ограничениями для ИДУ с невольтерровым интегральным оператором. Дается краткий обзор ранее полученных результатов для этих двух задач, зависящих от нескольких положительных параметров, и приводятся новые. Дополнительные результаты связаны с постановкой, анализом и численным исследованием “вырожденных” задач для обеих моделей, когда некоторые параметры в ИДУ принимают нулевые значения, причем предельные переходы по параметрам от исходных задач к вырожденным являются сингулярными при малых и/или больших значениях аргумента. Такие задачи представляют самостоятельный математический и практический интерес, описывая, наряду с моделями страхования без инвестиций, случаи полного вложения капитала в безрисковые активы, а также некоторые нестраховые модели динамики капитала – типа благотворительного фонда. Библ. 45. Фиг. 18.

Ключевые слова: динамические модели страхования типа Крамэра–Лундберга с детерминированными и случайными премиями, экспоненциальные распределения размеров премий и исков, инвестиции в рисковые и безрисковые активы, вероятность неразорения страховой компании как функция ее начального капитала, линейные ИДУ второго порядка на полуоси с вольтерровыми и невольтерровыми интегральными операторами, сингулярные начальные и нелокальные задачи с ограничениями, вырожденные задачи, сопутствующие сингулярные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), существование, единственность и поведение решений, алгоритмы численного нахождения решений, результаты расчетов, сравнение моделей.

DOI: 10.7868/S0044466916010075

ВВЕДЕНИЕ

Для рассматриваемых в данной работе динамических моделей страхования, учитывающих инвестиции капитала страховой компании на финансовом рынке при постоянной структуре инвестиционного портфеля, приводятся наиболее полные и строгие результаты по их исследова-

¹⁾Работа выполнена при частичной финансовой поддержке: РФФИ (код проекта 11-01-00219-а); работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00784-а) и Правительства РФ (договор 14.A12.31.0007).

нию и сравнению. Модели основаны на одном из двух исходных процессов коллективного риска, описывающих динамику капитала компании, – классическом процессе риска Крамера–Лундберга (КЛ) или модифицированном процессе риска КЛ со случайными премиями (описание динамических процессов коллективного риска см., например, в [1]–[4]; в частности, о модели со случайными премиями см. [2, подраздел 9.5], а также [4, ch. XII, sec. 4b]), где эта модель называется “the compound Poisson model with two-sided jumps”).

В моделях, учитывающих инвестирование капитала на финансовом рынке при сохранении постоянной (неотрицательной) доли рискованных активов в портфеле, динамика капитала описывается некоторым стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ), а вероятность неразорения соответствующего случайного процесса (т.е. вероятность его неотрицательности на бесконечном интервале времени) как функция начального состояния (начального капитала) при некоторых предположениях удовлетворяет линейному ИДУ (см., например, [4, ch. VIII, sec. 6]). Как будет показано далее, важнейшим вопросом при исследовании вероятности неразорения (ВНР) является вопрос о существовании решения ИДУ, удовлетворяющего дополнительным условиям, выделяющим указанную вероятность из всего семейства возможных решений. Эти условия диктуются, с одной стороны, самой природой вероятности (ограничение на область значений решения), с другой стороны, они должны быть более точно сформулированы и обоснованы с учетом предельного поведения случайных процессов, удовлетворяющих СДУ. Рассматриваемые дополнительно условия, возникающие как следствия самих ИДУ с учетом характера той или иной особенности в нуле и уже указанных ограничений, могут иметь, вообще говоря (в зависимости от рассматриваемой модели), нелокальный характер. Являясь важным инструментом дальнейшего исследования, эти условия также формулируются при постановке сингулярных задач для ИДУ, рассматриваемых в данной работе при экспоненциальных распределениях размеров исков (а также размеров премий, если таковые также являются случайными). Эти задачи были впервые корректно поставлены и изучены в [5]–[9]. Исследования данной работы уточняют и существенно дополняют как теоретические результаты из [5]–[9] (в частности, изучены вырожденные задачи для ИДУ, отвечающие другим моделям и представляющие самостоятельный теоретический и практический интерес), так и численные эксперименты, включающие сравнительный анализ моделей и их экономическую интерпретацию.

Будем предполагать в данной работе, как и в [5]–[9], что рискованные активы (акции) моделируются геометрическим броуновским движением, кроме того, имеется безрисковый актив (банковский счет) с постоянной и неслучайной процентной ставкой; считаем также, что структура инвестиционного портфеля постоянна. При этом если исходный процесс риска описывается классической моделью КЛ (моделью КЛ со стохастическими премиями), то соответствующую модель с погружением в финансовый рынок называем *I моделью* (соответственно, *II моделью*).

Отвечающие этим моделям ИДУ для ВНР определены на \mathbb{R}_+ и обладают неинтегрируемыми особенностями в нуле и на бесконечности. Неотрицательные на \mathbb{R}_+ решения этих ИДУ, не превосходящие единицы и стремящиеся к единице на бесконечности, если таковые существуют при некоторых естественных предположениях, действительно определяют искомую вероятность, что может быть доказано с привлечением вероятностных методов (см. [10], [11] и цитированную там литературу). В частности, в [10], [11] обоснованы, в указанном смысле, сингулярные задачи для ИДУ для рассматриваемых в данной работе *I* и *II* моделей в предположениях о положительности параметров в ИДУ и “надежности портфеля активов” (об идее такого подхода к обоснованию *I* модели см. также в [12]).

При аналогичных предположениях в [5], [6], [8] для *I* модели и в [7], [9] для *II* модели и корректной постановке сингулярных задач для ИДУ, в том числе наиболее сложной нелокальной задачи для *II* модели, доказаны теоремы существования и единственности решений с заданными предельными условиями в особых точках, даны асимптотические представления решений в окрестностях особых точек, предложены и реализованы алгоритмы их численного нахождения, проведены расчеты. Заметим, что ранее в [13] для *I* модели изучалось асимптотическое поведение при больших значениях начального капитала (НК) решения ИДУ, отвечающего ВНР; уточнение и обобщение этого результата дано в [14] (результат [13] приведен также в [4]); для *II* модели аналогичный вопрос исследовался в [15].

Целью данной работы является завершение анализа *I* и *II* моделей при указанных выше предположениях и проведение вычислительного эксперимента по их сравнению: дается детальный обзор ранее полученных результатов для этих двух динамических моделей страхования и приводятся новые. В частности, самостоятельный математический и практический интерес представляют вырожденные задачи, когда один или несколько параметров в ИДУ принимают нулевые

значения, причем предельные переходы по параметрам оказываются здесь сингулярными при малых и/или больших значениях аргумента. В дальнейшем для каждого из двух исходных процессов риска под первой вырожденной задачей понимаем задачу для модели без инвестиций с известным аналитическим решением, под второй — задачу для модели с полным вложением всего текущего капитала в безрисковый актив (банковский счет), под третьей — задачу для нестраховой модели динамики капитала типа благотворительного фонда (одинаковую для двух исходных процессов риска как отвечающую отсутствию взносов).

Структура статьи следующая: в разд. 1, который состоит из 7 подразделов, представлены все результаты по I модели, включая вырожденные случаи; в разд. 2, который делится на 5 подразделов, — то же для II модели; разд. 3, состоящий из 3 подразделов, посвящен вычислительным экспериментам для всех рассматриваемых моделей.

Далее, в частности, используются обозначения: $P(A)$ — вероятность события A ; EX — математическое ожидание случайной величины X ; остальные обозначения будут вводиться по мере необходимости.

1. МОДЕЛЬ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА С ИНВЕСТИРОВАНИЕМ КАПИТАЛА НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ И ОДНА СОПУТСТВУЮЩАЯ НЕСТРАХОВАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КАПИТАЛА

1.1. Классическая модель теории риска Крамера–Лундберга

Классический процесс риска в непрерывном времени (с детерминированным процессом поступления премий с постоянной интенсивностью $c > 0$) имеет вид

$$R_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Здесь R_t — величина капитала страховой компании в момент времени t , u — величина НК, c — скорость поступления страховых взносов (c — величина суммарных премий в единицу времени, ct — совокупный страховой взнос к моменту времени t); сумма в правой части — совокупные страховые выплаты, $N(t)$ — однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ ($EN(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$), определяющий для любого $t > 0$ число исков, предъявленных клиентами страховой компании за временной промежуток $(0, t]$; Z_1, Z_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ ($F(0) = 0$, $EZ_1 = m < \infty$), которые определяют размеры предъявленных исков и не зависят от процесса $N(t)$ (Z_j — выплата по иску с номером j , случайный момент предъявления которого и определяет момент j -го скачка процесса $N(t)$).

Для процесса риска (1.1) приведем классическое определение относительной “нагрузки безопасности” — величины, характеризующей ожидаемый “удельный доход” страховой компании в единицу времени (см., например, [1], а также [2, с. 289]).

Определение 1. *Нагрузкой (коэффициентом) безопасности для процесса риска (1.1) называется величина*

$$\rho_1 = (c - m\lambda) / (m\lambda) = c/(m\lambda) - 1, \quad (1.2)$$

а условие

$$c - \lambda m > 0 \quad (1.3)$$

отвечает положительности чистого ожидаемого дохода.

Обозначим через $\tau = \inf\{t : R_t < 0\}$ момент разорения, тогда $P(\tau < \infty)$ — вероятность разорения (ВР) в течение бесконечного промежутка времени.

Классическим результатом теории риска Крамера–Лундберга является следующее утверждение (см., например, [1]): при выполнении условия (1.3) и существовании константы $R > 0$ (“коэффициент Лундберга”) такой, что справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} [1 - F(x)] \exp(Rx) dx = c/\lambda, \quad (1.4)$$

ВР $\xi(u)$ (как функция НК u) допускает оценку

$$\xi(u) = P(\tau < \infty) \leq \exp(-Ru), \quad u \geq 0. \quad (1.5)$$

При этом, если распределение величин страховых выплат экспоненциально,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \quad m > 0, \quad x \geq 0, \quad (1.6)$$

то $R = (c - \lambda m)/(mc) > 0$ и ВНР $\varphi(u) = 1 - \xi(u)$ задается аналитической формулой:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c} \exp\left(-\frac{c - \lambda m}{mc} u\right), \quad 0 \leq u < \infty. \quad (1.7)$$

Замечание 1. Уравнение (1.4) в модели КЛ называется *характеристическим* уравнением. Оно может быть записано также в виде

$$\lambda[E \exp(RZ_i) - 1] - cR = 0. \quad (1.8)$$

Если существует положительное решение R этого уравнения, то процесс $\exp(-RR_t)$ является мартингалом, при этом $E \exp(-RR_t) = \exp(-Ru)$ (в чем можно убедиться непосредственно с учетом (1.8)). Использование этого факта позволяет легко получать оценки для ВР, в частности оценку (1.5) и более общие оценки (см., например, [1]).

Замечание 2. Интересна история создания теории коллективного риска и теории случайных процессов. Приведем очень краткие сведения об этом (подробнее см., например, [2], [16] и сайт НИУ ВШЭ по адресу www.hse.ru/news/avant/85659995.html).

Одним из признанных основателей теории коллективного риска является шведский ученый Филип Лундберг (Ernest Filip Oskar Lundberg, 1876–1965). Возникновение математической теории коллективного риска связано с именем выдающегося шведского математика Гаральда Крамэра (Carl Harald Cramér, 1893–1985). Ссылки на основные публикации этих ученых и описание их результатов можно найти, в частности, в [1].

Днем рождения финансовой математики считается 29 марта 1900 г.: в этот день Луи Башелье (Bachelier L.), ученик Анри Пуанкаре, защитил диссертацию под названием “Теория спекуляции” (см. [17]), в которой, в частности, обосновал, что эволюция цен активов на финансовом рынке может быть описана некоторым случайным процессом с непрерывными траекториями (который теперь называют *винеровским процессом* или *броуновским движением*). По стечению обстоятельств только спустя много десятилетий Луи Башелье был признан отцом-основателем финансовой математики.

Наряду с винеровским процессом понятие пуассоновского процесса, введенное Лундбергом при разработке теории коллективного риска, послужило основой для создания современной теории случайных процессов.

Для дальнейших сопоставлений отметим следующие свойства функции (1.7):

$$\varphi(0) = 1 - \lambda m/c > 0, \quad \varphi'(0) = \lambda(c - \lambda m)/c^2 > 0, \quad (1.9)$$

$$c\varphi'(0) - \lambda\varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = -\varphi'(0)(c - \lambda m)/(mc) < 0; \quad (1.10)$$

$$0 < \varphi(u) < 1, \quad \varphi'(u) > 0, \quad \varphi''(u) < 0 \quad \text{для любого конечного } u \in \mathbb{R}_+; \quad (1.11)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0. \quad (1.12)$$

1.2. Модель Крамэра–Лундберга с вложением постоянных долей капитала в рисковые и безрисковые активы (I модель)

Для описания I модели рассмотрим ситуацию, когда страховая компания с процессом риска (1.1) непрерывно инвестирует некоторую постоянную долю α ($0 < \alpha \leq 1$) своего капитала в акции, изменение цены которых описывается СДУ

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t), \quad t \geq 0. \quad (1.13)$$

Здесь S_t – цена акции в момент времени t , $0 < \mu$ – ожидаемая доходность акции, $0 < \sigma$ – параметр изменчивости (волатильности) указанной доходности, $\{w_t\}$ – стандартный винеровский процесс, или броуновское движение (процесс S_t называют *геометрическим броуновским движением*). При этом будем предполагать, что оставшаяся доля капитала инвестируется в безрисковый актив – банковский счет при постоянной процентной ставке r ($0 < r < \mu$), эволюция которого описывается ОДУ

$$dB_t = rB_t dt, \quad t \geq 0,$$

где B_t – величина банковского счета в момент времени t .

В этом случае динамика капитала (результатирующий процесс риска) описывается начальной задачей для СДУ:

$$dX_t = X_t\{\alpha\mu + (1 - \alpha)r\}dt + \alpha\sigma dw_t + dR_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = u. \quad (1.14)$$

Здесь X_t – стоимость портфеля в момент времени t , R_t – исходный процесс риска (подробнее о постановке (1.14) см., например, [18] и цитированную там литературу).

В качестве меры платежеспособности компании рассматривается ВНР $\varphi(u)$ (как функция НК u) на бесконечном интервале времени:

$$\varphi(u) = \mathbf{P}\{X_t \geq 0, t > 0\},$$

где $X_0 = u, u \geq 0$; при $u < 0$ полагаем $\varphi(u) = 0$.

Заметим, что СДУ в (1.14) при линейной замене параметров

$$a = \alpha\mu + (1 - \alpha)r > 0, \quad b = \alpha\sigma > 0 \quad (1.15)$$

можно рассматривать как уравнение динамики капитала, полностью инвестируемого в акции с ожидаемой доходностью a и волатильностью b , что позволяет без ограничения общности всюду далее рассматривать именно такую стратегию поведения компании на финансовом рынке, если не оговорено особо.

Здесь, в отличие от классической модели КЛ, выполнение требования (1.3) не предполагается.

Следующее определение, используемое нами далее, отвечает случаю “малой волатильности” акций.

Определение 2. При $a > 0$ и $b \neq 0$, где параметры a и b определены в (1.15), неравенство

$$2a/b^2 > 1 \quad (1.16)$$

называется *условием надежности портфеля активов* (или, с учетом приведенного замечания, – *условием надежности акций*, изменение цены которых описывается СДУ (1.13) с заменой параметров μ и σ на a и b соответственно).

Для динамического процесса (1.14) с исходным процессом риска (1.1) и заменой параметров (1.15) ВНР $\varphi(u)$ удовлетворяет следующему линейному ИДУ (см., в частности, [4], [12], [13], [18] и библиографию там):

$$\lambda \int_0^u \varphi(u - z) dF(z) - \lambda\varphi(u) + (au + c)\varphi'(u) + (b^2/2)u^2\varphi''(u) = 0, \quad 0 < u < \infty. \quad (1.17)$$

При этом, в силу ограниченности $\varphi(u)$ при $u \rightarrow +0$, справедливы предельные соотношения $\lim_{u \rightarrow +0} [u\varphi'(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2\varphi''(u)] = 0$, что легко доказать от противного. Тогда из ИДУ (1.17) следует выполнение предельного условия в особой точке $u = 0$, обеспечивающее вырождение этого ИДУ при $u \rightarrow +0$:

$$\lim_{u \rightarrow +0} [c\varphi'(u) - \lambda\varphi(u)] = 0 \quad (1.18)$$

(ср. с первым соотношением в (1.10) для точного решения в модели без инвестиций).

1.3. Основная сингулярная задача для ИДУ и результаты ее исследования

(I модель с экспоненциальным распределением размеров исков и вложением капитала в рисковый актив)

Учитывая (1.17), (1.18) и предположение (1.6) об экспоненциальном распределении размеров исков, для ВНР $\varphi(u)$ получаем следующую сингулярную задачу с ограничениями на область значений решения (см. [5], [6]):

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad (1.19)$$

$$\left| \lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) \right| < \infty, \quad \left| \lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) \right| < \infty, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [c\varphi'(u) - \lambda\varphi(u)] = 0, \quad (1.20)$$

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}_+, \quad (1.21)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0. \quad (1.22)$$

Здесь, если не оговорено особо, все параметры a, b^2, c, λ, m – действительные положительные числа, $(J_m \varphi)(u)$ – вольтерров интегральный оператор ($u \in \mathbb{R}_+$):

$$(J_m \varphi)(u) = \frac{1}{m} \int_0^u \varphi(u-x) \exp(-x/m) dx = \frac{1}{m} \int_0^u \varphi(s) \exp(-(u-s)/m) ds, \quad (1.23)$$

$J_m : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty), C[0, \infty)$ – вещественное линейное пространство непрерывных функций, определенных и ограниченных на \mathbb{R}_+ .

Отметим еще раз (см. обсуждение условия (1.18) для более общего ИДУ (1.17)), что второе и третье из предельных условий в (1.20) – следствия первого естественного требования и самого ИДУ (1.19), для решений которого условия (1.20) влекут выполнение соотношения $\lim_{u \rightarrow +0} [u^2 \varphi''(u)] = 0$, обеспечивая вырождение этого ИДУ при $u \rightarrow +0$: любое решение сингулярной задачи без начальных данных (1.19), (1.20) должно удовлетворять ИДУ (1.19) вплоть до особой точки $u = 0$.

“Укороченная задача” (1.19)–(1.21) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) = 0$, нетривиальное решение выделяется требованием (1.22).

Замечание 3. Сингулярная задача (1.19)–(1.22) впервые была поставлена и полностью исследована в [5], [6]. Однако первый результат для ВНР $\varphi(u)$ как решения ИДУ (1.19), в предположении существования этого решения, был получен в [13] (и уточнен в [14]) и относился к асимптотическому представлению $\varphi(u)$ при больших значениях НК.

Теорема (см. [13], [14]). Пусть $b > 0$, а размеры выплат имеют экспоненциальное распределение, т.е. справедливо представление (1.6). Тогда:

(i) если выполнено условие надежности акций, т.е. неравенство (1.16), то имеет место асимптотическое представление $\varphi(u) = 1 - Ku^{1-2a/b^2} [1 + o(1)]$, $u \rightarrow \infty$, с некоторой постоянной $K > 0$;

(ii) если $2a/b^2 \leq 1$, то $\varphi(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 4. (О приведении параметров к безразмерным величинам.) Для последующих вычислений заметим, что в ИДУ (1.19) параметр m – безразмерный (при безразмерных переменных u и φ), а каждый из остальных параметров b^2, a, c и λ , вообще говоря, имеет размерность $1/[t]$, где $[t]$ – размерность времени. Чтобы перейти к безразмерным параметрам, достаточно разделить ИДУ (1.19) на какую-либо характерную положительную постоянную той же размерности: такое деление приводит (1.19)–(1.22) к задаче того же вида с новыми параметрами $\tilde{b}^2, \tilde{a}, \tilde{c}$ и $\tilde{\lambda}$. В частности, удобно в (1.19)–(1.22) (и во всех других задачах данной работы) в качестве параметра “обезразмеривания” выбрать λ : если положить $\lambda = 1$, то остальные параметры будут измеряться в долях λ и при необходимости пересчитываться в размерном виде простым умножением на величину $\lambda > 0$. В результате, оставляя λ в формулах, как это принято в литературе, мы полагаем всюду в расчетах $\lambda = 1$ (см. разд. 3).

Нам неизвестно обсуждение подобного вопроса в работах по аналогичным моделям страховой математики (возможно, ввиду его несложности, по описанным выше причинам, и/или отсутствия вычислений); однако нами замечено, что в задачах оптимального управления инвестициями при проведении расчетов применяется подобный прием, когда один из параметров (аналог нашего λ) фиксируется равным единице.

Для удобства исследований перепишем сингулярную задачу (1.19)–(1.22) в эквивалентном параметризованном в виде:

$$(b^2/2)u^2 \varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m \varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad (1.24)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) = \lambda C_0/c, \quad (1.25)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0, \quad (1.26)$$

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}_+, \quad (1.27)$$

где C_0 – параметр, подлежащий определению.

Сформулируем основные следствия из результатов [5], [6].

Лемма 1. Пусть в ИДУ (1.24) все параметры – фиксированные действительные числа, где $c > 0$, $\lambda > 0$, $m > 0$, а числа a и b любого знака ($a, b \in \mathbb{R}$), и пусть существует решение $\varphi(u) = \varphi(u, C_0)$ сингулярной линейной задачи (1.24)–(1.26) (без ограничений на область значений решения) для некоторого $C_0 \in \mathbb{R}$.

Тогда такое C_0 единственно, $C_0 : 0 < C_0 < 1$, функция $\varphi(u)$ удовлетворяет требованиям (1.27) и является единственным решением сингулярной линейной задачи с ограничениями (1.24)–(1.27), причем $\varphi'(u) > 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$, и, следовательно, $\varphi(u)$ – строго возрастающая на \mathbb{R}_+ функция.

Далее, ИДУ (1.24) второго порядка можно свести к ОДУ третьего порядка, что является важным и упрощающим для исследований обстоятельством. Для этого достаточно осуществить в (1.24) дополнительное дифференцирование и, учитывая равенство

$$(J_m\varphi)'(u) = \frac{1}{m} \left(\int_0^u \varphi(u-x) \exp(-x/m) dx \right)' = [\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)]/m, \tag{1.28}$$

убрать в полученном ИДУ третьего порядка интеграл $(J_m\varphi)(u)$, используя исходное ИДУ (1.24).

Полученное ОДУ третьего порядка (1.29), приведенное ниже в лемме 2, обладает иррегулярными (сильными) особенностями ранга 1 при $u \rightarrow +0$ и при $u \rightarrow \infty$ (по поводу классификации особых точек типа полюса для систем линейных ОДУ см., например, монографии [19]–[23], дополняющие друг друга). Для изучения сингулярных задач Коши (ЗК) в окрестностях особых точек полученного ОДУ третьего порядка в [5], [6] используются также результаты из [24], [25].

Лемма 2. Пусть в ИДУ (1.24) все параметры – фиксированные действительные числа, где $c > 0$, $b \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $m > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда:

1) при любом фиксированном значении параметра C_0 ($C_0 \in \mathbb{R}$) сингулярная интегродифференциальная начальная задача (1.24), (1.25) эквивалентна сингулярной дифференциальной ЗК вида:

$$(b^2/2)u^2\varphi'''(u) + [c + (b^2 + a)u + b^2u^2/(2m)]\varphi''(u) + [a - \lambda + c/m + au/m]\varphi'(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{1.29}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) = \lambda C_0/c, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = [m(\lambda - a) - c]\lambda C_0/(mc^2); \tag{1.30}$$

2) решение $\varphi(u, C_0)$ сингулярной ЗК (1.29), (1.30) для ОДУ (соответственно, эквивалентной начальной задачи (1.24), (1.25) для ИДУ) существует, единственно и при малых $u > 0$ представимо асимптотическим рядом

$$\varphi(u, C_0) \sim C_0 \left[1 + \frac{\lambda}{c} \left(u + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^k / k \right) \right], \quad u \sim +0, \tag{1.31}$$

где постоянные коэффициенты D_k не зависят от C_0 и определяются формальной подстановкой ряда (1.31) в ОДУ (1.29), а именно по рекуррентным формулам:

$$D_2 = -(a - \lambda)/c + 1/m, \tag{1.32}$$

$$D_3 = -[D_2(b^2 + 2a - \lambda + c/m) + a/m]/(2c), \tag{1.33}$$

$$D_k = -\{D_{k-1}[(k-1)(k-2)b^2/2 + (k-1)a - \lambda + c/m] + D_{k-2}[(k-3)b^2/2 + a/m]/[c(k-1)]\}, \quad k = 4, 5, \dots; \tag{1.34}$$

3) все решения ОДУ (1.29) (начальной задачи (1.24), (1.25) для ИДУ) тогда и только тогда имеют конечные пределы при $u \rightarrow \infty$, когда выполняется неравенство (1.16) – условие надежности акций.

Замечание 5. Интересно, что утверждения 1), 2) леммы 2 при значениях a любого знака оказались востребованными в исследованиях [26] модели оптимального управления инвестициями “при наличии ограничений на заимствования, включающих возможность коротких позиций”: решение соответствующей, вообще говоря, нелинейной задачи для ИДУ, которому удовлетворяет функция Беллмана, при малых значениях аргумента сводится к решению сингулярной линейной ЗК вида (1.29), (1.30), где a может быть отрицательным при некоторых значениях параметров модели, а выполнение условия (1.16) не требуется.

Замечание 6. Утверждения 1) и 2) леммы 2 остаются справедливыми и при $b = 0$ при следующих изменениях: ввиду понижения порядка ОДУ третье предельное условие в (1.30) следует опустить (оно выполняется автоматически); начальные задачи (1.24), (1.25) и (1.29), (1.30) перестают быть сингулярными, и ряд (1.31) становится сходящимся при конечных $u > 0$ с сохранением рекуррентных формул (1.32)–(1.34) при $b = 0$. В результате переход по параметру b при $b \rightarrow 0$ оказывается непрерывным при малых $u > 0$. Это обстоятельство неслучайно: ОДУ (1.29) обладает двойным степенным вырождением – по параметру и независимой переменной, и решение сингулярной ЗК (1.29), (1.30) имеет “двойную асимптотику”, т.е. оно представимо асимптотическим рядом (1.31) при фиксированном значении b^2 и асимптотическим функци-

ональным рядом по целым степеням b^2 начиная с нулевой степени при фиксированном значении u (о двойных асимптотиках решений систем линейных и нелинейных ОДУ см., в частности, [20] и [27, ч. II]). Первый член асимптотического функционального ряда по целым степеням b^2 , соответствующий нулевой степени, определяется решением второй вырожденной задачи для I модели ($b = 0$), изученной здесь в п. 1.5.

Теорема 1. Пусть в ИДУ (1.19) все параметры a, b^2, c, λ, t — фиксированные положительные числа, и пусть выполняется условие (1.16). Тогда:

1) существует, и притом единственное, решение $\varphi(u)$ сингулярной линейной задачи (1.19)–(1.22), оно является бесконечно дифференцируемой строго возрастающей на $(0, \infty)$ функцией (неравенство (1.16), при положительных значениях всех параметров в ИДУ (1.19), является необходимым и достаточным условием существования решения задачи (1.19)–(1.22));

2) решение $\varphi(u)$ может быть получено как решение сингулярной начальной задачи с параметром (1.24), (1.25) для ИДУ (оно же есть решение эквивалентной сингулярной ЗК с параметром (1.29), (1.30) для ОДУ), где параметр $C_0 > 0$ выбирается из требований (1.26) как условия нормировки решения на бесконечности, а ограничения (1.27) выполняются для такого решения автоматически;

3) при малых $u > 0$ для решения $\varphi(u)$ справедливо асимптотическое представление (1.31), где $C_0 : 0 < C_0 < 1$;

4) при больших u для решения $\varphi(u)$ справедливо представление

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-2a/b^2} [1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty, \quad (1.35)$$

где $K = C_0 \tilde{K} > 0$ (значения $C_0 > 0$ и $\tilde{K} > 0$ не могут быть найдены методами локального анализа);

5) если выполнено условие $i_{r,1} > 0$, где

$$i_{r,1} = ta + c - t\lambda \quad (1.36)$$

есть фактор риска (ФР) для I модели, то решение $\varphi(u)$ — вогнутая на \mathbb{R}_+ функция, а если $i_{r,1} < 0$, то $\varphi(u)$ выпукла на некотором отрезке $[0, \hat{u}]$, где $0 < \hat{u}$ — точка перегиба.

Сделаем ряд важных замечаний к этой теореме, некоторые из которых представляются нам существенными и для дальнейшего изложения.

Замечание 7. Уточняя уже сказанное во введении, заметим: в [10] и [11] доказано вероятностными методами, что если при фиксированных положительных параметрах в ИДУ (1.19) для него существует решение $\varphi(u)$, удовлетворяющее условиям (1.21), (1.22) и выполнено неравенство (1.16), то $\varphi(u)$ действительно определяет ВНР и является не убывающей на \mathbb{R}_+ функцией. Такой подход к обоснованию модели определяет и саму априорную постановку задачи (1.19)–(1.22), где предельные условия в нуле порождают: требованием (1.21), наличием в нуле особенности и самим ИДУ; кроме того, выполнение неравенства (1.16) одновременно является необходимым и достаточным условием существования решения задачи (1.19)–(1.22).

Замечание 8. Сингулярные задачи для ОДУ или ИДУ, определенные на неотрицательной вещественной полуоси с заданными предельными условиями в нуле и на бесконечности (аналогичные задаче (1.19)–(1.22)) часто в литературе сразу трактуются как краевые без изучения предельных условий в особых точках. В действительности же, как видно, в частности, из изучения здесь эквивалентной сингулярной задачи с параметром (1.24)–(1.27), задача (1.19)–(1.22) является начальной с условием нормировки решения на бесконечности.

Более того, как будет видно из дальнейшего, почти все задачи в данной работе для ИДУ и ОДУ являются сингулярными ЗК с начальными предельными условиями, заданными или в нуле (когда все решения рассматриваемого уравнения имеют конечные пределы на бесконечности, так что значения этих решений не порождают граничного условия в конечной точке), или на бесконечности (когда, наоборот, все решения уравнения ограничены в нуле и значения этих решений не порождают граничного условия вблизи нуля).

Исключение составляет наиболее сложная (как для исследования, так и для численного решения) не локальная сингулярная задача для ИДУ, относящаяся ко II модели с инвестициями в рискованные активы (см. п. 2.3), которая приводит к сингулярной краевой задаче (КрЗ) для ОДУ.

Замечание 9. (Аналогичное замечание ранее сделано нами в [9] при обсуждении I модели.) Утверждение п. 5) теоремы 1 здесь точнее, чем в [5], [6], [8], где формулируется без доказательства, что при более сильном неравенстве $i_{r,1} > 0$ решение $\varphi(u)$ сингулярной линейной задачи (1.19)–(1.22) есть вогнутая на \mathbb{R}_+ функция. Это несложное утверждение для малых значений $u > 0$ очевидно и следует из разложения (1.31) и формулы (1.32): $\varphi''(u) < 0$ при малых $u \geq 0$. При этом $\varphi''(u)$ не может поменять знак с ростом u . В самом деле, пусть для некоторого $\tilde{u} > 0$ будет $\varphi''(\tilde{u}) = 0$. Тогда из (1.29) получим $\varphi'''(\tilde{u}) < 0$, но при $u > \tilde{u}$ должно быть $\varphi''(u) > 0$, так что приходим к противоречию.

Кроме того, что не было замечено в [5], [6], [8] при изучении I модели, при $i_{r,1} = 0$ решение $\varphi(u)$ остается вогнутой на \mathbb{R}_+ функцией. Это следует из формул (1.31)–(1.33), откуда $\varphi''(0) = 0$, $\varphi'''(0) = -am/(2c) < 0$, так что в окрестности нуля величина $\varphi''(u)$ становится отрицательной и, как и выше, не может поменять знак с ростом u . Из тех же формул (1.31)–(1.33) следует, что при $i_{r,1} < 0$ (а не при $i_{r,1} \leq 0$, как ошибочно указано в [5], [6], [8]) функция $\varphi(u)$ выпукла на некотором отрезке $[0, \hat{u}]$, где $0 < \hat{u}$ – точка перегиба.

Замечание 10. (Алгоритм численного нахождения решения.) Приведенные выше утверждения позволяют численно находить решение задачи (1.19)–(1.22) из решения вспомогательной сингулярной ЗК (1.29), (1.30) с параметром C_0 , значение которого определяется из требований

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi''(u) = 0, \tag{1.37}$$

как условия нормировки решения на бесконечности. Осуществить это можно, например, следующим удобным способом, предложенным в [7]. В (1.29) полагаем $\psi(u) = \varphi'(u)$ и, учитывая (1.30), рассмотрим вспомогательную сингулярную ЗК при $u > 0$:

$$(b^2/2)u^2\psi''(u) + [c + (b^2 + a)u + b^2u^2/(2m)]\psi'(u) + [a - \lambda + c/m + au/m]\psi(u) = 0, \tag{1.38}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \psi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \psi'(u) = [m(\lambda - a) - c]/(mc) = -i_{r,1}/(mc). \tag{1.39}$$

Решение $\psi(u)$ этой задачи существует, единственно и при малых $u > 0$ представимо асимптотическим рядом

$$\psi(u) \sim 1 + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^{k-1}, \quad \psi'(u) \sim \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)D_k u^{k-2}, \quad u \sim +0, \tag{1.40}$$

где коэффициенты D_k определены в (1.32)–(1.34). Разложения (1.40) используем для приближенного переноса предельных условий (1.39) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u_0 > 0$. Решение $\varphi(u)$ исходной задачи (1.19)–(1.22) (или, что то же, задачи (1.24)–(1.27)) находим, используя соотношение

$$\varphi(u) = \left[1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(s) ds \right] \left[1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \psi(s) ds \right]^{-1},$$

где $\psi(u)$ – решение задачи (1.38), (1.39). В частности, получаем

$$\varphi(0) = C_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \psi(s) ds \right]^{-1}. \tag{1.41}$$

Этот алгоритм из [7] дополним замечанием: интеграл $I_{\psi}(u) = \int_0^u \psi(s) ds$ удобно вычислять, добавив ЗК для ОДУ $I'_{\psi}(u) = \psi(u)$ ($u \geq u_0$) с условием $I_{\psi}(u_0) = I_0$, где приближенное значение величины $I_{\psi}(u_0)$ находится с использованием разложения (1.40).

1.4. Аналитическое решение для классической модели КЛ как решение первой вырожденной задачи для ИДУ ($a = b = 0$)

При выполнении условия (1.3) функция (1.7) является единственным решением вырожденной задачи, к которой сводится исходная сингулярная задача (1.19)–(1.22), если формально положить $a = b = 0$. Более того, учитывая лемму 1, достаточно рассмотреть следующую задачу для ИДУ:

$$c\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{1.42}$$

$$c\varphi'(0) - \lambda\varphi(0) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1. \tag{1.43}$$

Эта задача, с учетом замечания 6, эквивалентна ЗК с параметром для линейного ОДУ второго порядка с условием нормировки решения на бесконечности:

$$\varphi''(u) + [(c - m\lambda)/(mc)]\varphi'(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{1.44}$$

$$\varphi(0) = C_0, \quad \varphi'(0) = \lambda C_0/c, \quad (1.45)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0. \quad (1.46)$$

Отсюда получаем: $C_0 = (c - m\lambda)/c$, $0 < C_0 < 1$; справедлива формула (1.7), определяющая аналитическое решение для модели КЛ с положительной нагрузкой безопасности; выполняются соотношения и неравенства (1.9)–(1.12).

Замечание 11. Для задач (1.42), (1.43) и (1.44)–(1.46) величина $c = \lambda m$ является критическим значением параметра бифуркации: при $c \leq \lambda m$ эти задачи решений не имеют (для ВНР $\varphi(u)$ в классической модели КЛ при $c \leq \lambda m$ будет $\varphi(u) \equiv 0$ (см., например, [1]), что отвечает тривиальному решению начальной задачи для ИДУ (1.42) (соответственно, ЗК (1.44), (1.45) для ОДУ), а условие нормировки на бесконечности относится только к нетривиальным решениям). Для I модели, благодаря инвестициям в “надежные акции”, неравенство $\varphi(u) > 0$ на \mathbb{R}_+ выполняется даже при $c \leq \lambda m$.

Замечание 12. Дополним замечание 6, отметив, что сингулярный переход по параметрам a, b от задачи (1.24)–(1.26) к задаче (1.42), (1.43) при $\{a, b\} \rightarrow 0$, приводящий, в частности, к совсем другому асимптотическому поведению решения при больших значениях u , оказывается непрерывным по $\{a, b\}$ при малых $u > 0$: несмотря на исчезновение особенности в нуле и понижение порядка ИДУ и соответствующего ему ОДУ, решение ЗК (1.44), (1.45) представляется тем же рядом (1.31)–(1.34), где в формулах (1.32)–(1.34) надо положить $a = b = 0$, при этом ряд (1.31) становится сходящимся. Аналитическое решение (1.7) всей задачи (1.44)–(1.46) представимо этим рядом с $C_0 = (c - m\lambda)/c$.

1.5. Аналитическое решение второй вырожденной задачи для ИДУ (I модель при вложении капитала в безрисковый актив ($b = 0$))

Указанная модель коротко рассматривалась в [8] (см. также [12, Example 2.1]). Здесь приводится более подробное ее обсуждение.

При $b = 0$ получаем из (1.19)–(1.22) вторую вырожденную задачу для ИДУ:

$$(au + c)\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad (1.47)$$

$$c\varphi'(0) - \lambda\varphi(0) = 0, \quad (1.48)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1. \quad (1.49)$$

Здесь параметры a, λ, m, c – действительные положительные числа, если не оговорено особо, а J_m – вольтеров интегральный оператор, определенный в (1.23).

Для задачи (1.47)–(1.49) справедливо утверждение леммы 1, а для начальной задачи (1.47), (1.48) справедливы утверждения 1) и 2) леммы 2 (с учетом изменений, указанных в замечании 6). Тогда задача (1.47)–(1.49) для ИДУ эквивалентна параметризованной ЗК для ОДУ второго порядка с условием нормировки решения на бесконечности:

$$(au + c)\varphi''(u) + (a - \lambda + c/m + au/m)\varphi'(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad (1.50)$$

$$\varphi(0) = C_0, \quad \varphi'(0) = \lambda C_0/c, \quad (1.51)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0. \quad (1.52)$$

Эта задача является вырожденной по отношению к сингулярной ЗК (1.29), (1.30) для сингулярно возмущенного ОДУ третьего порядка с условием (1.37) нормировки решения на бесконечности. При этом переход по параметру b при $b \rightarrow 0$ от задачи (1.29), (1.30), (1.37) к задаче (1.50)–(1.52) является непрерывным по b при малых $u > 0$ (см. замечание 6, откуда также следует, что указанное ниже аналитическое решение задачи (1.50)–(1.52) дает первый член асимптотического разложения решения исходной задачи (1.29), (1.30), (1.37) в виде функционального ряда по целым степеням b^2 начиная с нулевой степени).

Для описания аналитического решения задачи (1.50)–(1.52) введем обозначения:

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u, m, a, c, \lambda) = \int_u^\infty (x + c/a)^{\lambda/a-1} \exp(-x/m) dx = \\ &= m^{\lambda/a} \exp(c/(am)) \Gamma(\lambda/a, u/m + c/(am)), \quad u \geq 0, \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$I(0) = I(0, m, a, c, \lambda) = m^{\lambda/a} \exp(c/(am))\Gamma(\lambda/a, c/(am)); \tag{1.54}$$

$$D(m, a, c, \lambda) = [I(0, m, a, c, \lambda) + (a/\lambda)(c/a)^{\lambda/a}]^{-1}. \tag{1.55}$$

Здесь $\Gamma(p, z)$ есть нижняя неполная гамма-функция (см., например, [28]),

$$\Gamma(p, z) = \int_z^\infty x^{p-1} \exp(-x) dx, \quad z \geq 0,$$

где $\Gamma(p, 0) = \Gamma(p)$, $\Gamma(p)$ – классическая гамма-функция Эйлера, $p > 0$.

Тогда для решения задачи (1.50)–(1.52) (а следовательно, и эквивалентной ей задачи (1.47)–(1.49)) получим:

$$C_0 = (a/\lambda)(c/a)^{\lambda/a} D(m, a, c, \lambda), \quad 0 < C_0 < 1, \tag{1.56}$$

$$\varphi(u) = \varphi(u, C_0) = 1 - I(u)D(m, a, c, \lambda), \quad u \in \mathbb{R}_+; \tag{1.57}$$

для производных решения (1.57) получаем на \mathbb{R}_+ представления:

$$\varphi'(u) = D(m, a, c, \lambda)(u + c/a)^{\lambda/a-1} \exp(-u/m), \tag{1.58}$$

$$\varphi''(u) = D(m, a, c, \lambda)[(\lambda/a - 1)/(u + c/a) - 1/m](u + c/a)^{\lambda/a-1} \exp(-u/m). \tag{1.59}$$

В частности, справедливо соотношение

$$\varphi''(u) = \varphi'(u)[(\lambda/a - 1)/(u + c/a) - 1/m] = -\varphi'(u)(i_{r,1}/a + u)/[m(u + c/a)], \tag{1.60}$$

где ФР $i_{r,1}$ определен в (1.36): $i_{r,1} = m(a - \lambda) + c$.

Из формул (1.58)–(1.60), в частности, получаем, что $\varphi'(u) > 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$, а для вторых производных будет: 1) если $i_{r,1} > 0$, то $\varphi''(u) < 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$; 2) если $i_{r,1} = 0$, то $\varphi''(0) = 0$ и $\varphi''(u) < 0$ для любого конечного $u > 0$; 3) если $i_{r,1} < 0$, то $\varphi''(0) > 0$ и $\varphi(u)$ имеет перегиб в точке $u = \hat{u} = -i_{r,1}/a > 0$.

При больших u для решения (1.57) справедливо асимптотическое представление

$$\varphi(u) = 1 - mD(m, a, c, \lambda)u^{\lambda/a-1} \exp(-u/m)[1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty. \tag{1.61}$$

Из сравнения (1.61) с (1.35) следует, что переход по параметру b при $b \rightarrow 0$ от задачи (1.19)–(1.22) к задаче (1.47)–(1.49) (от задачи (1.29), (1.30), (1.37) к задаче (1.50)–(1.52)) является сингулярным при больших u . (Заметим, что во все формулы (1.53)–(1.61) параметры задачи входят в безразмерных комбинациях.)

В заключение этого подраздела укажем, что описанный выше переход по параметру b при $b \rightarrow 0$ от исходных задач для ИДУ и ОДУ к вырожденным является “почти традиционным”: малый параметр b^2 стоит при старшей производной, так что понижается порядок уравнения при $b = 0$. “Почти” означает, что нам неизвестно, насколько развита теория сингулярных ЗК и КрЗ для сингулярно возмущенных систем ОДУ (и тем более ИДУ), когда, в частности, надо следить за изменением характера вырождения в граничных точках и постановкой предельных условий в них (в этом направлении см., например, исследования [27], охватывающие некоторые классы сингулярных ЗК для сингулярно возмущенных систем нелинейных ОДУ).

1.6. Сингулярная задача для сопутствующей нестраховой модели динамики капитала (типа благотворительного фонда с вложением капитала в рисковый актив) как третья вырожденная задача для ИДУ ($c = 0, b \neq 0$)

Результаты исследования задачи, указанной в названии, коротко без доказательств приведены в [8]. Здесь дается достаточно подробный анализ этой сингулярной задачи в переработанном и дополненном виде и с доказательствами основных утверждений (при этом, как и в теореме 1, уточняются утверждения, связанные с неравенствами для ФР). Приведенный анализ дает также некоторое представление о близкой схеме исследования в [5], [6] исходной задачи (1.19)–(1.22) (в наиболее полном и аккуратном варианте такое исследование опубликовано нами в [6] в малодоступном издании).

1.6.1. Постановка сингулярной задачи для ИДУ второго порядка и ее сведение к эквивалентной сингулярной задаче для ОДУ третьего порядка. Рассматривается третья вырожденная задача для ИДУ (1.19), которая получается из исходной задачи (1.19)–(1.22) при $c \rightarrow +0$ и отвечает случаю отсутствия в I модели страховых взносов – премий:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad 0 < u < \infty, \quad (1.62)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = \lim_{u \rightarrow +0} [u\varphi'(u)] = 0, \quad (1.63)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0, \quad (1.64)$$

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}_+. \quad (1.65)$$

Переход от задачи (1.19)–(1.22) к задаче (1.62)–(1.65) по параметру $c > 0$ при $c \rightarrow +0$ является сингулярным при малых $u \geq 0$, так как меняются характер вырождения ИДУ в нуле и предельные условия в этой точке. Такой переход от сингулярно возмущенной задачи к вырожденной, при котором не понижается порядок ИДУ, не является здесь “традиционным” (см. заключительный абзац в конце п. 1.5) и может быть описан исходя из понятия “подвижной особой точки”. Для этого введем в (1.19) замену переменных $z_1 = \varphi$, $z_2 = (u + c/a)\varphi'$. Получим систему первого порядка с особенностью в нуле типа полюса второго порядка и особенностью в точке $u = \hat{u}(c) = -c/a < 0$ типа полюса первого порядка:

$$(u + c/a)z_1' = z_2, \quad (u + c/a)z_2' - \left(1 - 2a\frac{u + c/a}{b^2u}\right)z_2 + 2\lambda\frac{(u + c/a)^2}{b^2u^2}[z_1 - (J_m z_1)(u)] = 0. \quad (1.66)$$

Полагая $c = 0$, из (1.66) получаем систему ИДУ с особенностью в нуле типа полюса первого порядка:

$$uz_1' = z_2, \quad uz_2' - (1 - 2a/b^2)z_2 + (2\lambda/b^2)[z_1 - (J_m z_1)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+. \quad (1.67)$$

Таким образом, расположенная на отрицательной действительной полуоси и подвижная (зависящая от параметра c) особая точка $u = \hat{u}(c)$ в системе (1.66) при $c \rightarrow +0$ сливается с особой граничной точкой $u = 0$, меняя ее тип. Возвращаясь в (1.67) к исходным переменным $z_1 = \varphi$, $z_2 = u\varphi'$, получаем ИДУ (1.62). Мы вернемся к этому вопросу при изучении сопутствующих сингулярных задач для ОДУ (см. замечание 13).

Следующая лемма является аналогом леммы 1.

Лемма 3. Пусть в ИДУ (1.62) все параметры – фиксированные действительные числа, где $\lambda > 0$, $m > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, и пусть существует решение $\varphi(u) = \varphi_1(u)$ сингулярной задачи (1.62)–(1.64) (без ограничений на область значений решения).

Тогда это решение единственно и удовлетворяет требованиям (1.65), т.е. является единственным решением сингулярной задачи с ограничениями (1.62)–(1.65), причем $\varphi'(u) > 0$ для любого конечного $u > 0$, и, следовательно, $\varphi(u)$ – строго возрастающая на \mathbb{R}_+ функция.

Доказательство. 1) Докажем единственность. Предположим противное: пусть $\varphi_2(u)$ – другое решение задачи (1.62)–(1.64). Рассмотрим разность $\hat{\varphi}(u) = \varphi_2(u) - \varphi_1(u)$. Тогда $\hat{\varphi}(u)$ есть решение ИДУ (1.62), удовлетворяющее условиям $\lim_{u \rightarrow +0} \hat{\varphi}(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \hat{\varphi}(u) = 0$. Если такое нетривиальное решение существует, то оно должно иметь положительный максимум на \mathbb{R}_+ (если $\hat{\varphi}(u)$ не принимает положительных значений на \mathbb{R}_+ , то рассматриваем $-\hat{\varphi}(u)$). Пусть $0 < \hat{u}$ – точка максимума этого решения: $\hat{\varphi}(\hat{u}) = \max_{u \in (0, \infty)} \hat{\varphi}(u) > 0$, $\hat{\varphi}'(\hat{u}) = 0$. В этой точке должно быть $\hat{\varphi}''(\hat{u}) \leq 0$. Но из ИДУ (1.62), с учетом формулы (1.23), получаем противоречие:

$$(b^2/2)\hat{u}^2\hat{\varphi}''(\hat{u}) = \lambda\hat{\varphi}(\hat{u}) - \lambda m^{-1} \exp(-\hat{u}/m) \int_0^{\hat{u}} \hat{\varphi}(s) \exp(s/m) ds \geq \\ \geq \lambda\hat{\varphi}(\hat{u}) \left[1 - m^{-1} \exp(-\hat{u}/m) \int_0^{\hat{u}} \exp(s/m) ds \right] = \lambda\hat{\varphi}(\hat{u}) \exp(-\hat{u}/m) > 0.$$

2) Ограничение (1.65) аналогично доказываются от противного.

3) Неравенство $\varphi'(u) > 0$, по крайней мере, справедливо при малых $u > 0$, так как $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = 0$ и выполняется ограничение (1.65). Далее аналогично рассуждениям в 1) доказывается от противного, что $\varphi'(u)$ не может поменять знак с ростом u .

Далее, используем то упрощающее обстоятельство, что ИДУ (1.62) второго порядка сводится к ОДУ третьего порядка: дифференцируем ИДУ (1.62) с учетом равенства (1.28) и убираем интеграл $(J_m \varphi)(u)$ в полученном ИДУ третьего порядка, прибавив к нему исходное ИДУ (1.62), умноженное на $1/m$.

В результате из сингулярной задачи для ИДУ (1.62)–(1.64) получаем следующую сингулярную задачу для ОДУ, определенную на \mathbb{R}_+ :

$$(b^2/2)u^3\varphi'''(u) + [b^2 + a + b^2u/(2m)]u^2\varphi''(u) - (a - \lambda + au/m)u\varphi'(u) = 0, \tag{1.68}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = \lim_{u \rightarrow +0} [u\varphi'(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2\varphi''(u)] = 0, \tag{1.69}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi''(u) = 0. \tag{1.70}$$

Лемма 4. Пусть в ИДУ (1.62) все параметры – фиксированные действительные числа, где $b \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $m > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда сингулярная начальная задача (1.62), (1.63) для ИДУ эквивалентна сингулярной ЗК (1.68), (1.69) для ОДУ.

Доказательство. В одну сторону – от задачи (1.62), (1.63) к задаче (1.68), (1.69) – утверждение очевидно. Пусть теперь $\varphi(u) = \hat{\varphi}(u)$ – решение задачи (1.68), (1.69). Надо доказать, что оно удовлетворяет ИДУ (1.62). Обозначим левую часть ИДУ (1.62), взятом на решении $\hat{\varphi}(u)$, через $g(u)$. Покажем, что $g(u) = 0$. В самом деле, учитывая способ получения ОДУ (1.68), запишем его в виде

$$g'(u) + g(u)/m = 0, \quad 0 \leq u < \infty. \tag{1.71}$$

Общее решение ОДУ (1.71) имеет вид

$$g(u) = \tilde{C} \exp(-u/m), \quad 0 \leq u < \infty, \tag{1.72}$$

где \tilde{C} – произвольная постоянная. Из определения $g(u)$ и условий (1.69) получаем $g(0) = 0$, что влечет $\tilde{C} = 0$ в (1.72).

Замечание 13. Переход по параметру $c > 0$ от сингулярной ЗК (1.29), (1.30) к сингулярной ЗК (1.68), (1.69) при $c \rightarrow +0$ является сингулярным: иррегулярная (сильная) особая точка $u = 0$ ранга 1 в (1.29) становится в предельном ОДУ (1.68) регулярной (слабой) особенностью, и меняются предельные условия в нуле. Опишем этот переход исходя из понятия подвижной особенности. Введем обозначения:

$$A(u, c) = c/B(u) + u, \quad B(u) = a + b^2[1 + u/(2m)], \quad C(u, c) = a(1 + u/m) - \lambda + c/m,$$

откуда, в частности, $B(0) = b^2 + a \neq 0$, $A'(u, c) = -cb^2/[2mB^2(u)] + 1$, и при $a \geq 0$ и $0 < c < m(b^2 + a)^2/(2b^2)$ имеем $A(\tilde{u}(c), c) = 0$, где

$$\tilde{u}(c) = -m(1 + a/b^2) + \sqrt{m^2(1 + a/b^2)^2 - 2mc/b^2} < 0, \quad \lim_{c \rightarrow +0} \tilde{u}(c) = 0. \tag{1.73}$$

Введем в ОДУ (1.29) замену переменных: $y_1 = \varphi'$, $y_2 = A(u, c)\varphi''$. Получим систему ОДУ первого порядка с иррегулярной особенностью в нуле и регулярной особенностью в точке $u = \tilde{u}(c)$, определенной в (1.73):

$$A(u, c)y_1' = y_2, \quad A(u, c)y_2' = \left[A'(u, c) - 2B(u) \frac{A(u, c)}{b^2u} \right] y_2 - 2C(u, c) \frac{A^2(u, c)}{b^2u^2} y_1. \tag{1.74}$$

При $c = 0$ получаем из (1.74) систему ОДУ с регулярной особенностью в нуле:

$$uy_1' = y_2, \quad uy_2' = -(1 + 2a/b^2 + u/m)y_2 - (2/b^2)[a(1 + u/m) - \lambda]y_1, \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{1.75}$$

Таким образом, расположенная на отрицательной действительной полуоси и зависящая от параметра $c > 0$ особая точка $u = \tilde{u}(c)$ в системе ОДУ (1.74) при $c \rightarrow +0$ сливается с особой граничной точкой $u = 0$, меняя ее тип. Возвращаясь к исходным переменным $y_1 = \varphi'$, $y_2 = A(u, 0)\varphi'' = u\varphi''$, получаем из (1.75) ОДУ (1.68). Для этого вырожденного ОДУ, в частности, становится несправедливым представление решения в окрестности нуля в виде ряда (1.31), и сингулярная ЗК (1.68), (1.69) изучается далее отдельно.

Изучению задач с движущимися, или подвижными, особенностями для систем линейных ОДУ посвящены работы разных авторов (см., например, [29]), краткое обсуждение одного класса таких задач приве-

дено в [20, с. 304–306]. Однако существование здесь достаточно развитой теории нам неизвестно (такая теория, по-видимому, должна быть очень сложной). Известно только из опыта, что связанный с подвижными особенностями сингулярный переход по параметрам возникает в целом ряде задач математической и теоретической физики. Здесь мы только хотели показать наличие подобного перехода в рассматриваемой модели, не претендуя на какое-либо дополнительное аналитическое исследование такого перехода, а изучая далее сингулярную задачу (1.68)–(1.70) независимо, как представляющую самостоятельный интерес.

1.6.2. Вспомогательная сингулярная задача для ОДУ второго порядка и результаты ее исследования. Понизив порядок ОДУ (1.68), полагая $\varphi'(u) = \psi(u)$, получим для $\psi(u)$ вспомогательную сингулярную задачу, определенную на \mathbb{R}_+ и подлежащую изучению:

$$(b^2/2)u^2\psi''(u) + [b^2 + a + b^2u/(2m)]u\psi'(u) + (a - \lambda + au/m)\psi(u) = 0, \quad u > 0, \quad (1.76)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} [u\psi(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2\psi'(u)] = 0, \quad (1.77)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \psi'(u) = 0. \quad (1.78)$$

ОДУ (1.76) обладает регулярной (слабой) особенностью в нуле и иррегулярной (сильной) особенностью ранга 1 на бесконечности. Чтобы разобраться в том, что представляет из себя сингулярная задача (1.76)–(1.78), надо прежде всего изучить сингулярные ЗК, поставленные в окрестностях особых точек.

1.6.2.A. Сингулярная ЗК при $u \rightarrow +0$ и ее однопараметрическое семейство решений. Рассмотрим сингулярную ЗК (1.76), (1.77), где в ОДУ (1.76) параметры a, b, m удовлетворяют условиям леммы 4, а $\lambda > 0$. Полагая, как обычно для случая регулярной особенности, $\psi(u) = u^\mu[1 + o(1)]$, $u\psi'(u) = \mu u^\mu[1 + o(1)]$, $u^2\psi''(u) = \mu(\mu - 1)u^\mu[1 + o(1)]$, $u \rightarrow +0$, получаем из (1.76) для показателя μ характеристическое уравнение

$$\mu(\mu - 1) + 2(1 + a/b^2)\mu + 2(a - \lambda)/b^2 = 0,$$

корни которого $\mu_j, j = 1, 2$, имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -1/2 - a/b^2 + \sqrt{(1/2 + a/b^2)^2 + 2(\lambda - a)/b^2}, \\ \mu_2 &= -1/2 - a/b^2 - \sqrt{(1/2 + a/b^2)^2 + 2(\lambda - a)/b^2}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Отсюда также следуют равенства

$$\begin{aligned} \mu_1 + 1 &= 1/2 - a/b^2 + \sqrt{(1/2 - a/b^2)^2 + 2\lambda/b^2}, \\ \mu_2 + 1 &= 1/2 - a/b^2 - \sqrt{(1/2 - a/b^2)^2 + 2\lambda/b^2}. \end{aligned}$$

В результате, при указанных ограничениях на параметры, справедливы неравенства $\mu_1 > -1$, $\mu_2 < -1$, т.е. только решения ОДУ (1.76) с показателем μ_1 удовлетворяют условиям (1.77).

Для характеристического показателя μ_1 более подробно получаем: 1) если $a > \lambda > 0$, то $-1 < \mu_1 < 0$; 2) если $a = \lambda$, то $\mu_1 = 0$; 3) если $a < \lambda$, то $\mu_1 > 0$, причем при выполнении дополнительных требований будет: если $\lambda > 2a + b^2$, то $\mu_1 > 1$; если $\lambda = 2a + b^2$, то $\mu_1 = 1$; если $a < \lambda < 2a + b^2$, то $0 < \mu_1 < 1$.

Введем обозначения:

$$d_1 = \mu_1 + 1 + a/b^2, \quad d_2 = \mu_1 + 2a/b^2. \quad (1.80)$$

Для дальнейшего заметим, что $d_1 > 0$, а при $a = \lambda > 0$ будет также $d_2 = 2\lambda/b^2 > 0$.

Лемма 5. Пусть в ОДУ (1.76) все параметры – фиксированные действительные числа, где $b \neq 0$, $\lambda > 0$, $m > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Тогда сингулярная ЗК (1.76), (1.77) обладает однопараметрическим семейством решений $\psi(u, P_1)$ и следующее представление справедливо:

$$\psi(u, P_1) = P_1 u^{\mu_1} \eta(u). \quad (1.81)$$

Здесь P_1 – параметр, величина μ_1 определена в (1.79), а $\eta(u)$ есть решение сингулярной ЗК

$$u^2\eta''(u) + (2d_1 + u/m)u\eta'(u) + (d_2u/m)\eta(u) = 0, \quad u > 0, \quad (1.82)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \eta(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\eta'(u)] = 0, \quad (1.83)$$

где $d_1 > 0$ и d_2 определены в (1.80); решение $\eta(u)$ сингулярной ЗК (1.82), (1.83) существует, единственно и является голоморфной функцией в точке $u = 0$,

$$\eta(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{k=1} u^k, \quad |u| \leq u_0, \quad u_0 > 0, \quad (1.84)$$

где коэффициенты P_{k+1} могут быть найдены формальной подстановкой ряда (1.84) в ОДУ (1.82), а именно, по рекуррентным формулам:

$$P_2 = -d_2/(2md_1), \quad (1.85)$$

$$P_{k+1} = -P_k(k-1+d_2)/[mk(k-1+2d_1)], \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.86)$$

Кроме того, введя обозначения $D_1 = \lim_{u \rightarrow +0} \psi(u, P_1)$, $D_2 = \lim_{u \rightarrow +0} \psi'(u, P_1)$, $\text{sign}(P_1) = P_1/|P_1|$, $P_1 \neq 0$, получим справедливость утверждений:

1) при $a > \lambda > 0$, т.е. когда $-1 < \mu_1 < 0$, справедливо: $D_1 \text{sign}(P_1) = \infty$, $D_2 \text{sign}(P_1) = -\infty$, причем $\psi(u, P_1)$ остается интегрируемой в нуле функцией;

2) при $a = \lambda$, т.е. когда $\mu_1 = 0$, будет: $D_1 = P_1$, $D_2 = P_1 P_2$, так что при $P_1 > 0$ справедливо $D_2 < 0$;

3) при $a < \lambda$, когда $\mu_1 > 0$, будет $D_1 = 0$, а для D_2 справедливо: $D_2 = 0$ при $\lambda > 2a + b^2$, т.е. когда $\mu_1 > 1$; $D_2 = P_1$ при $\lambda = 2a + b^2$, т.е. когда $\mu_1 = 1$; $D_2 \text{sign}(P_1) = \infty$ при $\lambda < 2a + b^2$, т.е. когда $0 < \mu_1 < 1$, причем $\psi'(u, P_1)$ остается интегрируемой в нуле функцией.

Доказательство. Представление (1.81) следует из общей теории систем линейных ОДУ с регулярными особыми точками. Утверждение относительно сингулярной ЗК (1.82), (1.83) следует также из теоремы 5 в [25]. Для применения этой теоремы (справедливой для достаточно общих сингулярных ЗК для систем нелинейных ОДУ) достаточно в (1.82), (1.83) осуществить замену переменных $z(u) = \eta(u) - 1$ и рассмотреть сингулярную ЗК для $z(u)$, для которой нетрудно проверить выполнение условий указанной теоремы.

Остальные утверждения леммы связаны с зависимостью показателя μ_1 от параметров задачи.

1.6.2.Б. Сингулярная ЗК на бесконечности и ее двухпараметрическое семейство решений. Рассмотрим теперь сингулярную ЗК на бесконечности (1.76), (1.78), переписав ее в эквивалентном, но более удобном для изучения виде:

$$\psi''(u) + [1/m + 2(a/b^2 + 1)/u]\psi'(u) + (2/b^2)[a/(tu) + (a - \lambda)/u^2]\psi(u) = 0, \quad (1.87)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \psi'(u) = 0. \quad (1.88)$$

Переход по параметру c от сингулярной ЗК на бесконечности вида (1.38), (1.88) к сингулярной ЗК (1.87), (1.88) при $c \rightarrow 0$ является регулярным. В результате можно воспользоваться леммой 5 из [5] (или [6]), утверждение и доказательство которой не зависят от величины c .

Лемма 6. Пусть в ОДУ (1.87) все параметры – фиксированные действительные числа, где $b \neq 0$, $a > 0$, $m > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

1) любое решение ОДУ (1.87) удовлетворяет условиям (1.88): сингулярная ЗК на бесконечности (1.87), (1.88) обладает двухпараметрическим семейством решений $\psi(u, p_1, p_2)$, где p_1 и p_2 – произвольные постоянные;

2) для решений этого семейства справедливо представление

$$\psi(u, p_1, p_2) = p_1 u^{-2a/b} [1 + \chi_1(u)/u] + p_2 u^{-2} \exp(-u/m) [1 + \chi_2(u)/u]; \quad (1.89)$$

здесь функции $\chi_j(u)$ имеют конечные пределы при $u \rightarrow \infty$ и для больших u представимы асимптотическими рядами по обратным целым степеням u ,

$$X_j(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \chi_j^{(k)}/u^k, \quad j = 1, 2, \quad (1.90)$$

где коэффициенты $\chi_j^{(k)}$, $j = 1, 2$, $k \geq 0$, могут быть найдены формальной подстановкой (1.89), (1.90) в ОДУ (1.87);

3) все решения семейства (1.89) интегрируемы на бесконечности тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (1.16).

Следствие 1. Пусть в ОДУ (1.76) все параметры b^2 , a , m , λ – фиксированные положительные числа, и пусть выполняется неравенство (1.16). Тогда решение $\eta(u)$ вспомогательной сингулярной ЗК (1.82), (1.83), определенное в лемме 5 и рассматриваемое на \mathbb{R}_+ , стремится к нулю при $u \rightarrow \infty$ вместе с производной $\eta'(u)$.

Замечание 14. Дополнительно к лемме 6 и для наглядности заметим следующее. Представление двухпараметрического семейства решений сингулярной ЗК (1.87), (1.88) в виде (1.89), вообще говоря, есть следствие общей теории систем линейных ОДУ с иррегулярными особыми точками. При этом главные члены представления (1.89) можно получить более простым (но менее строгим) способом, чем это осуществлено в [5], [6]. А именно, характеристические показатели на бесконечности ОДУ (1.87) суть $\nu_0 = 0$ и $\nu_1 = -1/m$. Учитывая, что это ОДУ имеет на бесконечности иррегулярную особенность ранга 1, надо найти первую поправку по теории возмущений при больших u к каждому из этих показателей. Для этого достаточно при больших u искать решение в виде: $\psi(u) = u^\nu \exp(\nu u)[1 + o(1)]$, $\psi'(u) = (\nu + \kappa/u)u^\nu \exp(\nu u)[1 + o(1)]$, $\psi''(u) = (\nu^2 + 2\kappa\nu/u)u^\nu \exp(\nu u)[1 + o(1)]$, где более точно $o(1)$ есть $O(1/u)$. Тогда из ОДУ (1.87) при больших u получаем соотношение $\nu^2 + \nu/m + [\kappa/m + 2(\kappa + a/b^2 + 1)\nu + (2a/b^2)/m]/u = O(1/u^2)$, откуда следуют уравнения: $\nu^2 + \nu/m = 0$, $\kappa/m + 2(\kappa + a/b^2 + 1)\nu + (2a/b^2)/m = 0$. В результате получаем: $\nu_0 = 0$, $\kappa_0 = -2a/b^2$; $\nu_1 = -1/m$, $\kappa_1 = -2$.

1.6.3. Основная теорема для исходной сингулярной задачи для ИДУ. Суммируя приведенные выше утверждения, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть в ИДУ (1.62) все параметры a , b^2 , λ , m – фиксированные положительные числа, и пусть выполняется неравенство (1.16) – условие надежности портфеля активов. Тогда:

1) существует, и притом единственное, решение $\varphi(u)$ сингулярной линейной задачи (1.62)–(1.64), оно удовлетворяет ограничениям (1.65) и для $u > 0$ является гладкой строго возрастающей на \mathbb{R}_+ функцией;

2) это решение $\varphi(u)$ может быть получено по формуле

$$\varphi(u) = \int_0^u s^{\mu_1} \eta(s) ds / \int_0^\infty s^{\mu_1} \eta(s) ds, \quad u \geq 0, \quad (1.91)$$

где величина μ_1 определена в (1.79), а функция $\eta(u)$ определена в лемме 5;

3) для конечных $u > 0$ решение $\varphi(u)$ представимо сходящимся рядом, который может быть получен с использованием формул (1.91), (1.84)–(1.86):

$$\varphi(u) = P_1 u^{\mu_1+1} \left[1/(\mu_1 + 1) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{k+1} u^k / (k + \mu_1 + 1) \right],$$

$$\varphi'(u) = P_1 u^{\mu_1} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{k+1} u^k \right], \quad \varphi''(u) = P_1 u^{\mu_1-1} \left[\mu_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_1 + k) P_{k+1} u^k \right];$$

здесь

$$P_1 = P_1(\mu_1) = 1 / \int_0^\infty s^{\mu_1} \eta(s) ds > 0, \quad (1.92)$$

а коэффициенты P_{k+1} определены в (1.85), (1.86), $k = 1, 2, \dots$;

4) если $a \geq \lambda$, то решение $\varphi(u)$ – вогнутая на \mathbb{R}_+ функция, причем при $a > \lambda$, когда $-1 < \mu_1 < 0$, будет $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) = \infty$, $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = -\infty$, где $\varphi'(u)$ интегрируема в нуле, а при $a = \lambda$, когда $\mu_1 = 0$, будет $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) = P_1(0) = 1 / \int_0^\infty \eta(s) ds > 0$, $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = -P_1(0)\lambda / [m(b^2 + \lambda)] < 0$;

5) если $a < \lambda$, то $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) = 0$, а $\varphi(u)$ выпукла на некотором интервале $[0, \hat{u}]$, где $0 < \hat{u}$ – точка перегиба; при этом для $\varphi''(u)$ справедливо: если $a < \lambda < 2a + b^2$, то $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = \infty$, где функция $\varphi''(u)$ интегрируема в нуле; если $\lambda = 2a + b^2$, то $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = P_1(1) = 1 / \int_0^\infty s \eta(s) ds > 0$; если $\lambda > 2a + b^2$, то $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = 0$;

б) при больших u справедливо асимптотическое представление

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-2a/b^2} [1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty, \tag{1.93}$$

где $0 < K$ – постоянная, которая в общем случае не может быть найдена методами локального анализа.

Заметим, что в условиях данной модели нагрузка безопасности всегда отрицательна, так как $c = 0$ (см. определение 1), а наиболее рискованная ситуация возникает при выполнении неравенств п. 5) теоремы 2, т.е. когда $i_{r,1} < 0$, где $i_{r,1} = m(a - \lambda)$ – ФР для данной модели (см. (1.36)). Отметим также, что утверждения 4) и 5) теоремы 2 здесь точнее и подробнее приведенных в [8].

1.6.4. Алгоритм численного нахождения решения. В условиях теоремы 2 исходная сингулярная задача (1.62)–(1.64) для ИДУ эквивалентна сингулярной задаче (1.68)–(1.70) для ОДУ. Чтобы решить последнюю, используем формулу (1.91) и вспомогательную сингулярную ЗК (1.82), (1.83). Сходящийся ряд (1.84)–(1.86) для решения $\eta(u)$ этой задачи используем для переноса предельных начальных условий (1.83) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u = u_0 > 0$; производную от решения $\eta'(u_0)$ получаем дифференцированием ряда (1.84). В результате решаем так полученную регулярную ЗК для ОДУ (1.82) от точки $u = u_0 > 0$ до точки $u = u_\infty \gg 1$. С учетом всех утверждений искомое решение $\varphi(u)$ задачи (1.62)–(1.65) находим по формуле (1.91). При этом интеграл $I_\eta(u, \mu_1) = \int_0^u s^{\mu_1} \eta(s) ds$ удобно вычислять, добавив ЗК: $I_\eta'(u) = u^{\mu_1} \eta(u)$, $u \geq u_0$, $I_\eta(u_0) = I_0$; здесь приближенное значение величины $I_\eta(u_0)$ находится с использованием разложения (1.84):

$$I_\eta(u_0, \mu_1) = \int_0^{u_0} s^{\mu_1} \eta(s) ds = u_0^{\mu_1+1} \left[1/(\mu_1 + 1) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{k+1} u_0^k / (k + \mu_1 + 1) \right],$$

где коэффициенты P_{k+1} определены в (1.85), (1.86), $k = 1, 2, \dots$.

1.7. Аналитическое решение для модели типа благотворительного фонда с вложением капитала в безрисковый актив (“дважды вырожденная” задача для ИДУ ($c = b = 0$))

Формулы, приведенные в п. 1.5, справедливы и при $c = 0$. В самом деле, сингулярная задача (1.47)–(1.49) для ИДУ при $c = 0$ приобретает вид

$$u\varphi'(u) - (\lambda/a)[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{1.94}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1. \tag{1.95}$$

Здесь параметры a, λ, m – действительные положительные числа, J_m – вольтерров интегральный оператор, определенный в (1.23).

Разумеется, та же “дважды вырожденная” задача получается из (1.62)–(1.64) при $b = 0$, и для нее уже не справедливы леммы 1 и 2, но справедливы лемма 3 и, как нетрудно проверить, лемма 4 при $a \neq 0$.

Сингулярная задача (1.94), (1.95) для ИДУ эквивалентна сингулярной задаче для ОДУ:

$$u^2\varphi''(u) + (1 - \lambda/a + u/m)u\varphi'(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{1.96}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = \lim_{u \rightarrow +0} [u\varphi'(u)] = 0, \tag{1.97}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0. \tag{1.98}$$

Эта задача (а следовательно, и эквивалентная ей задача (1.94), (1.95)) при положительных значениях параметров a, λ, m имеет аналитическое решение, а именно, для решения $\varphi(u)$ и его производных получаем на \mathbb{R}_+ представления;

$$\varphi(u) = 1 - \Gamma(\lambda/a, u/m) / \Gamma(\lambda/a), \tag{1.99}$$

$$\varphi'(u) = [m^{\lambda/a} \Gamma(\lambda/a)]^{-1} u^{\lambda/a-1} \exp(-u/m), \tag{1.100}$$

$$\varphi''(u) = [m^{\lambda/a} \Gamma(\lambda/a)]^{-1} [\lambda/a - 1 - u/m] u^{\lambda/a-2} \exp(-u/m). \tag{1.101}$$

В частности, справедливо соотношение

$$\varphi''(u) = \varphi'(u)[(\lambda/a - 1)/u - 1/m] = -\varphi'(u)(i_{r,1}/a + u)/(mu), \quad (1.102)$$

где $i_{r,1}$ – ФР для данной модели: $i_{r,1} = m(a - \lambda)$.

При больших u для решения (1.99) справедливо асимптотическое представление

$$\varphi(u) = 1 - [m^{1-\lambda/a}/\Gamma(\lambda/a)]u^{\lambda/a-1} \exp(-u/m)[1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty. \quad (1.103)$$

Переход по параметру c при $c \rightarrow +0$ от задачи (1.47)–(1.49) к задаче (1.94), (1.95) является регулярным (непрерывным по c) при больших u и сингулярным при малых $u > 0$, так как возникает особенность в точке $u = 0$: подвижная особая точка $u = \hat{u}(c) = -c/a < 0$, расположенная на отрицательной действительной полуоси, при $c \rightarrow +0$ перемещается в нуль.

Из формул (1.100)–(1.102), в частности, следуют утверждения:

1) если $0 < a < \lambda$, то $i_{r,1} < 0$, $\varphi(u)$ имеет перегиб в точке $\hat{u} = -i_{r,1}/a > 0$, $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi'(u) > 0$ для любого конечного $u > 0$, а для вторых производных справедливо: если $\lambda > 2a$, то $\varphi''(0) = 0$; если $\lambda = 2a$, то $\varphi''(0) = 1/m^2$; если $a < \lambda < 2a$, то $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = \infty$, причем $\varphi''(u)$ остается интегрируемой в нуле функцией;

2) если $a = \lambda$, то: $i_{r,1} = 0$, $\varphi'(0) = 1/m > 0$, $\varphi''(0) = -1/m^2 < 0$ и аналитическое решение имеет простой вид $\varphi(u) = 1 - \exp(-u/m)$;

3) если $a > \lambda$, то: $i_{r,1} > 0$, $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) = \infty$ (причем $\varphi'(u)$ остается интегрируемой в нуле функцией), $\varphi'(u) > 0$ для любого конечного $u > 0$, $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = -\infty$ и $\varphi''(u) < 0$ для любого конечного $u > 0$.

Отсюда и из (1.103), в частности, следует практический вывод: если капитал компании полностью инвестируется в безрисковый актив, то даже если взносы отсутствуют (модель типа благотворительного фонда), ВНР $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$ и имеет экспоненциальное стремление к единице при больших u . (Точные формулы этого п. 1.7 для ВНР $\varphi(u)$, возможно, являются новыми в теории риска (по крайней мере формально), так как в целом I модель ни ранее (до работ [5], [6], [8]), ни в настоящее время другими авторами не изучалась, в том числе при $b \neq 0$ и $c = 0$ (см. здесь п. 1.6), а также при $b = c = 0$, как в разобранный выше случае.)

2. МОДЕЛЬ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРЕМИЯМИ И ИНВЕСТИРОВАНИЕМ КАПИТАЛА НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

2.1. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями

Для модели КЛ со стохастическими премиями, описанной в [15], [30] (см. также [2, разд. 9.5]), процесс риска в непрерывном времени имеет вид

$$R_t = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} C_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Здесь R_t – величина капитала страховой компании в момент времени t , а u – величина НК; первая сумма в правой части – совокупный страховой взнос к моменту времени t , $N_1(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ ($\mathbf{E}N_1(t) = \lambda_1 t$, $N_1(0) = 0$), определяющий для любого $t > 0$ число премий, внесенных клиентами страховой компании за временной промежуток $(0, t]$; C_1, C_2, \dots – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(y)$ ($G(0) = 0$, $\mathbf{E}C_1 = n < \infty$), которые определяют размеры премий и предполагаются независимыми от процесса $N_1(t)$ (C_i – взнос с номером i , случайный момент поступления которого и определяет момент i -го скачка процесса $N_1(t)$); вторая сумма – совокупные страховые выплаты – та же, что в (1.1). При этом (как и в [7], [9]) процессы суммарных премий и суммарных исков также предполагаются независимыми.

Замечание 15. Независимость процессов суммарных премий и суммарных исков является упрощающим предположением по сравнению с более естественным требованием (см., например, [2, разд. 9.5]): $N(t) \leq N_1(t)$ для любого $t \geq 0$, т.е. общее число исков не может превышать общего числа премий. Однако если считать, что до нулевого момента времени компания может иметь предысторию по накоплению премий и исков, то это требование можно заменить более слабым условием на ожидаемые количества исков в единицу времени: $\lambda \leq \lambda_1$ (это соотношение учитывается нами и в численных примерах для моделей страхования с исходным процессом риска (2.1)).

Для процесса риска (2.1) введем определение относительной нагрузки безопасности по аналогии с определением 1 для классической модели КЛ.

Определение 4. *Нагрузкой безопасности для процесса риска (2.1) называется величина*

$$\rho_2 = (\lambda_1 n - \lambda m) / (\lambda m) = \lambda_1 n / (\lambda m) - 1, \tag{2.2}$$

а условие

$$\lambda_1 n - \lambda m > 0 \tag{2.3}$$

отвечает положительности чистого ожидаемого дохода.

Если размеры исков и премий экспоненциально распределены,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \quad G(y) = 1 - \exp(-y/n), \quad m, n > 0, \quad x, y \geq 0, \tag{2.4}$$

то ВНР $\varphi(u)$ удовлетворяет на \mathbb{R}_+ интегральному уравнению (ИУ) вида

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(u) = \frac{\lambda}{m} \int_0^u \varphi(u-x) \exp(-x/m) dx + \frac{\lambda_1}{n} \int_0^\infty \varphi(u+y) \exp(-y/n) dy. \tag{2.5}$$

При выполнении условия (2.3) ВНР $\varphi(u)$, как положительное на \mathbb{R}_+ решение ИУ (2.5), не превосходящее единицы и стремящееся к единице при $u \rightarrow \infty$, дается аналитической формулой (см. [30], ср. с (1.7)):

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\lambda(n+m)}{n(\lambda+\lambda_1)} \exp\left(-\frac{\lambda_1 n - \lambda m}{mn(\lambda+\lambda_1)} u\right), \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Замечание 16. В модели КЛ со случайными премиями характеристическое уравнение, положительное решение R которого (если оно существует) обеспечивает мартингалность процесса $\exp(-RR_t)$ и возможность получения оценок для ВР, в том числе оценки типа (1.5), имеет вид (см. [30]–[32])

$$\lambda[\mathbf{E} \exp(RZ_i) - 1] + \lambda_1[\mathbf{E} \exp(-RC_i) - 1] = 0;$$

эквивалентная запись этого уравнения приводит к равенству

$$\lambda \int_0^\infty \exp(Rx) dF(x) + \lambda_1 \int_0^\infty \exp(-Ry) dG(y) = \lambda + \lambda_1$$

(ср. с (1.8) и (1.4) соответственно для классической модели КЛ).

2.2. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями и вложением постоянных долей капитала в рисковые и безрисковые активы (II модель)

Перейдем ко II модели с исходным процессом риска (2.1) и при тех же предположениях относительно структуры инвестиционного портфеля, что и для I модели (см. п. 1.2).

Уравнение для ВНР $\varphi(u)$ результирующего процесса риска (1.14) для II модели было получено в [15]. С учетом обозначений (1.15) оно имеет вид ($u \in \mathbb{R}_+$)

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) = \lambda \left[\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-x) dF(x) \right] + \lambda_1 \left[\varphi(u) - \int_0^\infty \varphi(u+y) dG(y) \right]. \tag{2.7}$$

При этом в особой точке $u = 0$ должно выполняться предельное нелокальное условие, обеспечивающее вырождение ИДУ (2.7) при $u \rightarrow +0$:

$$(\lambda + \lambda_1) \lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(y) dG(y); \tag{2.8}$$

это условие, как и локальное предельное условие (1.18) для ИДУ (1.17), есть следствие ограниченности в нуле функции $\varphi(u)$, влекущее в свою очередь предельные соотношения $\lim_{u \rightarrow +0} [u\varphi'(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2\varphi''(u)] = 0$, и самого ИДУ (2.7) (насколько нам известно, это условие для (2.7) в [15] не приводится и не обсуждается).

Напомним, что благодаря замене параметров (1.15) здесь, как и для I модели, соответствующее решение $\varphi(u)$ ИДУ (2.7) трактуем как ВНР страховой компании за бесконечное время при вложении всего текущего капитала (ТК) в рисковый актив — акции с ожидаемой доходностью a и волатильностью b .

*2.3. Основная сингулярная задача для ИДУ и результаты ее исследования
(II модель при экспоненциальных распределениях размеров исков и размеров премий
и вложении капитала в рисковый актив)*

Учитывая (2.7), (2.8) и вводя предположение об экспоненциальных распределениях размеров премий и размеров исков, т.е. справедливости (2.4), для ВНР $\varphi(u)$ получаем на \mathbb{R}_+ сингулярную нелокальную задачу с ограничениями (см. [7]):

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)] = 0, \quad u > 0, \quad (2.9)$$

$$\left| \lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) \right| < \infty, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\varphi'(u)] = 0, \quad (2.10)$$

$$(\lambda + \lambda_1) \lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = \lambda_1(J_{1,n}\varphi)(0) = \frac{\lambda_1}{n} \int_0^\infty \varphi(y) \exp(-y/n) dy, \quad (2.11)$$

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}_+, \quad (2.12)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi'(u) = 0. \quad (2.13)$$

Здесь, если не оговорено особо, $a, b^2, \lambda, \lambda_1, m, n$ — действительные положительные числа, J_m — вольтерров интегральный оператор (1.23), а $(J_{1,n}\varphi)(u)$ — невольтерров интегральный оператор ($u \in \mathbb{R}_+, J_{1,n} : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$):

$$(J_{1,n}\varphi)(u) = \frac{1}{n} \int_0^\infty \varphi(u+y) \exp(-y/n) dy = \frac{1}{n} \int_0^\infty \varphi(s) \exp(-(s-u)/n) ds. \quad (2.14)$$

Второе равенство в (2.14) можно рассматривать как преобразование невольтеррова оператора с опережающим аргументом в сингулярный вольтерров оператор. (По поводу определений (не)вольтерровых операторов для классов систем функционально-дифференциальных уравнений (включающих ИДУ как частный случай), в том числе нелинейных и сингулярных, см., например, [33]–[35] и цитированную там литературу.) Во всяком случае, суммарный оператор $J_{m,n}$, определенный равенством $(J_{m,n}\varphi)(u) = \lambda(J_m\varphi)(u) + \lambda_1(J_{1,n}\varphi)(u)$, есть сингулярный невольтерров оператор на $C[0, \infty)$.

ИДУ (2.9) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) = 0$, удовлетворяющее условиям (2.10)–(2.12). Нетривиальное решение выделяется требованием (2.13).

Предельные условия (2.10) и нелокальное соотношение (2.11) влекут выполнение условия $\lim_{u \rightarrow +0} [u^2\varphi''(u)] = 0$, обеспечивая вырождение ИДУ (2.9) при $u \rightarrow +0$: решение $\varphi(u)$ сингулярной линейной задачи (2.9)–(2.13), если таковое существует, должно удовлетворять ИДУ (2.9) вплоть до особой точки $u = 0$.

Следующее замечание является аналогом замечания 7.

Замечание 17. Как и для I модели, в [10] и [11] доказано вероятностными методами, что если при фиксированных положительных параметрах в ИДУ (2.9) для него существует решение $\varphi(u)$, удовлетворяющее условиям (2.12), (2.13), и выполнено неравенство (1.16), то $\varphi(u)$ действительно определяет ВНР и является неубывающей на \mathbb{R}_+ функцией. Такой подход к обоснованию модели определяет и саму априорную постановку задачи (2.9)–(2.13), где предельные условия в нуле порождаются: требованием (2.12), наличием в нуле особенности и самим ИДУ; кроме того, как будет видно из дальнейшего, выполнение неравенства (1.16) одновременно является необходимым и достаточным условием существования решения задачи (2.9)–(2.13).

В общем случае предельные условия (2.10) позволяют производной от решения быть неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией. Заметим также, что к нелокальному условию (2.11) приводит наличие в (2.9) невольтеррова интегрального оператора.

Далее мы формулируем основные следствия из результатов [7] в переработанном, дополненном и уточненном варианте (см. [9]), используя также подход (см. [9]) к более компактному изложению материала (допущенные в [7] неточности и опечатки в [9] и здесь исправлены).

2.3.1. Единственность решения и сопутствующая сингулярная нелокальная задача для ОДУ. Перепишем задачу (2.9)–(2.13) в эквивалентном параметризованном виде:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + a u\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)] = 0, \quad u > 0, \tag{2.15}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\varphi'(u)] = 0, \tag{2.16}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda + \lambda_1)} \int_0^\infty \varphi(y) \exp(-y/n) dy, \tag{2.17}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi'(u) = 0, \tag{2.18}$$

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}_+. \tag{2.19}$$

Здесь C_0 – параметр, удовлетворяющий нелокальному условию (2.17).

В [7], [9] доказана следующая лемма, которая является аналогом леммы 1.

Лемма 7. Пусть в ИДУ (2.15) все параметры – фиксированные действительные числа, где $b \neq 0$, $\lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$, $m > 0$, $n > 0$, $a \in \mathbb{R}$, и пусть существует решение $\varphi(u) = \varphi(u, C_0)$ сингулярной нелокальной задачи (2.15)–(2.18) (без ограничений на область значений решения) для некоторого $C_0 \in \mathbb{R}$.

Тогда такое C_0 единственно, $0 < C_0 < 1$, функция $\varphi(u)$ удовлетворяет требованиям (2.19) и является единственным решением сингулярной нелокальной задачи с ограничениями (2.15)–(2.19).

Замечание 18. В лемме 7, в отличие от лемм 1 и 3, отсутствует утверждение о положительности $\varphi'(u)$ для любого конечного $u > 0$. В леммах 1 и 3 доказательство этого утверждения связано с постановками более простых задач (1.24)–(1.27) и (1.62)–(1.65) соответственно: из условия (1.25) (условия (1.63)) априори следует, что $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) > 0$ и $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) > 0$ (соответственно, $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = 0$ и $\varphi'(u) > 0$, по крайней мере, при малых $u > 0$); это позволяет доказать от противного, что $\varphi'(u)$ не может поменять знак с ростом $u > 0$. Из постановки более сложной нелокальной задачи (2.15)–(2.19), где $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0 > 0$, априорная информация о поведении производной вблизи нуля не следует, и подобное утверждение не доказано в [7], [9] и данной работе (см. также замечание 17 по поводу поведения ВНР).

Далее, ИДУ (2.15) второго порядка можно свести к ОДУ четвертого порядка, что, как и для I модели, является важным и упрощающим для исследований обстоятельством. Для этого достаточно осуществить в (2.15) два дополнительных дифференцирования и, учитывая наряду с (1.28) равенство

$$(J_{1,n}\varphi)'(u) = \frac{1}{n} \left(\int_0^\infty \varphi(u+y) \exp(-y/n) dx \right)' = [(J_{1,n}\varphi)(u) - \varphi(u)]/n, \tag{2.20}$$

убрать в полученном ИДУ четвертого порядка интегралы $(J_m\varphi)(u)$ и $(J_{1,n}\varphi)(u)$, используя исходное ИДУ (2.15) и промежуточное вспомогательное ИДУ третьего порядка (подробнее см. [7]).

В результате справедлива приведенная ниже лемма 8, где введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(2 + a/b^2), & a_2 &= (n - m)/(mn), & a_3 &= 2[1 + (2a - \lambda - \lambda_1)/b^2], \\ a_4 &= 2(1 + a/b^2)a_2, & a_5 &= -1/(mn), & a_6 &= -2i_{r,II}/(b^2mn), & a_7 &= -2a/(b^2mn). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь величина $i_{r,II}$ определяет ФР (фактор риска) для II модели:

$$i_{r,II} = a(m - n) + \lambda_1 n - \lambda t. \tag{2.22}$$

Лемма 8. Пусть для параметров $a, b^2, \lambda, \lambda_1, m, n$ в ИДУ (2.15) выполнены условия леммы 7. Тогда сингулярная интегродифференциальная нелокальная задача (2.15)–(2.18) (без ограничений) эквивалентна сингулярной дифференциальной нелокальной задаче, определенной на \mathbb{R}_+ :

$$u^2\varphi''''(u) + (a_1 + a_2u)u\varphi'''(u) + (a_3 + a_4u + a_5u^2)\varphi''(u) + (a_6 + a_7u)\varphi'(u) = 0, \tag{2.23}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\varphi'(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2\varphi''(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^3\varphi'''(u)] = 0, \tag{2.24}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda + \lambda_1)} \int_0^{\infty} \varphi(y) \exp(-y/n) dy; \quad (2.25)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi''(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'''(u) = 0. \quad (2.26)$$

Здесь величины $a_j, j = 1, \dots, 7$, определены в (2.21), C_0 – параметр, удовлетворяющий нелокальному условию (2.25).

2.3.2. Вспомогательная сингулярная краевая задача для ОДУ третьего порядка и ее исследование. Понижив порядок ОДУ (2.23), полагая $\varphi'(u) = \psi(u)$, получим для $\psi(u)$ вспомогательную сингулярную задачу, определенную на \mathbb{R}_+ и подлежащую подробному изучению:

$$u^3 \psi'''(u) + (a_1 + a_2 u) u^2 \psi''(u) + (a_3 + a_4 u + a_5 u^2) u \psi'(u) + (a_6 u + a_7 u^2) \psi(u) = 0, \quad (2.27)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} [u \psi(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2 \psi'(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^3 \psi''(u)] = 0, \quad (2.28)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi'(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi''(u) = 0. \quad (2.29)$$

ОДУ (2.27) обладает регулярной (слабой) особенностью при $u \rightarrow +0$ и иррегулярной (сильной) особенностью ранга 1 при $u \rightarrow \infty$. Чтобы разобраться со вспомогательной сингулярной задачей (2.27)–(2.29), прежде всего следует изучить локальные сингулярные ЗК (2.27), (2.28) и (2.27), (2.29) в окрестностях особых точек. Для такого изучения используются результаты из [24], [25] (подробнее см. [7]). Как будет видно из исследования особых точек ОДУ (2.27) и указанных сингулярных ЗК в их окрестностях, поставленная задача (2.27)–(2.29) является линейной двухточечной сингулярной КрЗ для ОДУ, в отличие от более простых задач разд. 1, которые сводятся к сингулярным ЗК для ОДУ с условиями нормировки решения на бесконечности (см. замечание 8).

Сингулярная КрЗ (2.27)–(2.29) всегда имеет тривиальное решение $\psi \equiv 0$. Нас будет интересовать существование нетривиального решения этой задачи, выделяемого условием нормировки, приведенным ниже в лемме 9.

Лемма 9. Пусть выполнены условия леммы 8, и пусть $\psi(u)$ – нетривиальное решение вспомогательной сингулярной КрЗ (2.27)–(2.29), причем $\psi(u) \in L_1(0, \infty)$ и нормировано требованием

$$\int_0^{\infty} [1 + (\lambda_1/\lambda) \exp(-s/n)] \psi(s) ds = 1. \quad (2.30)$$

Тогда функция $\varphi(u)$, определенная равенством

$$\varphi(u) = (\lambda_1/\lambda) \int_0^{\infty} \psi(s) \exp(-s/n) ds + \int_0^u \psi(s) ds, \quad u \geq 0, \quad (2.31)$$

является решением сингулярной нелокальной задачи (2.23)–(2.26) для ОДУ u , как следствие, эквивалентной сингулярной нелокальной задачи с ограничениями (2.15)–(2.19) для ИДУ. В частности, справедливо равенство

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0 = (\lambda_1/\lambda) \int_0^{\infty} \psi(s) \exp(-s/n) ds.$$

В результате достаточно доказать существование нетривиального решения $\psi(u)$ вспомогательной линейной сингулярной КрЗ (2.27)–(2.29), удовлетворяющего условиям леммы 9, и найти это решение.

Для этих целей надо изучить особые точки ОДУ (2.27) и свести сингулярную КрЗ (2.27)–(2.29) к эквивалентной КрЗ на конечном интервале без особенностей. Для переноса предельных граничных условий из особых точек используются результаты теории устойчивых начальных многообразий решений, или многообразий условной устойчивости по Ляпунову (см., например, [36]–[38]), причем учитывается понятие допустимых граничных условий в особых точках типа полюса (см., например, [39], [40]).

2.3.2.A. *Перенос предельных условий из особой точки $u = 0$.* Рассмотрим сингулярную ЗК (2.27), (2.28) при тех же ограничениях на параметры $a, b^2, \lambda, \lambda_1, t, n$ в формулах (2.21), что и в лемме 7. Нетрудно видеть, что ОДУ (2.27) обладает регулярной особенностью при $u = 0$ с характеристическими показателями $\mu_j, j = 0, 1, 2$:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = -1/2 - a/b^2 + \sqrt{(1/2 + a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1 - a)/b^2}, \quad (2.32)$$

$$\mu_2 = -1/2 - a/b^2 - \sqrt{(1/2 + a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1 - a)/b^2}; \quad (2.33)$$

из формул для μ_1, μ_2 также следуют равенства

$$\mu_1 + 1 = 1/2 - a/b^2 + \sqrt{(1/2 - a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1)/b^2},$$

$$\mu_2 + 1 = 1/2 - a/b^2 - \sqrt{(1/2 - a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1)/b^2}.$$

В результате, при указанных ограничениях на параметры, справедливы неравенства $\mu_1 > -1, \mu_2 < -1$, откуда, с учетом характеристического показателя $\mu_0 = 0$, получаем, что сингулярная ЗК (2.27), (2.28) обладает двухпараметрическим семейством решений. Значения этих решений порождают в трехмерном фазовом пространстве ОДУ (2.27) (переменных ψ, ψ', ψ'') двумерное подпространство – плоскость, проходящую через начало координат и зависящую от u как от параметра (см. далее лемму 10). Поведение решений указанного семейства внутри этого подпространства (в окрестности особой точки $u = 0$) зависит от знака и величины показателя μ_1 , что, в свою очередь, зависит от соотношения параметров в ОДУ (2.27), а именно:

1) при выполнении неравенства $a < \lambda + \lambda_1$ будет $\mu_1 > 0$, причем при выполнении более сильного требования $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$ будет $\mu_1 > 1$, а при выполнении неравенства $\lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a$ справедливо $0 < \mu_1 \leq 1$, где равенство единице достигается при $\lambda + \lambda_1 = b^2 + 2a$, когда характеристический показатель $\mu_1 = 1$ (ввиду его целочисленности) отвечает решению ОДУ (2.27) с неограниченной в нуле производной – ведущему себя как $O(u \ln(u))$ при $u \rightarrow +0$;

2) при выполнении ограничений $a \geq \lambda + \lambda_1 > 0$ получаем $-1 < \mu_1 \leq 0$, где равенство нулю для μ_1 достигается при $a = \lambda + \lambda_1$, когда характеристический показатель $\mu_1 = 0$ отвечает неограниченно в нуле решению ОДУ (2.27), ведущему себя как $O(\ln(u))$ при $u \rightarrow +0$.

Замечание 19. При выполнении неравенства $a < \lambda + \lambda_1$ предельные условия (2.28) более точно можно записать в виде

$$\lim_{u \rightarrow +0} \psi(u) = D_1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\psi'(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2\psi''(u)] = 0, \quad (2.34)$$

где D_1 – параметр, значение которого подлежит определению, причем для искомого решения должно быть $D_1 \geq 0$. Более того, при выполнении дополнительного требования $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, когда становится конечной величина $\lim_{u \rightarrow +0} \psi'(u)$, предельные условия (2.34) можно заменить еще более сильными требованиями, следующими из ОДУ (2.27):

$$\lim_{u \rightarrow +0} \psi(u) = D_1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \psi'(u) = -D_1 a_6 / a_3, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\psi''(u)] = 0. \quad (2.35)$$

Однако достаточно во всех случаях требовать выполнения более слабых условий (2.28), а условия (2.34) или (2.35) будут выполняться автоматически.

Замечание 20. В отличие от [9] и данной работы, случай возможных неположительных значений a в [7] не рассматривался. При экономической интерпретации изучаемой модели (как модели страхования с инвестициями) наиболее естественными являются требования $0 < a < \lambda + \lambda_1$. Однако не исключаются модели, для которых могут оказаться востребованными случаи выполнения других неравенств (см., в частности, здесь замечание 5 для I модели).

Далее, используя результаты теории переноса граничных условий из особых точек для систем линейных ОДУ и результаты по сингулярным ЗК для систем нелинейных ОДУ, получаем справедливость следующего утверждения (его несложное доказательство см. в [7]).

Лемма 10. Пусть в ОДУ (2.27) величины $a_j, j = \overline{1, 7}$, определены по формулам (2.21), где все параметры $a, b^2, \lambda, \lambda_1, t, n$ удовлетворяют условиям леммы 7. Тогда предельные граничные условия (2.28) для решений ОДУ (2.27) для достаточно малых $u > 0$ эквивалентны линейному соотношению

$$u^2\psi''(u) = \alpha(u)u\psi'(u) + \beta(u)\psi(u), \quad 0 < u \leq u_0. \quad (2.36)$$

Здесь пара функций $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ есть решение сингулярной нелинейной ЗК:

$$u\alpha' = (1 - a_1 - a_2u)\alpha - \alpha^2 - \beta - a_3 - a_4u - a_5u^2, \quad u > 0, \quad (2.37)$$

$$u\beta' = (2 - a_1 - a_2u)\beta - \alpha\beta - a_6u - a_7u^2, \quad u > 0, \quad (2.38)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \alpha(u) = \alpha_0 = \mu_1 - 1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \beta(u) = 0. \quad (2.39)$$

Решение $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ сингулярной ЗК (2.37)–(2.39) для достаточно малых $u > 0$ существует, единственно и является голоморфной функцией в точке $u = 0$:

$$\alpha(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k, \quad \beta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u^k, \quad |u| \leq u_0, \quad u_0 > 0. \quad (2.40)$$

Здесь α_0 определено в (2.39) (где μ_1 определено в (2.32)), а коэффициенты α_k, β_k при $k \geq 1$ определяют из (2.37), (2.38) формальной подстановкой разложений (2.40), что приводит к рекуррентным формулам:

$$\beta_1 = -\frac{a_6}{\alpha_0 + a_1 - 1}, \quad \alpha_1 = -\frac{\beta_1 + a_2\alpha_0 + a_4}{2\alpha_0 + a_1}, \quad (2.41)$$

$$\beta_2 = -\frac{a_7 + a_2\beta_1 + \alpha_1\beta_1}{\alpha_0 + a_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{\beta_2 + \alpha_1^2 + a_2\alpha_1 + a_5}{2\alpha_0 + a_1 + 1}, \quad (2.42)$$

$$\beta_k = -\frac{a_2\beta_{k-1} + \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l\beta_{k-l}}{\alpha_0 + a_1 + k - 2}, \quad \alpha_k = -\frac{\beta_k + \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l\alpha_{k-l}}{2\alpha_0 + a_1 + k - 1}, \quad k = 3, 4, \dots \quad (2.43)$$

В результате перенос граничных условий (2.28) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u = u_0 > 0$ осуществляется с помощью соотношения (2.36): в точке $u = u_0$ имеем граничное условие

$$u_0^2 \psi''(u_0) = \alpha(u_0)u_0\psi'(u_0) + \beta(u_0)\psi(u_0), \quad (2.44)$$

где приближенные значения $\alpha(u_0)$ и $\beta(u_0)$ с заданной точностью можно находить с помощью разложений (2.40)–(2.43). При этом в окрестности особой точки $u = 0$ условие (2.44) устойчиво переносится слева направо – в направлении от этой особой точки (см. [7]; подробнее см. изучение этих вопросов в [41] для достаточно общих систем линейных ОДУ с особенностями типа полюса в граничных точках).

Замечание 21. Дополним замечание 20: в отличие от [9] и данной работы, в [7] не было замечено, что утверждение леммы 10 остается справедливым и при $a \leq 0$.

Для полноты изложения, учитывая результаты общей теории линейных ОДУ с регулярной (слабой) особой точкой (см., например, [20, §2]), зафиксируем следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть выполнены предположения леммы 10. Тогда для двухпараметрического семейства решений $\psi(u, q_0, q_1)$ сингулярной ЗК (2.27), (2.28) в общем случае справедливо представление

$$\psi(u, q_0, q_1) = q_0\{1 + \psi_1(u) + Au^{\mu_1} \ln(u)[1 + \psi_2(u)]\} + q_1u^{\mu_1}[1 + \psi_2(u)], \quad (2.45)$$

где величина μ_1 определена в (2.32), q_0, q_1 – произвольные постоянные, $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ – голоморфные в точке $u = 0$ функции, $\psi_j(0) = 0, j = 1, 2$, а постоянная A зависит от параметров ОДУ (2.27), причем $A = 0$, если μ_1 – нецелое число.

Значения решений (2.45) порождают в фазовом пространстве системы (2.27) двумерное подпространство (плоскость в \mathbb{R}^3), зависящее от u как от параметра; оно задается в виде соотношения (2.36), где $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ описаны в лемме 10. Тогда разложения в нуле функций $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ в (2.45) могут быть получены, в частности, из ОДУ (2.36) с учетом разложений (2.40)–(2.43).

Отметим: вся плоскость (2.36) как целое описывается с помощью голоморфных в нуле функций, что удобно для ее задания в близкой регулярной точке $u_0 > 0$ в качестве граничного условия (2.44), в то время как отдельные решения, значения которых порождают эту плоскость, имеют более сложное поведение – содержат дробные (возможно, иррациональные) степени u

и/или логарифмические функции от u (см. (2.45)). Это обстоятельство, важное для практических вычислений, является общим в теории переноса граничных условий из особых точек для систем линейных ОДУ.

2.3.2.Б. Перенос предельных условий из особой точки $u = \infty$. Рассмотрим теперь сингулярную ЗК (2.27), (2.29) с предельными начальными условиями на бесконечности, которую удобно переписать в эквивалентном виде:

$$\psi'''(u) + \left(a_2 + \frac{a_1}{u}\right)\psi''(u) + \left(a_5 + \frac{a_4}{u} + \frac{a_3}{u^2}\right)\psi'(u) + \left(\frac{a_7}{u} + \frac{a_6}{u^2}\right)\psi(u) = 0, \tag{2.46}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi'(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi''(u) = 0. \tag{2.47}$$

При $u \rightarrow \infty$ ОДУ (2.46) обладает иррегулярной особенностью ранга 1, и его характеристические показатели, отвечающие за поведение решений при больших u , есть $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = -1/m < 0$, $\nu_2 = 1/n > 0$.

Чтобы полностью разобраться с поведением решений ОДУ (2.46) при $u \rightarrow \infty$, надо найти первую поправку по теории возмущений (при больших u) к показателю $\nu_0 = 0$, что подробно осуществлено в [7] с учетом результатов [24], [25] (см. здесь также замечание 14: к ОДУ (2.46) можно применить тот же упрощенный подход для получения указанной поправки, что и описанный в этом замечании подход к ОДУ (1.87)). Как следствие этого изучения и использования результатов общей теории линейных ОДУ с иррегулярными особыми точками справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. Пусть в ОДУ (2.27) величины $a_j, j = 1, \dots, 7$, определены по формулам (2.21), где все параметры $a, b, n, t, \lambda, \lambda_1$ – фиксированные действительные числа, причем $a > 0, b^2 > 0, n > 0, t > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Тогда сингулярная ЗК (2.27), (2.29) обладает двухпараметрическим семейством решений $\psi(u, p_1, p_2)$, причем при больших u справедливо представление

$$\psi(u, p_1, p_2) = p_1 u^{-2a/b^2} [1 + \xi_1(u)/u] + p_2 u^{-2} \exp(-u/t) [1 + \xi_2(u)/u]. \tag{2.48}$$

Здесь p_1, p_2 – произвольные постоянные, а функции $\xi_j(u), j = 1, 2$, имеют конечные пределы при $u \rightarrow \infty$ и при больших u представимы асимптотическими рядами

$$\xi_j(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(j)} / u^k, \quad j = 1, 2, \tag{2.49}$$

где коэффициенты этих рядов могут быть получены из ОДУ (2.27) формальной подстановкой всех разложений; все решения семейства $\psi(u, p_1, p_2)$ тогда и только тогда интегрируемы на бесконечности, когда выполняется неравенство (1.16).

Снова используя результаты теории переноса граничных условий из особых точек для систем линейных ОДУ и результаты по сингулярным ЗК для систем нелинейных ОДУ, получаем справедливость следующего утверждения (доказательство см. в [7]).

Лемма 12. Пусть выполнены предположения леммы 11. Тогда предельные граничные условия (2.29) для решений ОДУ (2.27) для достаточно больших u эквивалентны линейному соотношению

$$\psi''(u) = \gamma(u)\psi'(u) + \kappa(u)\psi(u), \quad u \geq u_{\infty}. \tag{2.50}$$

Здесь пара функций $\{\gamma(u), \kappa(u)\}$ есть решение сингулярной нелинейной ЗК на бесконечности:

$$\gamma' = -(a_2 + a_1/u)\gamma - \gamma^2 - \kappa - a_5 - a_4/u - a_3/u^2, \quad u \geq u_{\infty}, \tag{2.51}$$

$$\kappa' = -(a_2 + a_1/u)\kappa - \gamma\kappa - a_7/u - a_6/u^2, \quad u \geq u_{\infty}, \tag{2.52}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \gamma(u) = \gamma_0 = -1/m, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \kappa(u) = 0. \tag{2.53}$$

Решение $\{\gamma(u), \kappa(u)\}$ сингулярной ЗК (2.51)–(2.53) существует для достаточно больших u , единственно и представимо асимптотическими рядами:

$$\gamma(u) \sim \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k / u^k, \quad \kappa(u) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k / u^k, \quad u \gg 1. \tag{2.54}$$

Здесь γ_0 определено в (2.53), а коэффициенты γ_k, κ_k при $k \geq 1$ определяются из (2.51), (2.52) формальной подстановкой разложений (2.54), что приводит к рекуррентным формулам:

$$\kappa_1 = -a_7/(a_2 + \gamma_0), \quad \gamma_1 = -(a_1\gamma_0 + \kappa_1 + a_4)/(a_2 + 2\gamma_0), \quad (2.55)$$

$$\kappa_2 = [\kappa_1(1 - a_1 - \gamma_1) - a_6]/(a_2 + \gamma_0), \quad \gamma_2 = [\gamma_1(1 - a_1 - \gamma_1) - \kappa_2 - a_3]/(a_2 + 2\gamma_0), \quad (2.56)$$

$$\kappa_k = \left[(k-1-a_1)\kappa_{k-1} - \sum_{l=1}^{k-1} \gamma_l \kappa_{k-l} \right] / (a_2 + \gamma_0), \quad (2.57)$$

$$\gamma_k = \left[\gamma_{k-1}(k-1-a_1) - \kappa_k - \sum_{l=1}^{k-1} \gamma_l \gamma_{k-l} \right] / (a_2 + 2\gamma_0), \quad k = 3, 4, \dots \quad (2.58)$$

Тогда, в частности, представление (2.48), (2.49) для двухпараметрического семейства $\psi(u, p_1, p_2)$ решений сингулярной КрЗ (2.46), (2.47) может быть получено из соотношения (2.50) формальной подстановкой всех разложений.

В результате перенос граничных условий (2.29) из бесконечности в конечную точку $u = u_\infty \gg 1$ осуществляется с помощью соотношения (2.50): в точке $u = u_\infty$, имеем

$$\psi''(u_\infty) = \gamma(u_\infty)\psi'(u_\infty) + \kappa(u_\infty)\psi(u_\infty), \quad (2.59)$$

где приближенные значения $\gamma(u_\infty), \kappa(u_\infty)$ могут быть найдены с помощью разложений (2.55)–(2.58). При больших u условие (2.59) устойчиво переносится справа налево – в направлении от особой точки $u = \infty$.

2.3.2.В. Эквивалентная однородная регулярная КрЗ с недостающим числом граничных условий, существование нетривиального решения и его свойства.

Лемма 13. Пусть в ОДУ (2.27) коэффициенты $a_j, j = 1, \dots, 7$, определены по формулам (2.21), где все величины $a, b^2, n, t, \lambda, \lambda_1$ – положительные числа. Тогда вспомогательная сингулярная линейная КрЗ (2.27)–(2.29), определенная на \mathbb{R}_+ , эквивалентна однородной линейной КрЗ на конечном интервале $[u_0, u_\infty]$ без особенностей:

$$u^3 \psi''''(u) + (a_1 + a_2 u) u^2 \psi''(u) + (a_3 + a_4 u + a_5 u^2) u \psi'(u) + (a_6 u + a_7 u^2) \psi(u) = 0, \quad (2.60)$$

$$u_0 \leq u \leq u_\infty,$$

$$u_0^2 \psi''(u_0) = \alpha(u_0) u_0 \psi'(u_0) + \beta(u_0) \psi(u_0), \quad (2.61)$$

$$\psi''(u_\infty) = \gamma(u_\infty) \psi'(u_\infty) + \kappa(u_\infty) \psi(u_\infty). \quad (2.62)$$

Здесь функции $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ определены в лемме 10, $\gamma(u)$ и $\kappa(u)$ – в лемме 12, а значения u_0 и u_∞ ($0 < u_0 \ll 1, u_\infty \gg 1$), вообще говоря, могут меняться в некоторых диапазонах, зависящих от параметров задачи (подвижные границы); однородная двухточечная КрЗ (2.60)–(2.62) является недоопределенной по числу граничных условий (ОДУ третьего порядка с двумя разделенными краевыми условиями) и всегда имеет нетривиальное решение.

Существование множества – континуума нетривиальных решений КрЗ (2.60)–(2.62) является следствием пересечения двух плоскостей, порожденных в фазовом пространстве $\{\psi, \psi'', \psi'''\}$ ОДУ (2.60) условиями (2.61) и (2.62) соответственно и проходящих через начало координат этого трехмерного пространства (подробнее см. [7]).

В результате, учитывая результаты пп. 2.3.1, 2.3.2. А, 2.3.2.Б, получаем, что справедлива

Теорема 3. Пусть для ОДУ (2.27) выполнены условия леммы 13, где значения положительных параметров $a, b^2, n, t, \lambda, \lambda_1$ фиксированы и выполняется условие (1.16) надежности портфеля активов.

Тогда сингулярная КрЗ (2.27)–(2.29) имеет, и притом единственное (с точностью до множителя нормировки), нетривиальное решение $\psi(u), \psi(u) \in L_1(0, \infty)$, и для него справедливы следующие утверждения:

1) если выполнено условие $\lambda + \lambda_1 > a$, то существует конечный $\lim_{u \rightarrow +0} \psi(u) = D_1$; при этом: а) $|\lim_{u \rightarrow +0} \psi'(u)| < \infty$ тогда и только тогда, когда выполнено дополнительное требование $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, причем, более точно, справедливо

$$\lim_{u \rightarrow +0} \psi'(u) = D_1 D_2 = -D_1 i_{r, II} / [mn(\lambda + \lambda_1 - b^2 - 2a)], \quad (2.63)$$

где величина $i_{r, II}$ определена в (2.22), так что при $D_1 > 0$ будет: $D_2 \leq 0$, если $i_{r, II} \geq 0$, и $D_2 > 0$, если $i_{r, II} < 0$; б) при выполнении неравенства $\lambda + \lambda_1 \leq b^2 + 2a$ производная $\psi'(u)$ становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией;

2) если выполнено неравенство $a \geq \lambda + \lambda_1$, то $\psi(u)$ не ограничена при $u \rightarrow +0$, но остается интегрируемой в нуле функцией;

3) поведение $\psi(u)$ при больших u следует из леммы 11, а именно, справедливо асимптотическое представление в главном

$$\psi(u) = q_1 u^{-2a/b^2} [1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty, \quad (2.64)$$

где $q_1 \neq 0$, и, в силу (1.16), $\psi(u)$ интегрируема при $u \rightarrow \infty$.

Замечание 22. При $0 < a < \lambda + \lambda_1$ для ФР (2.22) получаем формальные условия выполнения неравенств: 1) $i_{r, II} \geq 0$ при $m \geq n$ и $\lambda_1 n \geq \lambda m$ или при $n \geq m$ и $\lambda n \leq \lambda_1 m$; 2) $i_{r, II} < 0$ при $n > m$ и $\lambda m > \lambda_1 n$ или при $m > n$ и $\lambda n > \lambda_1 m$.

2.3.3. Существование, единственность и поведение решения исходной сингулярной нелокальной задачи с ограничениями для ИДУ. Учитывая леммы 7–9, теорему 3 и замечание 17, получаем справедливость основной теоремы.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения теоремы 3, и пусть $\psi(u)$ – нетривиальное решение вспомогательной сингулярной КрЗ (2.27)–(2.29) для ОДУ, нормированное требованием (2.30). Тогда:

1) функция $\varphi(u)$, определенная равенством

$$\varphi(u) = (\lambda_1/\lambda) \int_0^\infty \psi(s) \exp(-s/n) ds + \int_0^u \psi(s) ds, \quad u \geq 0, \quad (2.65)$$

есть единственное решение сингулярной нелокальной задачи с ограничениями (2.9)–(2.13) для ИДУ и является неубывающей на \mathbb{R}_+ функцией;

2) при $u \rightarrow +0$ поведение производных решения $\psi(u) = \varphi'(u)$ и $\psi''(u) = \varphi''(u)$ следует из утверждений 1) и 2) теоремы 3 и зависит от соотношений между параметрами;

3) при больших u для решения $\varphi(u)$ справедливо представление

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-2a/b^2} [1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty, \quad (2.66)$$

где $K > 0$ (постоянная K не может быть найдена методами локального анализа);

4) если $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$ и $i_{r, II} = a(m - n) + \lambda_1 n - \lambda m < 0$, то $\varphi'(u)$ достигает положительного максимума в некоторой точке $\tilde{u} > 0$, а функция-решение $\varphi(u)$ имеет в ней перегиб.

Отметим здесь, что при выполнении условия $0 < a < \lambda + \lambda_1$ и положительной нагрузке безопасности, т.е. выполнении неравенства (2.3), условие $i_{r, II} > 0$ всегда выполняется при $m \geq n$. Понятие ФР важно при нарушении неравенства (2.3), когда в модели без инвестиций $\varphi(u) \equiv 0$. Во II модели наиболее рискованная ситуация возникает, когда $i_{r, II} < 0$ и $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, а значения НК малы. (При $n \rightarrow 0$ и $\lambda_1 n \rightarrow c$ будет $i_{r, II} \rightarrow i_{r, I}$, где $i_{r, I}$ – ФР для I модели, определенный в (1.36).)

2.3.4. Об алгоритмах численного нахождения решения. Как следует из приведенных выше утверждений, основным элементом решения исходной сингулярной нелокальной задачи с ограничениями (2.9)–(2.13) для ИДУ является нахождение нетривиальных решений вспомогательной однородной КрЗ (2.60)–(2.62) для ОДУ, определенной на конечном отрезке $[u_0, u_\infty]$ без особенностей и с недостающим числом граничных условий.

Для решения линейных КрЗ на конечном интервале без особенностей, как хорошо известно, эффективными являются методы дифференциальной прогонки. Для нахождения нетривиальных решений КрЗ (2.60)–(2.62) важны результаты из [41], где наряду с кратким обзором вариантов дифференциальной прогонки исследуются вопросы устойчивости вычислений в окрестностях особых точек при решении КрЗ (в том числе спектральных), полученных из сингулярных КрЗ переносом граничных условий из особых точек. В частности, КрЗ (2.60)–(2.62) получена из сингулярной КрЗ (2.27)–(2.29) коротко описанными выше методами локального переноса граничных условий из особых точек, а для нахождения ее нетривиальных решений важны приемы из [41], применяемые для устойчивого нахождения собственных функций в спектральных задачах. Отличие здесь состоит в том, что, насколько нам известно, до [7] такие приемы не применялись для решения однородных КрЗ с недостающим числом краевых условий.

В [7] предложены и реализованы экономичные способы решения КрЗ (2.60)–(2.62) по числу уравнений прогонки и числу арифметических действий, на чем здесь подробно останавливаться не будем. Отметим только, что один из алгоритмов основан на сочетании двух вариантов глобально устойчивого метода ортогональной дифференциальной прогонки – варианта прогонки из [42] и ее модификации, предложенной в [43]; подобный подход может представлять интерес и для решения других КрЗ. Более экономичный вариант для решения данной задачи допускает замену при прямой прогонке уравнений метода из [42] на решение ЗК (2.37)–(2.39) и (2.51)–(2.53) (соответственно, слева направо от точки $u = u_0 > 0$ до точки $u = \hat{u}$ и справа налево от точки $u = u_\infty < \infty$ до точки $u = \hat{u}$, $u_0 < \hat{u} < u_\infty$) с сохранением при обратной прогонке метода из [43].

Далее, с учетом утверждения теоремы 4, после нахождения нетривиального решения $\psi(u)$ КрЗ (2.60)–(2.62), нормированного требованием (2.30), решение $\varphi(u)$ исходной нелокальной задачи с ограничениями (2.9)–(2.13) для ИДУ может быть найдено по формуле (2.65).

2.4. Аналитическое решение для модели КЛ со случайными премиями как решение первой вырожденной задачи для ИДУ ($a = b = 0$)

При $a = b = 0$ ИДУ (2.9) вырождается в ИУ (2.5), которое получено и исследовано в [30]: при положительной нагрузке безопасности (2.2), т.е. выполнении условия (2.3), ВНР $\varphi(u)$, как положительное на \mathbb{R}_+ решение ИУ (2.5), не превосходящее единицы и стремящееся к единице при $u \rightarrow \infty$, выражается аналитической формулой (2.6) (см. также [2, разд. 9.5]).

При выполнении условия (2.3) функцию (2.6) нетрудно получить как аналитическое решение вырожденной задачи, к которой приводится основная задача (2.9)–(2.13) формальным переходом к пределу при $\{a, b\} \rightarrow 0$, а именно сингулярной нелокальной задачи для ИУ:

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(u) = \lambda(J_m\varphi)(u) + \lambda_1(J_{1,n}\varphi)(u), \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad (2.67)$$

$$\varphi(0) = C_0 = [\lambda_1/(\lambda + \lambda_1)](J_{1,n}\varphi)(0), \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = 1. \quad (2.68)$$

Эта задача эквивалентна сингулярной нелокальной задаче для ОДУ второго порядка:

$$\varphi''(u) = [(\lambda m - \lambda_1 n)/(m n (\lambda + \lambda_1))]\varphi'(u), \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad (2.69)$$

$$\varphi(0) = C_0 = [\lambda_1/(\lambda + \lambda_1)](J_{1,n}\varphi)(0), \quad (2.70)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi'(u) = 0. \quad (2.71)$$

Для решения задачи (2.69)–(2.71) при выполнении условия (2.3) получаем

$$C_0 = 1 - \lambda(n + m)/[n(\lambda + \lambda_1)], \quad 0 < C_0 < 1;$$

$$\varphi'(0) = D_1 = \lambda(n + m)(\lambda_1 n - \lambda m)/[m n^2 (\lambda + \lambda_1)^2] > 0, \quad (2.72)$$

$$\varphi''(0) = D_1 D_2 = -D_1(\lambda_1 n - \lambda m) / [m n (\lambda + \lambda_1)] < 0, \quad (2.73)$$

и справедлива формула (2.6) – аналитическое решение для модели КЛ со стохастическими премиями и положительной нагрузкой безопасности (ср. также (2.73) с (2.63)).

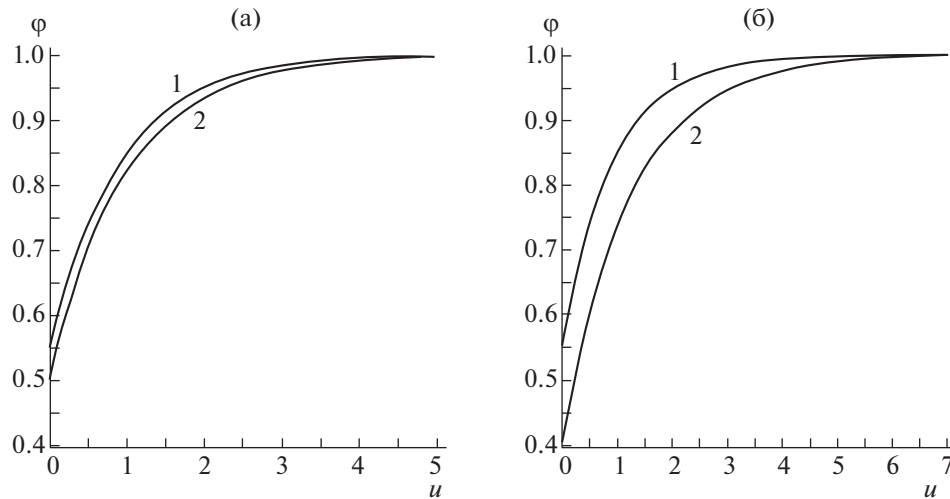
Замечание 23. Для задачи (2.69)–(2.71) (задачи (2.67), (2.68)) величина $\lambda_1 = \lambda m/n$ является критическим значением параметра бифуркации: при $\lambda_1 \leq \lambda m/n$ задача (2.69)–(2.71) (соответственно, задача (2.67), (2.68)) решений не имеет.

Следующее утверждение следует из сравнения формул (1.7) и (2.6).

Утверждение 1. Пусть параметры λ , t , c , λ_1 , n – фиксированные положительные числа, и пусть выполняются соотношения $c = \lambda_1 n > \lambda t$, что, в частности, для нагрузок безопасности (1.2) и (2.2) влечет $\rho_1 = \rho_2 > 0$. Тогда:

1) $\varphi_2(u) < \varphi_1(u)$ для любого конечного $u \geq 0$, где $\varphi_1(u)$ – аналитическое решение (1.7) для модели КЛ (модель 1), $\varphi_2(u)$ – аналитическое решение (2.6) для модели КЛ со случайными премиями (модель 2);
2) если при фиксированном $c > 0$ будет $n \rightarrow 0$, $\lambda_1 = c/n \rightarrow \infty$ (или $n \rightarrow \infty$, $\lambda_1 = c/n \rightarrow 0$), то $\varphi_2(u) \rightarrow \varphi_1(u)$ для любого $u \in \mathbb{R}_+$ (соответственно, $\varphi_2(u) \rightarrow 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$).

Это утверждение проиллюстрировано на фиг. 1, где приведены графики ВНР $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ для двух моделей без инвестиций ($a = b = 0$; $c = \lambda_1 n > \lambda t$) при следующих значениях параметров: $t = 0.5$,



Фиг. 1.

$\lambda = 1$; 1: $c = 10/9$; 2 (фиг. 1а): $n = 0.1, \lambda_1 = 100/9$; 2 (фиг. 1б): $n = 0.4, \lambda_1 = 25/9$. (Здесь и далее цифрой 1 помечается график функции (1.7), а цифрой 2 – график функции (2.6).)

В общем случае следует ожидать, что графики ВНР (как функции НК) для I и II моделей будут сближаться при выполнении условий: 1) задаваемые значения параметров a, b^2, λ, m для II модели те же, что и для I модели; 2) значения c для I модели и λ_1 и n для II модели связаны соотношением $\lambda_1 n = c$, т.е. ожидаемые размеры премий в единицу времени одинаковы в обеих моделях; 3) $\lambda_1 \gg \lambda$ (страховые взносы осуществляются гораздо чаще, чем происходят страховые выплаты) и $m \gg n$ (размеры выплат существенно больше, чем размеры взносов). Это, в частности, подтвердилось в расчетах [7] и данной работы.

Замечание 24 (о двух видах моделей типа благотворительного фонда). Третья вырожденная задача для II модели, когда $\lambda_1 = 0$ (отсутствуют страховые взносы), совпадает, как и должно быть, с третьей вырожденной задачей для I модели, когда $c = 0$: полагая формально $\lambda_1 = 0$ в задаче (2.9)–(2.13), получаем задачу (1.62)–(1.65), изученную в п. 1.6. В этом случае нагрузки безопасности также совпадают и отрицательны: $\rho_1 = \rho_2 < 0$, где ρ_1 и ρ_2 определены в (1.2) и (2.2) соответственно. Кроме того, если ОДУ (2.23) умножить на n , формально устремить n к нулю и положить $\lambda_1 = 0$, то оно перейдет в ОДУ (1.68), соответствующее I модели при $c = 0$ (этот переход по параметру n от ОДУ (2.23) к ОДУ (1.68) при $n \rightarrow 0$ является сингулярным). Дополнительно заметим, что II модель перестает быть моделью страхования и переходит в модель типа благотворительного фонда не только при $\lambda_1 = 0$, но и при $0 < \lambda_1 < \lambda$ и произвольных соотношениях между положительными параметрами m и n , когда капитал фонда пополняется за счет случайных поступлений (например от каких-либо спонсоров), происходящих реже, чем выплаты по требованиям. Такие примеры приведены в расчетах.

2.5. II модель при вложении всего капитала в безрисковый актив (вторая вырожденная задача для ИДУ ($b = 0$))

Результаты для II модели при $b = 0$ являются новыми, и здесь приводится достаточно подробное изложение материала с доказательствами всех утверждений.

2.5.1. Постановка сингулярной нелокальной задачи с ограничениями для ИДУ первого порядка. При $b = 0$ исходная сингулярная нелокальная задача (2.15)–(2.19) для ИДУ второго порядка вырождается в сингулярную нелокальную задачу для ИДУ первого порядка:

$$au\phi'(u) - \lambda[\phi(u) - (J_m\phi)(u)] - \lambda_1[\phi(u) - (J_{1,n}\phi)(u)] = 0, \quad 0 < u < \infty, \quad (2.74)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \phi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda + \lambda_1)} \int_0^\infty \phi(s) \exp(-s/n) ds, \quad (2.75)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = 1; \quad (2.76)$$

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}_+. \quad (2.77)$$

Здесь C_0 – параметр, значение которого подлежит определению, причем для искомого решения задачи (2.74)–(2.77) должно быть $0 < C_0 < 1$.

Переход по параметру b при $b \rightarrow 0$ от задачи (2.15)–(2.19) к задаче (2.74)–(2.77) является здесь сингулярным как при малых, так и при больших $u > 0$.

2.5.2. Единственность решения исходной задачи с ограничениями для ИДУ и ее эквивалентность сингулярной нелокальной задаче для ОДУ. Следующая лемма является аналогом леммы 7.

Лемма 14. Пусть в ИДУ (2.74) параметры λ, λ_1, m, n – действительные положительные числа, а число a любого знака ($a \in \mathbb{R}$), и пусть при фиксированных значениях этих параметров существует решение $\varphi_1(u) = \varphi(u, C_0)$ сингулярной линейной задачи (2.74)–(2.76) (без ограничений на область значений решения) для некоторого $C_0 \in \mathbb{R}$.

Тогда такое C_0 единственно, $0 < C_0 < 1$, функция $\varphi(u) = \varphi_1(u)$ удовлетворяет требованиям (2.77) и является единственным решением сингулярной нелокальной задачи с ограничениями (2.74)–(2.77).

Доказательство. 1) Докажем единственность. Предположим противное: пусть $\varphi_2(u)$ – другое решение задачи (2.74)–(2.76). Тогда возможны два варианта: первый вариант, когда

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi_1(u) = \lim_{u \rightarrow +0} \varphi_2(u), \quad (2.78)$$

и второй вариант, когда

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi_1(u) \neq \lim_{u \rightarrow +0} \varphi_2(u). \quad (2.79)$$

Для случая выполнения (2.78) рассмотрим разность $\tilde{\varphi}(u) = \varphi_2(u) - \varphi_1(u)$. Тогда $\tilde{\varphi}(u)$ есть решение ИДУ (2.74), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{u \rightarrow +0} \tilde{\varphi}(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(u) = 0. \quad (2.80)$$

Если нетривиальное решение $\tilde{\varphi}(u)$ задачи (2.74), (2.80) существует и принимает положительные значения на \mathbb{R}_+ , то оно должно иметь положительный максимум на \mathbb{R}_+ (если $\tilde{\varphi}(u)$ не принимает положительных значений на \mathbb{R}_+ , то рассматриваем функцию $-\tilde{\varphi}(u)$). Пусть $0 < \tilde{u}$ – точка максимума этого решения: $\tilde{\varphi}(\tilde{u}) = \max_{u \in [0, \infty)} \tilde{\varphi}(u) > 0$. Тогда должно быть $\tilde{\varphi}'(\tilde{u}) = 0$. Но из ИДУ (2.74), с учетом формул (1.23) и (2.14), получаем противоречие:

$$0 = \lambda[\tilde{\varphi}(\tilde{u}) - (J_m \tilde{\varphi})(\tilde{u})] + \lambda_1[\tilde{\varphi}(\tilde{u}) - (J_{1,n} \tilde{\varphi})(\tilde{u})] \geq \lambda \tilde{\varphi}(\tilde{u}) \exp(-\tilde{u}/m) > 0. \quad (2.81)$$

Рассмотрим случай выполнения (2.79). Тогда, как нетрудно проверить, можно составить такую линейную комбинацию решений $\hat{\varphi}(u) = c_1 \varphi_1(u) + c_2 \varphi_2(u)$, что $\hat{\varphi}(u) \neq 1$ и является решением ИДУ (2.74), удовлетворяющим предельным условиям

$$\lim_{u \rightarrow +0} \hat{\varphi}(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \hat{\varphi}(u) = 1.$$

Если существует $u \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\hat{\varphi}(u) > 1$, то рассуждаем так же, как для первого варианта. Если предположить, что $\hat{\varphi}(u) \leq 1 \quad \forall u > 0$, то получим неравенство

$$(J_{1,n} \hat{\varphi})(0) = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \hat{\varphi}(y) \exp(-y/n) dy < 1.$$

Отсюда, учитывая предельное равенство $\lim_{u \rightarrow +0} \hat{\varphi}(u) = 1$, получим противоречие: условие (2.75) не выполняется.

2) Докажем выполнение ограничений (2.77). Для этого сначала покажем, что при $u \rightarrow +0$ функция $\varphi(u)$ не может принимать наибольшее положительное значение. Предположим противное: $\varphi(u) \leq C_0$ для любого $u \in \mathbb{R}_+$, где $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0 > 0$. Но из (2.75) получаем противоречие: $(\lambda + \lambda_1)C_0 \leq \lambda_1 C_0$, что влечет $C_0 \leq 0$.

Пусть теперь в какой-то конечной точке $u > 0$ будет $\varphi(u) \geq 1$. Тогда функция $\varphi(u)$ должна иметь максимум на \mathbb{R}_+ , превосходящий 1. Но, совершенно аналогично доказательству неравенства (2.81), в точке максимума получим противоречие.

Аналогично от противного доказывается, что $\varphi(u)$ не может принимать наименьшее отрицательное значение при $u \rightarrow +0$ и иметь отрицательный минимум на \mathbb{R}_+ .

Для дальнейшего сведем ИДУ (2.74) к ОДУ, используя дополнительное дифференцирование и учитывая равенства (1.28), (2.20), которые следуют из (1.23), (2.14):

$$(J_m\varphi)'(u) = \left(\frac{1}{m} \exp(-u/m) \int_0^u \varphi(s) \exp(s/m) ds \right)', \quad = -(J_m\varphi)(u)/m + \varphi(u)/m;$$

$$(J_{1,n}\varphi)'(u) = \left(\frac{1}{n} \exp(u/n) \int_0^\infty \varphi(s) \exp(-s/m) ds \right)', \quad = (J_{1,n}\varphi)(u)/n - \varphi(u)/n.$$

Дифференцируя ИДУ (2.74) последовательно два раза и учитывая эти равенства, получаем:

$$a u \varphi''(u) + (a - \lambda - \lambda_1) \varphi'(u) + \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)]/m + \lambda_1[(J_{1,n}\varphi)(u) - \varphi(u)]/n = 0, \quad (2.82)$$

$$a u \varphi'''(u) + (2a - \lambda - \lambda_1) \varphi''(u) + (\lambda/m - \lambda_1/n) \varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)]/m^2 - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)]/n^2 = 0, \quad 0 < u < \infty. \quad (2.83)$$

С целью убрать интегральные слагаемые, прибавим к ИДУ (2.83) исходное ИДУ (2.74), умноженное на $-1/(mn)$, и ИДУ (2.82), умноженное на $(n - m)/(mn)$. Получим линейное ОДУ третьего порядка (2.85), приведенное далее в лемме 15, где введены обозначения ($i_{r,II}$ определено в (2.22)):

$$b_0 = 2 - (\lambda + \lambda_1)/a, \quad b_1 = (n - m)/(mn), \quad b_3 = -1/(mn),$$

$$b_2 = [a(n - m) + \lambda m - \lambda_1 n]/(amn) = -i_{r,II}/(amn). \quad (2.84)$$

Лемма 15. При фиксированных положительных значениях параметров $a, \lambda, \lambda_1, m, n$ сингулярная нелокальная задача (без ограничений) (2.74)–(2.76) для ИДУ первого порядка эквивалентна сингулярной нелокальной задаче для ОДУ третьего порядка:

$$u \varphi'''(u) + (b_0 + b_1 u) \varphi''(u) + (b_2 + b_3 u) \varphi'(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \quad (2.85)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u \varphi'(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2 \varphi''(u)] = 0, \quad (2.86)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda + \lambda_1)} \int_0^\infty \varphi(y) \exp(-y/n) dy; \quad (2.87)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi''(u) = 0. \quad (2.88)$$

Доказательство. В одну сторону, от задачи (2.74)–(2.76) к задаче (2.85)–(2.88), доказательство очевидно. Пусть теперь $\varphi(u)$ – решение задачи (2.85)–(2.88). Надо доказать, что оно удовлетворяет ИДУ (2.74). Обозначим левую часть (2.74) на решении $\varphi(u)$ через $g(u)$. Покажем, что $g(u) = 0$. В самом деле, учитывая способ получения ОДУ (2.85), запишем его в виде

$$g''(u) + \frac{(n - m)}{mn} g'(u) - \frac{1}{mn} g(u) = 0, \quad 0 < u < \infty. \quad (2.89)$$

Общее решение ОДУ (2.89) имеет вид

$$g(u) = C_1 \exp(-u/m) + C_2 \exp(u/n), \quad u \geq 0, \quad (2.90)$$

где C_j – произвольные постоянные, $j = 1, 2$. Из определения $g(u)$ и условий на бесконечности (2.88) получаем $\lim_{u \rightarrow \infty} [g(u)/u] = 0$, что влечет $C_2 = 0$ в (2.90). Далее, с учетом условий (2.86) и определения $g(u)$, имеем $g(0) = -\lambda\varphi(0) - \lambda_1\varphi(0) - \lambda_1(J_{1,n}\varphi)(0)$, откуда и из (2.87) получаем $g(0) = 0$, что, в свою очередь, влечет $C_1 = 0$ в (2.90).

2.5.3. Вспомогательная сингулярная задача для ОДУ второго порядка и ее изучение. Полагая $\psi(u) = \varphi'(u)$ и умножая ОДУ (2.85) на u , получаем вспомогательную сингулярную задачу для ОДУ, подлежащую изучению:

$$u^2 \psi''(u) + (b_0 + b_1 u) u \psi'(u) + (b_2 u + b_3 u^2) \psi(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \quad (2.91)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} [u\psi(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [u^2\psi'(u)] = 0, \quad (2.92)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi'(u) = 0. \quad (2.93)$$

Чтобы понять, что представляет из себя сингулярная задача (2.91)–(2.93), прежде всего следует изучить особые точки ОДУ (2.91) и поставленные в их окрестностях сингулярные ЗК (2.91), (2.92) и (2.91), (2.93).

2.5.3.А. Сингулярная ЗК в особой точке $u = 0$. ОДУ (2.91) обладает регулярной особенностью в нуле с характеристическими показателями $\mu_j, j = 0, 1$:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 1 - b_0 = (\lambda + \lambda_1)/a - 1, \quad (2.94)$$

что легко получить из (2.91), полагая $\psi(u) = u^\mu[1 + o(1)]$, $u\psi'(u) = \mu u^\mu[1 + o(1)]$, $u^2\psi''(u) = \mu(\mu - 1)u^\mu[1 + o(1)]$, $u \rightarrow +0$.

Из (2.94) для показателя μ_1 следует: 1) если $0 < a < \lambda + \lambda_1$, то $\mu_1 > 0$, причем при выполнении дополнительных требований будет: если $\lambda + \lambda_1 > 2a$, то $\mu_1 > 1$; если $a < \lambda + \lambda_1 < 2a$, то $0 < \mu_1 < 1$; если $\lambda + \lambda_1 = 2a$, то $\mu_1 = 1$, где этот характеристический показатель (ввиду его целочисленности) отвечает решению ОДУ (2.91) с неограниченной в нуле производной – ведущему себя как $O(u \ln(u))$ при $u \rightarrow 0$; 2) если $a > \lambda + \lambda_1$, то $-1 < \mu_1 < 0$; 3) если $a = \lambda + \lambda_1$, то $\mu_1 = 0$, где этот характеристический показатель отвечает неограниченному в нуле решению ОДУ (2.91), ведущему себя как $O(\ln(u))$ при $u \rightarrow +0$.

Отсюда, в частности, видно, что равенство $a = \lambda + \lambda_1$ определяет критическое значение параметра бифуркации a : при выполнении условия $0 < a < \lambda + \lambda_1$ ОДУ (2.91) обладает двухпараметрическим семейством ограниченных в нуле решений, а при выполнении неравенства $a \geq \lambda + \lambda_1$ – однопараметрическим. В случае выполнения условия $a \geq \lambda + \lambda_1$ двухпараметрическое семейство решений выделяется более общими допустимыми предельными условиями (2.92), когда $\psi(u)$ может быть неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией.

Замечание 25. При выполнении неравенств $0 < a < \lambda + \lambda_1$ предельные условия (2.92) более точно можно записать в виде

$$\lim_{u \rightarrow +0} \psi(u) = D_1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\psi'(u)] = 0, \quad (2.95)$$

где D_1 – параметр, значение которого подлежит определению, причем для искомого решения должно быть $D_1 \geq 0$. Более того, при выполнении дополнительного требования $\lambda + \lambda_1 > 2a$, когда становится конечной величина $\lim_{u \rightarrow +0} \psi'(u)$, предельные условия (2.95) можно заменить еще более сильными требованиями, следующими из ОДУ (2.91):

$$\lim_{u \rightarrow +0} \psi(u) = D_1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \psi'(u) = D_1 D_2 = -D_1 b_2 / b_0, \quad (2.96)$$

так что $D_2 = -b_2/b_0 = -i_{r, II} / [mn(\lambda + \lambda_1 - 2a)]$, где $i_{r, II}$ определено в (2.22); отсюда, в частности, при $D_1 > 0$ будет: $D_2 \leq 0$ при $i_{r, II} \geq 0$ и $D_2 > 0$ при $i_{r, II} < 0$.

Однако достаточно во всех случаях требовать выполнения более слабых условий (2.92), а условия (2.95) или (2.96) будут выполняться автоматически.

Следовательно, поставленные условия (2.92) выполняются для всех решений ОДУ (2.91), что более точно отражено в приведенной ниже лемме.

Лемма 16. Пусть в ОДУ (2.91) величины $b_j, j = 0, 1, 2, 3$, определены по формулам (2.84), где все параметры a, n, t, λ и λ_1 – фиксированные положительные числа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) сингулярная ЗК (2.91), (2.92) обладает двухпараметрическим семейством решений – предельные условия (2.92) в особой точке $u = 0$ выполняются для всех решений ОДУ (2.91) и не порождают граничного условия в окрестности этой точки;

2) двухпараметрическое семейство решений $\psi(u, p_0, p_1)$ сингулярной ЗК (2.91), (2.92) представимо в виде

$$\psi(u, p_0, p_1) = p_0 \{1 + \psi_0(u) + Au^{\mu_1} \ln(u) [1 + \psi_1(u)]\} + p_1 u^{\mu_1} [1 + \psi_1(u)], \quad (2.97)$$

где величина μ_1 определена в (2.94), p_0, p_1 – произвольные постоянные, $\psi_0(u)$ и $\psi_1(u)$ – голоморфные в точке $u = 0$ функции, $\psi_j(0) = 0, j = 0, 1$, а постоянная A зависит от параметров ОДУ (2.91), причем $A = 0$, если μ_1 – нецелое число.

2.5.3.Б. Сингулярная ЗК с начальными условиями при $u \rightarrow \infty$ и перенос предельных условий из бесконечности в конечную точку. Учитывая лемму 16, получаем, что сингулярная задача (2.91)–(2.93) эквивалентна сингулярной ЗК на бесконечности (2.91), (2.93), которую для удобства изучения перепишем в виде

$$\psi''(u) + (b_1 + b_0/u)\psi'(u) + (b_3 + b_2/u)\psi(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{2.98}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi'(u) = 0. \tag{2.99}$$

ОДУ (2.98) имеет иррегулярную особенность ранга 1 при $u \rightarrow \infty$ с характеристическими показателями $\nu_1 = 1/n > 0$ и $\nu_2 = -1/m < 0$.

В результате сингулярная ЗК (2.98), (2.99) (или, что то же, ЗК (2.91), (2.93)) имеет однопараметрическое семейство решений, значения которых порождают в фазовом пространстве \mathbb{R}^2 переменных $\{\psi, \psi'\}$ ОДУ (2.98) линейное одномерное подпространство – прямую, зависящую от u как от параметра.

Более точно, используя результаты общей теории систем линейных ОДУ с иррегулярными особыми точками и результаты из [24] по переносу граничных условий из бесконечности для таких систем, получаем справедливость следующей леммы.

Лемма 17. Пусть в ОДУ (2.91) величины $b_j, j = 0, 1, 2, 3$, определены по формулам (2.84), где все параметры a, n, m, λ и λ_1 – фиксированные действительные числа, причем $a > 0, m > 0, n > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Тогда:

1) Предельные граничные условия (2.93) для решений ОДУ (2.91) для достаточно больших u эквивалентны линейному соотношению

$$\psi'(u) = \theta(u)\psi(u), \quad u \geq u_\infty. \tag{2.100}$$

Здесь $\theta(u)$ есть решение сингулярной нелинейной ЗК на бесконечности:

$$\theta' + \theta^2 + (b_1 + b_0/u)\theta + b_3 + b_2/u = 0, \quad u \geq u_\infty, \tag{2.101}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \theta(u) = \theta_0 = -1/m \tag{2.102}$$

(θ_0 есть отрицательный корень уравнения $\theta_0^2 + b_1\theta_0 + b_3 = 0$). Решение сингулярной ЗК (2.101), (2.102) существует для достаточно больших u , единственно и представимо асимптотическим рядом

$$\theta(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k / u^k, \tag{2.103}$$

где θ_0 определено в (2.102), а коэффициенты θ_k при $k \geq 1$ определяются из (2.101) формальной подстановкой разложения (2.103), что приводит к рекуррентным формулам:

$$\theta_1 = (-b_2 - b_0\theta_0)/(2\theta_0 + b_1) = \lambda/a - 1, \tag{2.104}$$

$$\theta_k = \left[(k - 1 - b_0)\theta_{k-1} - \sum_{l=1}^{k-1} \theta_l \theta_{k-l} \right] / (2\theta_0 + b_1), \quad k = 2, 3, \dots, \tag{2.105}$$

где $2\theta_0 + b_1 = -(m + n)/(mn) \neq 0$.

2) Однопараметрическое семейство решений $\psi(u, q)$ сингулярной ЗК (2.91), (2.93) (значения которых порождают в фазовом пространстве ОДУ (2.91) одномерное устойчивое начальное подпространство – прямую (2.100)) имеет при больших u представление

$$\psi(u, q) = qu^{\lambda/a-1} \exp(-u/m) [1 + \xi(u)/u]. \tag{2.106}$$

Здесь q — произвольная постоянная, а функция $\xi(u)$ имеет конечный предел при $u \rightarrow \infty$ и при больших u представима асимптотическим рядом

$$\xi(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k / u^k, \quad (2.107)$$

где коэффициенты этого ряда могут быть получены из ОДУ (2.91) или соотношения (2.100) формальной подстановкой всех разложений.

3) При выполнении предположений леммы 16 для каждого решения семейства $\psi(u, q)$ справедливо $\int_0^{\infty} |\psi(s, q)| ds < \infty$.

Доказательство. Утверждение 1) есть простое следствие результатов из [24, ч. I]; утверждение 2) легко, например, получить из ОДУ первого порядка (2.100) с учетом формул (2.103)–(2.105); утверждение 3) следует из справедливости представления (2.106) при больших u и леммы 16, которая обеспечивает интегрируемость решений в нуле.

В результате перенос предельных условий (2.99) из бесконечности в конечную точку $u = u_{\infty} \gg 1$ осуществляется с помощью соотношения (2.100), где приближенное значение $\theta(u_{\infty})$ может быть найдено с помощью разложения (2.103)–(2.105). При больших u условие (2.100) устойчиво переносится справа налево — в направлении от особой точки $u = \infty$.

2.5.4. Основная теорема для исходной сингулярной задачи для ИДУ. Учитывая приведенные выше утверждения, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть в ИДУ (2.74) все параметры a, n, t, λ и λ_1 — фиксированные положительные числа. Тогда:

1) решение $\varphi(u)$ исходной сингулярной задачи (2.74)–(2.77) для ИДУ существует, единственно и является неубывающей на \mathbb{R}_+ функцией;

2) это решение находится по формуле

$$\varphi(u) = \frac{(\lambda_1/\lambda) \int_0^{\infty} \psi(s) \exp(-s/n) ds + \int_0^u \psi(s) ds}{\int_0^{\infty} [1 + (\lambda_1/\lambda) \exp(-s/n)] \psi(s) ds}, \quad u \geq 0, \quad (2.108)$$

где $\psi(u)$ — какое-либо нетривиальное решение сингулярной ЗК (2.98), (2.99), определенное в лемме 17; в частности, справедливо

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = \lambda_1 \int_0^{\infty} \psi(s) \exp(-s/n) ds / \int_0^{\infty} [\lambda + \lambda_1 \exp(-s/n)] \psi(s) ds; \quad (2.109)$$

3) при малых $u > 0$ поведение решения в общем случае следует из формул (2.97), (2.108), где значения постоянных r_0, r_1 не могут быть найдены методами локального анализа; в частности, справедливо: если выполнено неравенство $a \geq \lambda + \lambda_1$, то производная $\varphi'(u)$ становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией; если выполнено условие $0 < a < \lambda + \lambda_1$, то производная $\varphi'(u)$ имеет положительный конечный предел при $u \rightarrow +0$, причем при выполнении дополнительного требования $\lambda + \lambda_1 \leq 2a$ вторая производная $\varphi''(u)$ становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией, а при выполнении неравенства $\lambda + \lambda_1 > 2a$ вторая производная $\varphi''(u)$ также имеет конечный предел при $u \rightarrow +0$, причем справедливо соотношение

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u) = -\lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) i_{r, II} / [m n (\lambda + \lambda_1 - 2a)], \quad (2.110)$$

где $\Phi r_{r, II}$ определен в (2.22); $i_{r, II} = a(m - n) + \lambda_1 n - \lambda m$;

4) при больших u решение $\varphi(u)$ представимо в виде

$$\varphi(u) = 1 - K u^{\lambda/a-1} \exp(-u/m) [1 + o(1)], \quad (2.111)$$

где $0 < K$ — постоянная (значение постоянной K , вообще говоря, не может быть найдено методами локального анализа);

5) если $i_{r, II} \geq 0$, то решение $\varphi(u)$ – вогнутая на \mathbb{R}_+ функция, а при $i_{r, II} < 0$ и $\lambda + \lambda_1 > 2a$ функция $\varphi(u)$ выпукла на некотором отрезке $[0, \hat{u}]$, где $0 < \hat{u}$ – точка перегиба.

Доказательство. а) Докажем утверждения 1), 2). Пусть $\psi(u)$ – какое-либо нетривиальное решение сингулярной ЗК (2.98), (2.99), определенное в лемме 17. Функция $\varphi(u)$, определенная равенством

$$\varphi(u) = C_0 + \int_0^u \psi(s) ds, \quad u \geq 0, \tag{2.112}$$

где C_0 – параметр, тогда и только тогда является решением ИДУ (2.74), когда выполняется условие (2.75), или, что эквивалентно, для C_0 справедливо равенство

$$C_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda} \int_0^\infty \psi(y) \exp(-y/n) dy. \tag{2.113}$$

Равенство (2.113) следует из (2.87) с учетом соотношения

$$\frac{1}{n} \int_0^\infty \left(\int_0^y \psi(s) ds \right) \exp(-y/n) dy = \int_0^\infty \psi(y) \exp(-y/n) dy.$$

Кроме того, функция $\varphi(u)$, определенная в (2.112), тогда и только тогда является решением задачи (2.74)–(2.77), когда выполняются условие (2.113) и условие

$$C_0 + \int_0^\infty \psi(s) ds = 1,$$

что приводит к условию нормировки для $\psi(u)$:

$$\int_0^\infty [1 + (\lambda_1/\lambda) \exp(-s/n)] \psi(s) ds = 1. \tag{2.114}$$

Таким образом, решение $\varphi(u)$ исходной задачи (2.74)–(2.77) для ИДУ сводится к нахождению нетривиального решения $\psi(u)$ вспомогательной сингулярной ЗК (2.91), (2.93) для ОДУ, нормированного требованием (2.114), и использованию представления

$$\varphi(u) = (\lambda_1/\lambda) \int_0^\infty \psi(s) \exp(-s/n) ds + \int_0^u \psi(s) ds, \quad u \geq 0. \tag{2.115}$$

Отсюда следует справедливость утверждений 1) и 2).

Формулу (2.115) с учетом (2.114) можно также переписать в виде

$$\varphi(u) = 1 - \int_u^\infty \psi(s) ds, \quad u \geq 0. \tag{2.116}$$

б) Справедливость утверждения 3) следует из леммы 16 и зависимости показателя μ_1 от соотношения параметров; утверждение 4) следует из леммы 17.

в) Докажем утверждение 5). Из (2.111) получаем, что при больших конечных u справедливо $\varphi'(u) > 0$ и $\varphi''(u) < 0$. Покажем, что при $i_{r, II} \geq 0$ с уменьшением u вторая производная $\varphi''(u)$ не может поменять знак. В самом деле, пусть для некоторого $\tilde{u} > 0$ будет $\varphi''(\tilde{u}) = 0$. Тогда из (2.85) с учетом формул (2.84), где $b_2 \leq 0$, $b_3 < 0$, получим $\varphi'''(\tilde{u}) > 0$, но при $u < \tilde{u}$ должно быть $\varphi''(u) > 0$, что влечет $\varphi'''(u) < 0$, так что приходим к противоречию.

Если $i_{r, II} < 0$ и $\lambda + \lambda_1 > 2a$, то $\mu_1 > 1$, и из (2.110) получаем, что $\varphi''(0) > 0$ и $\varphi(u)$ имеет перегиб при некотором положительном значении u .

Замечание 26. При $a = 0$ задача (2.74)–(2.76) формально переходит в задачу (2.67), (2.68) для модели КЛ со случайными премиями (без инвестиций) с точным решением (2.6), где переход по параметру a при $a \rightarrow 0$ от задачи (2.74)–(2.76) к задаче (2.67), (2.68) является сингулярным как при малых, так и при больших $u > 0$.

Замечание 27. Асимптотическое поведение решений при больших u в задачах для I и II моделей при $b = 0$ одинаковое, за исключением того, что постоянные в асимптотиках (1.61), (1.103) известны точно, в отличие от постоянной $K > 0$ в асимптотике (2.111), которая, вообще говоря, не может быть найдена методами локального анализа.

2.5.5. Алгоритмы численного нахождения решения. Приведем 2 варианта численного решения задачи (2.74)–(2.77).

1. Задаем $u_\infty \gg 1$; вычисляем $\theta(u_\infty) = \theta_\infty < 0$, используя разложения (2.103)–(2.105); задаем достаточно малое $\psi(u_\infty) = \psi_\infty > 0$ (предварительная нормировка решения однородной задачи); вычисляем $\psi'(u_\infty) = \theta(u_\infty)\psi_\infty < 0$. Далее решаем справа налево ЗК для ОДУ второго порядка (2.91) (от точки $u = u_\infty$ до точки $u = u_0$, $0 < u_0 \ll 1$) с условиями $\psi(u_\infty) = \psi_\infty > 0$, $\psi'(u_\infty) = \theta(u_\infty)\psi_\infty < 0$. Затем $\varphi(u)$ находим по формуле (2.108) или, с учетом (2.116), по формуле

$$\varphi(u) = 1 - \int_u^\infty \psi(s) ds / \int_0^\infty [1 + (\lambda_1/\lambda) \exp(-s/n)] \psi(s) ds, \quad u \geq 0. \quad (2.117)$$

2. Вместо ЗК для исходного ОДУ второго порядка (2.91) решаем справа налево ЗК для пары связанных ОДУ первого порядка – нелинейного ОДУ (2.101) для $\theta(u)$ с условием $\theta(u_\infty) = \theta_\infty$ и линейного ОДУ (2.100) для $\psi(u)$ с условием $\psi(u_\infty) = \psi_\infty$ (т.е. решаем ЗК на подпространстве, все время находясь на прямой (2.100)). Затем $\varphi(u)$ находим по формуле (2.108) или по формуле (2.117).

Интегралы $I_{1,\psi}(u) = \int_u^\infty \psi(s) ds$ и $I_{2,\psi} = \int_u^\infty \psi(s) \exp(-s/n) ds$ удобно считать, добавив для них ЗК справа налево от точки $u = u_\infty$: $I'_{1,\psi}(u) = -\psi(u)$, $I'_{2,\psi}(u) = -\psi(u) \exp(-u/n)$, $u \leq u_\infty$, $I_{1,\psi}(u_\infty) = \hat{I}_{1,\psi}$, $I_{2,\psi}(u_\infty) = \hat{I}_{2,\psi}$, где значения $\hat{I}_{1,\psi}$, $\hat{I}_{2,\psi}$ могут быть найдены с использованием соотношения (2.106) с учетом условия $\psi(u_\infty) = \psi_\infty > 0$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты осуществлялись в программной среде пакета Maple 14.01 (лицензия ВЦ РАН) с задаваемой точностью вычислений и дополнительными приемами контроля количества верных знаков.

Далее для I и II моделей при разных наборах значений параметров задач приводятся графики $\varphi(u)$ зависимостей ВНР от НК; к ним указываются значения величин $\varphi(0) = \lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u)$, $\varphi'(0) = \lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u)$, $\varphi''(0) = \lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u)$ и при необходимости других величин, например ФР $i_{r,I}$ и $i_{r,II}$, определенных в (1.36) и (2.22) соответственно.

При $a > 0$, $b \neq 0$ для всех примеров расчетов выполняется условие надежности акций: $2a/b^2 > 1$. При $c > \lambda m$ ($\lambda_1 n > \lambda m$) дается также сравнение результатов расчетов для I модели с аналитическим решением (1.7) в модели 1 без инвестиций (для II модели с аналитическим решением (2.6) в модели 2 без инвестиций); для $\varphi'(0)$ и $\varphi''(0)$ см. соотношения (1.9), (1.10) для модели 1 (соотношения (2.72), (2.73) для модели 2).

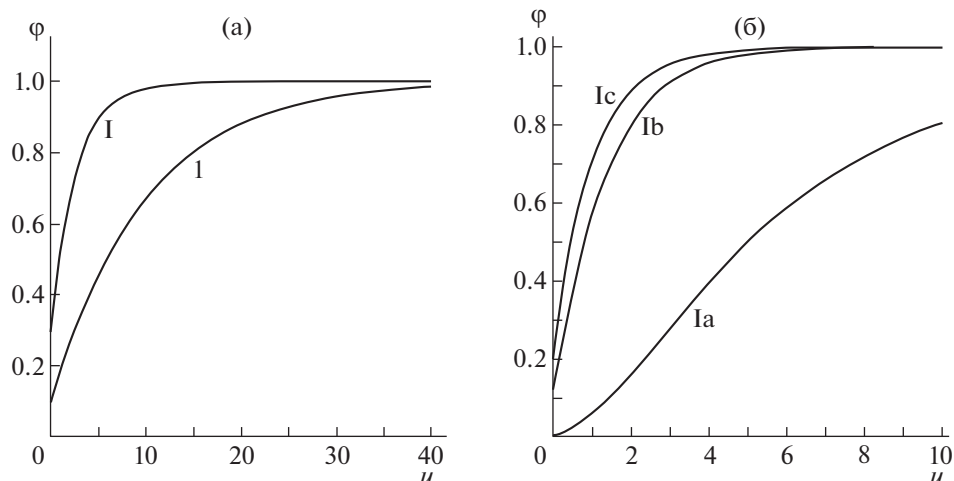
Параметры задач a , b^2 , c , λ_1 указываются в безразмерном виде (параметры m и n изначально являются безразмерными), что достигается за счет фиксированного значения $\lambda = 1$ (при сохранении λ в формулах); при пересчете параметров в размерном виде достаточно их умножить на заданную величину λ (за исключением параметров m и n , которые не меняются; см. подробнее замечание 4, относящееся к I модели, аналог которого остается справедливым и для II модели).

Для всех примеров расчетов зафиксированы значения $m = 1$, $\lambda = 1$.

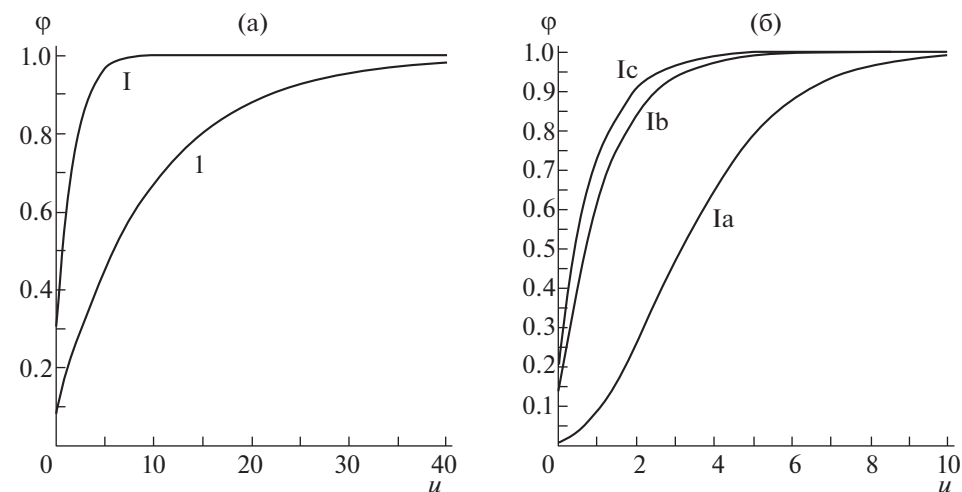
3.1. Результаты расчетов для I модели, включая вырожденные случаи

3.1.1. Страховая модель с инвестициями в рисковые активы ($b \neq 0$, $c > 0$). Графики на фиг. 2 иллюстрируют утверждения теоремы 1 при $c > \lambda m$ (фиг. 2а) и при $c < \lambda m$ (фиг. 2б). Алгоритм вычислений описан в замечании 10; значения $\varphi(0)$ находятся численно из представления (1.41), а для вычислений производных в нуле и ФР $i_{r,I}$ используются соотношения (см. (1.30), (1.36))

$$\varphi'(0) = \varphi(0)\lambda/c, \quad \varphi''(0) = -\varphi'(0)i_{r,I}/(mc), \quad i_{r,I} = m(a - \lambda) + c. \quad (3.1)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

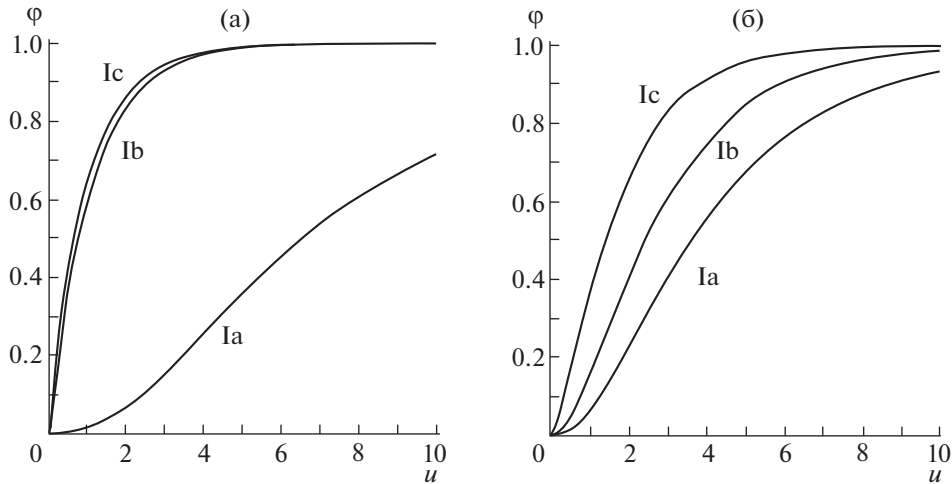
Данные к графикам на фиг. 2а: $c = 10/9$ ($c - \lambda m = 1/9$); 1: $a = b = 0$ (модель без инвестиций); $\varphi(0) = 0.1$, $\varphi'(0) = 0.09$, $\varphi''(0) = -0.009$; I: $b = 1/3$, $a = 2/9$ ($i_{r,1} = 1/3$); $\varphi(0) \approx 0.294$, $\varphi'(0) \approx 0.265$, $\varphi''(0) \approx -0.0794$.

Данные к графикам на фиг. 2б (при разных знаках ФР): $c = 2/9$ ($c - \lambda m = -7/9$), $b = 1/3$; Ia : $a = 2/9$ ($i_{r,1} = -5/9$; $\varphi(u)$ имеет перегиб); $\varphi(0) \approx 0.00527$, $\varphi'(0) \approx 0.0237$, $\varphi''(0) \approx 0.0593$; Ib: $a = 7/9$ ($i_{r,1} = 0$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция); $\varphi(0) \approx 0.120$, $\varphi'(0) \approx 0.542$, $\varphi''(0) = 0$; Ic: $a = 10/9$ ($i_{r,1} = 1/3$); $\varphi(0) \approx 0.194$, $\varphi'(0) \approx 0.872$, $\varphi''(0) \approx -1/308$.

3.1.2. Страховая модель с инвестициями в безрисковые активы ($b = 0$, $c > 0$). Графики на фиг. 3 иллюстрируют утверждения п. 1.5 при $c > \lambda m$ (фиг. 3а) и $c < \lambda m$ (фиг. 3б). Значения $\varphi(0)$ находятся по формуле (1.56) с учетом формул (1.54), (1.55); для производных в нуле и ФР справедливы соотношения (3.1). При $i_{r,1} < 0$ точка перегиба $u = \hat{u}$ функции $\varphi(u)$ вычисляется по формуле $\hat{u} = -i_{r,1}/a$.

Данные к графикам на фиг. 3а: $c = 10/9$ ($c - \lambda m = 1/9$); 1: $a = 0$ (модель без инвестиций); $\varphi(0) = 0.1$, $\varphi'(0) = 0.09$, $\varphi''(0) = -0.009$; I: $a = 2/9$ ($i_{r,1} = 1/3$); $\varphi(0) \approx 0.339$, $\varphi'(0) \approx 0.305$, $\varphi''(0) \approx -0.0915$.

Данные к графикам на фиг. 3б (при разных знаках ФР): $c = 2/9$ ($c - \lambda m = -7/9$); Ia : $a = 2/9$ ($i_{r,1} = -5/9$; $\varphi(u)$ имеет перегиб в точке $u = \hat{u} = 2.5$); $\varphi(0) \approx 0.00704$, $\varphi'(0) \approx 0.0317$, $\varphi''(0) \approx 0.0792$;



Фиг. 4.

Ib: $a = 7/9$ ($i_{r,1} = 0$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция); $\varphi(0) \approx 0.132$, $\varphi'(0) \approx 0.594$, $\varphi''(0) = 0$; Ic: $a = 10/9$ ($i_{r,1} = 1/3$); $\varphi(0) \approx 0.2046$, $\varphi'(0) \approx 0.9207$, $\varphi''(0) \approx -1.381$.

Сравнение данных к графикам на фиг. 2а, б с данными к графикам на фиг. 3а, б соответственно и самих графиков показывает: при доходности акций, равной процентной ставке по вкладам, вложение ТК в безрисковые активы естественным образом оказывается более выгодным, чем в рискованные, особенно при больших значениях НК; в силу асимптотического поведения решений, такое вложение ТК при больших НК будет более выгодным и при любой меньшей процентной ставке по банковскому счету (ср. здесь с п. 3.1.5).

На фиг. 2а, 3а (фиг. 2б, 3б) виден также существенный рост ВНР в широком диапазоне изменений НК (для всех значений НК) по сравнению с аналитическим решением (тождественным нулем) в модели 1 без инвестиций.

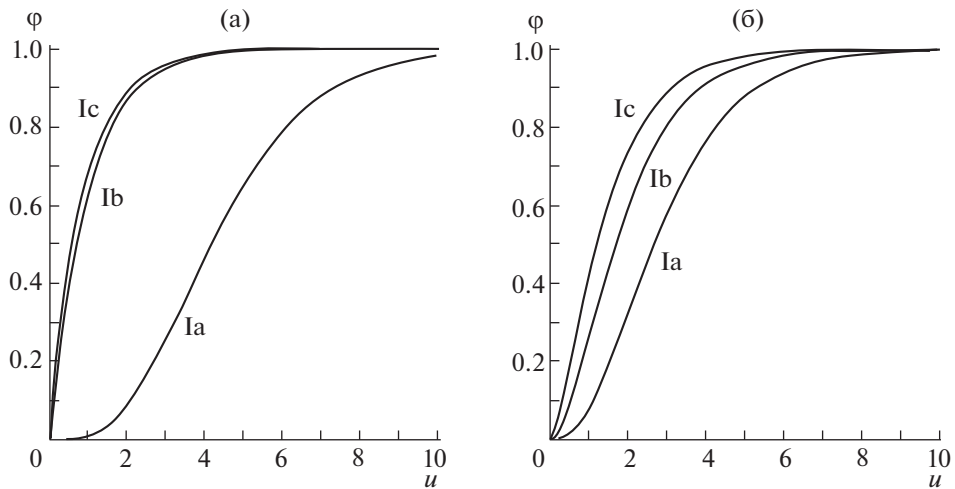
3.1.3. Модель типа благотворительного фонда с инвестициями в рискованные активы ($b \neq 0$, $c = 0$). Графики на фиг. 4 иллюстрируют утверждения теоремы 2; при этом всюду $\varphi(0) = 0$, для ФР имеем $i_{r,1} = m(a - \lambda)$, а алгоритм вычислений описан в п. 1.6.4. Для всех примеров расчетов на фиг. 4 зафиксировано значение $b = 1/3$. Для дополнительной информации приводятся значения величины $P_1(\mu_1) = \lim_{u \rightarrow +0} [\varphi'(u)/u^{\mu_1}]$, где μ_1 определено в (1.79). Значения $P_1(\mu_1)$ находятся численно по формуле (1.92). Далее, в соответствии с теоремой 2, имеем: 1) если $a > \lambda$, то $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$; 2) если $a = \lambda$, то $\varphi'(0) = P_1(0)$, $\varphi''(0) = -\varphi'(0)\lambda/[m(b^2 + \lambda)]$; 3) если $\lambda > a$, то $\varphi'(0) = 0$, а для $\varphi''(0)$ справедливо: а) если $\lambda > 2a + b^2$, то $\varphi''(0) = 0$; б) если $\lambda = 2a + b^2$, то $\varphi''(0) = P_1(1)$; в) если $\lambda < 2a + b^2$, то $\varphi''(0) = \infty$.

Данные к графикам на фиг. 4а (при разных знаках ФР): Ia: $a = 2/9$ ($\lambda > 2a + b^2$, $i_{r,1} = -7/9$; $\varphi(u)$ имеет перегиб); $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$; $\mu_1 = 2$, $P_1(\mu_1) \approx 0.0596$; Ib: $a = 1$ ($a = \lambda$, $i_{r,1} = 0$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция); $\varphi'(0) = P_1(0) \approx 0.895$, $\varphi''(0) \approx -0.8056$; Ic: $a = 10/9$ ($a > \lambda$, $i_{r,1} = 1/9$); $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$; $\mu_1 \approx -0.0957$, $P_1(\mu_1) \approx 0.862$.

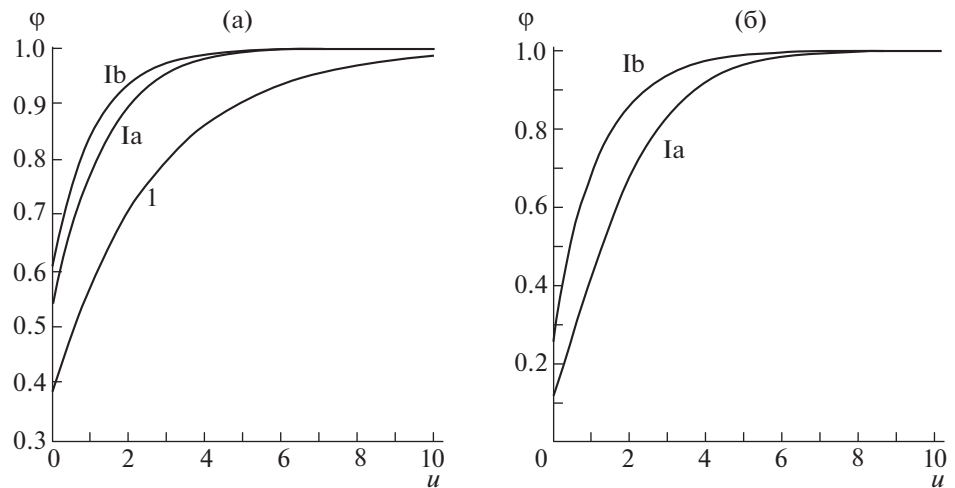
Данные к графикам на фиг. 4б (при отрицательных значениях ФР, когда $\lambda > a$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$): Ia: $a = 1/3$ ($\lambda > 2a + b^2$, $i_{r,1} = -2/3$); $\varphi''(0) = 0$; $\mu_1 \approx 1.4244$, $P_1(\mu_1) \approx 0.251$; Ib: $a = 4/9$ ($\lambda = 2a + b^2$, $i_{r,1} = -5/9$); $\varphi''(0) = P_1(1) \approx 0.509$; Ic: $a = 2/3$ ($a < \lambda < 2a + b^2$, $i_{r,1} = -1/3$); $\varphi''(0) = \infty$; $\mu_1 \approx 0.446$, $P_1(\mu_1) \approx 0.849$.

Поскольку в отсутствие взносов коэффициент нагрузки безопасности всегда отрицательный, то ситуация здесь более рискованная, чем в страховой модели, и, в частности, при нулевом значении НК разорение неминуемо.

3.1.4. Модель типа благотворительного фонда с инвестициями в безрисковые активы ($b = c = 0$). Графики на фиг. 5 иллюстрируют утверждения п. 1.7. При этом $\varphi(0) = 0$, $i_{r,1} = m(a - \lambda)$, а из соотношений (1.100), (1.101) следует: 1) если $\lambda > a$, то $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(u)$ имеет перегиб в точке $u = \hat{u} = -i_{r,1}/a > 0$, а для значений $\varphi''(0)$ справедливо: если $\lambda > 2a$, то $\varphi''(0) = 0$; если $\lambda = 2a$, то $\varphi''(0) = 1/m^2$;



Фиг. 5.



Фиг. 6.

если $a < \lambda < 2a$, то $\varphi''(0) = \infty$; 2) если $a = \lambda$, то $\varphi(u) = 1 - \exp(-u/m)$, $\varphi'(0) = 1/m$, $\varphi''(0) = -1/m^2$; 3) если $a > \lambda$, то $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Данные к графикам на фиг. 5а (при разных знаках ФР): Ia : $a = 2/9$ ($\lambda > 2a$, $i_{r,1} = -7/9$); $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, $u = \hat{u} = 3.5$; Ib : $a = 1$ ($a = \lambda$, $i_{r,1} = 0$); $\varphi(u) = 1 - \exp(-u)$; $\varphi'(0) = 1$, $\varphi''(0) = -1$; Ic : $a = 10/9$ ($a > \lambda$, $i_{r,1} = 1/9$); $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Данные к графикам на фиг. 5б (при отрицательных значениях ФР, когда $\lambda > a$ и $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$): Ia: $a = 1/3$ ($\lambda > 2a$, $i_{r,1} = -2/3$); $\varphi''(0) = 0$, $\hat{u} = 2$; Ib: $a = 0.5$ ($\lambda = 2a$, $i_{r,1} = -0.5$); $\varphi''(0) = 1$, $\hat{u} = 1$; Ic: $a = 2/3$ ($a < \lambda < 2a$, $i_{r,1} = -1/3$); $\varphi''(0) = \infty$, $\hat{u} = 0.5$.

Сравнение данных к графикам на фиг. 4а, б с данными к графикам на фиг. 5а, б соответственно и самих графиков показывает, что для моделей типа благотворительных фондов справедливы те же выводы, что и при аналогичном сравнении графиков на фиг. 2а, б и фиг. 3а, б и данных к ним для моделей страхования.

На каждой из фиг. 2б, 3б, 4, 5 самые верхние графики Ic отвечают акциям с наибольшей доходностью.

3.1.5. Сравнение результатов расчетов для I модели с рисковыми и безрисковыми инвестициями с различной доходностью. Такое сравнение при $c > \lambda m$ дано на фиг. 6а, при $c < \lambda m$ – на фиг. 6б. При

этом при сравнении ВНР $\varphi(u)$ для рискованных активов ($b \neq 0$) берется значение a большее, чем для безрисковых ($b = 0$), так как естественно предполагать, что доходность акций выше процентной ставки по банковскому счету.

Данные к графикам на фиг. 6а: $c = 1.6$ ($c - \lambda m = 0.6$); 1 : $a = b = 0$; $\varphi(0) = 0.375$, $\varphi'(0) = 0.234$, $\varphi''(0) = -0.08775$; Ia: $b = 0$, $a = 0.4$ ($i_{r,1} = 1$); $\varphi(0) \approx 0.530$, $\varphi'(0) \approx 0.331$, $\varphi''(0) \approx -0.2069$; Ib: $b^2 = 0.2$, $a = 1$ ($i_{r,1} = 1.6$); $\varphi(0) \approx 0.599$, $\varphi'(0) \approx 0.375$, $\varphi''(0) \approx -4.688$ (при больших u имеем: $\varphi_{Ia}(5) - \varphi_{Ib}(5) \approx -0.00016 < 0$, $\varphi_{Ia}(10) - \varphi_{Ib}(10) \approx 0.00002 > 0$).

Данные к графикам на фиг. 6б: $c = 0.4$ ($c - \lambda m = -0.6$); Ia: $b = 0$, $a = 0.4$ ($i_{r,1} = -0.2$); $\varphi(0) \approx 0.115$, $\varphi'(0) \approx 0.288$, $\varphi''(0) \approx 0.144$, $\hat{u} = 0.5$; Ib: $b^2 = 0.2$, $a = 1$ ($i_{r,1} = 0.4$); $\varphi(0) \approx 0.261$, $\varphi'(0) \approx 0.653$, $\varphi''(0) \approx -0.653$ (при больших u имеем: $\varphi_{Ia}(10) - \varphi_{Ib}(10) \approx -0.00016 < 0$, $\varphi_{Ia}(20) - \varphi_{Ib}(20) \approx 0.000002 > 0$).

Вывод: в некотором диапазоне изменения значений НК ($u \in [0, U]$) выгоднее вкладывать ТК в рискованные активы (ср. здесь с п. 3.1.2).

3.2. Результаты расчетов для II модели, включая вырожденные случаи

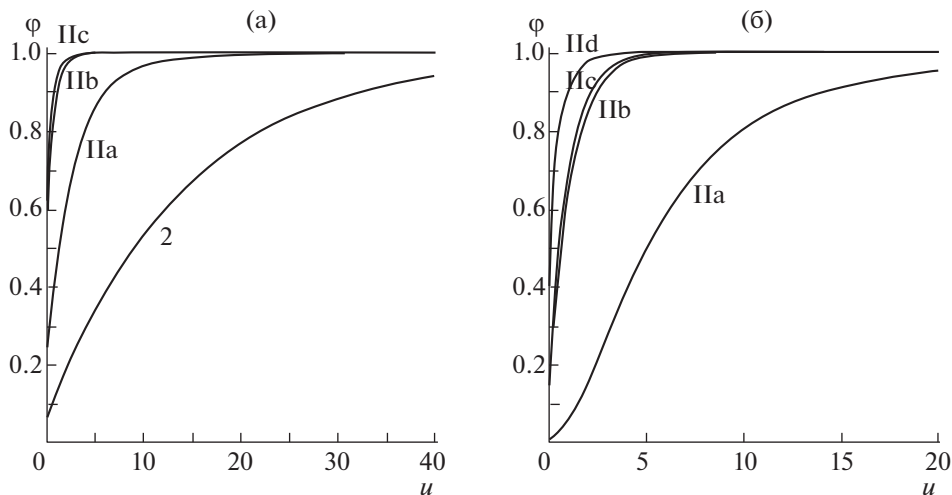
3.2.1. Страховая модель с инвестициями в рискованные активы ($b \neq 0$, $\lambda_1 > \lambda$, $m > n$). Графики на фиг. 7 иллюстрируют утверждения теоремы 4 при $\lambda_1 n > \lambda m$ (фиг. 7а) и $\lambda_1 n < \lambda m$ (фиг. 7б). О методах вычислений см. в п. 2.3.4. Значения $\varphi(0)$ и конечные значения $\varphi'(0)$ (при $\lambda + \lambda_1 > a$) находятся численно; для нахождения конечной величины $\varphi''(0)$ (при $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$) и ФР $i_{r,II}$ используются соотношения (см. (2.63), (2.22)):

$$\varphi''(0) = -\varphi'(0)i_{r,II}/[mn(\lambda + \lambda_1 - b^2 - 2a)], \quad i_{r,II} = a(m - n) + \lambda_1 n - \lambda m. \quad (3.2)$$

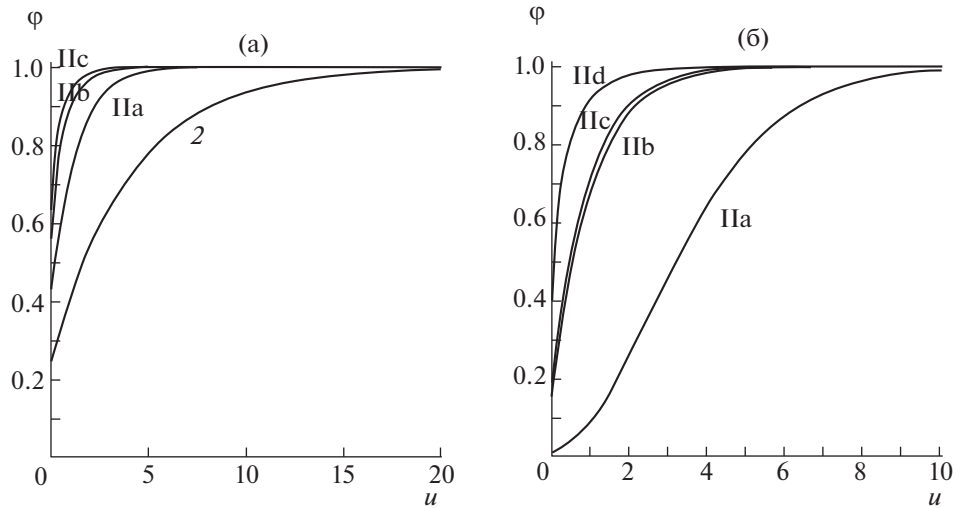
Данные к графикам на фиг. 7а: $n = 0.5$, $\lambda_1 = 20/9$ ($\lambda_1 n - \lambda m = 1/9$); 2 : $a = b = 0$; $\varphi(0) \approx 0.0690$, $\varphi'(0) \approx 0.0642$, $\varphi''(0) \approx -0.00443$; Па, б, с: $b = 1/3$; Па: $a = 2/9$ ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{r,II} = 2/9$); $\varphi(0) \approx 0.2354$, $\varphi'(0) \approx 0.2353$, $\varphi''(0) \approx -0.03922$; Пб: $a = 20/9$ ($a < \lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a$, $i_{r,II} = 11/9$); $\varphi(0) \approx 0.506$, $\varphi'(0) \approx 1.29$, $\varphi''(0) = -\infty$; Пс: $a = 35/9$ ($a > \lambda + \lambda_1$, $i_{r,II} = 37/18$); $\varphi(0) \approx 0.558$, $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Данные к графикам на фиг. 7б (при разных знаках ФР): $n = 0.2$, $\lambda_1 = 10/9$ ($\lambda_1 n - \lambda m = -7/9$), $b = 1/3$; Па: $a = 2/9$ ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{r,II} = -0.6$; $\varphi(u)$ имеет перегиб); $\varphi(0) \approx 0.00838$, $\varphi'(0) \approx 0.0266$, $\varphi''(0) \approx 2.317$; Пб: $a = 35/36$ ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{r,II} = 0$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция); $\varphi(0) \approx 0.143$, $\varphi'(0) \approx 0.752$, $\varphi''(0) = 0$; Пс: $a = 10/9$ ($a < \lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a$, $i_{r,II} = 1/9$); $\varphi(0) \approx 0.163$, $\varphi'(0) \approx 0.965$, $\varphi''(0) = -\infty$; Пд: $a = 10/3$ ($a > \lambda + \lambda_1$, $i_{r,II} = 17/9$); $\varphi(0) \approx 0.320$, $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

3.2.2. Страховая модель с инвестициями в безрисковые активы ($b = 0$, $\lambda_1 > \lambda$, $m > n$). Графики на фиг. 8 иллюстрируют утверждения теоремы 5 при $\lambda_1 n > \lambda m$ (фиг. 8а) и $\lambda_1 n < \lambda m$ (фиг. 8б). Вычислительный алгоритм описан в п.2.5.5. Значения $\varphi(0)$ и конечные значения $\varphi'(0)$ (при $\lambda + \lambda_1 > a$)



Фиг. 7.



Фиг. 8.

находятся численно; для нахождения конечной величины $\varphi''(0)$ (при $\lambda + \lambda_1 > 2a$) и ФР $i_{r, II}$ используются соотношения (см. (2.110), (2.22))

$$\varphi''(0) = -\varphi'(0)i_{r, II}/[mn(\lambda + \lambda_1 - 2a)], \quad i_{r, II} = a(m - n) + \lambda_1 n - \lambda m. \quad (3.3)$$

Данные к графикам на фиг. 8а: $n = 0.7, \lambda_1 = 20/9 (\lambda_1 n - \lambda m = 5/9)$; 2: $a = 0; \varphi(0) \approx 0.246, \varphi'(0) \approx 0.186, \varphi''(0) \approx -0.0458$; Па: $a = 5/9 (\lambda + \lambda_1 > 2a, i_{r, II} = 13/18)$; $\varphi(0) \approx 0.429, \varphi'(0) \approx 0.389, \varphi''(0) \approx -0.190$; Пб: $a = 20/9 (a < \lambda + \lambda_1 < 2a)$; $\varphi(0) \approx 0.545, \varphi'(0) \approx 1.105, \varphi''(0) = -\infty$; Пс: $a = 35/9 (a > \lambda + \lambda_1)$; $\varphi(0) \approx 0.585, \varphi'(0) = \infty, \varphi''(0) = -\infty$.

Данные к графикам на фиг. 8б (при разных знаках ФР): $n = 0.2, \lambda_1 = 10/9 (\lambda_1 n - \lambda m = -7/9)$; Па: $a = 2/9 (\lambda + \lambda_1 > 2a, i_{r, II} = -0.6)$; $\varphi(u)$ имеет перегиб; $\varphi(0) \approx 0.0121, \varphi'(0) \approx 0.0384, \varphi''(0) \approx 0.069$; Пб: $a = 35/36 (\lambda + \lambda_1 > 2a, i_{r, II} = 0)$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция; $\varphi(0) \approx 0.152, \varphi'(0) \approx 0.802, \varphi''(0) = 0$; Пс: $a = 10/9 (a < \lambda + \lambda_1 < 2a, i_{r, II} = 1/9)$; $\varphi(0) \approx 0.172, \varphi'(0) \approx 1.02, \varphi''(0) = -\infty$; Пд: $a = 10/3 (a > \lambda + \lambda_1)$; $\varphi(0) \approx 0.323, \varphi'(0) = \infty, \varphi''(0) = -\infty$.

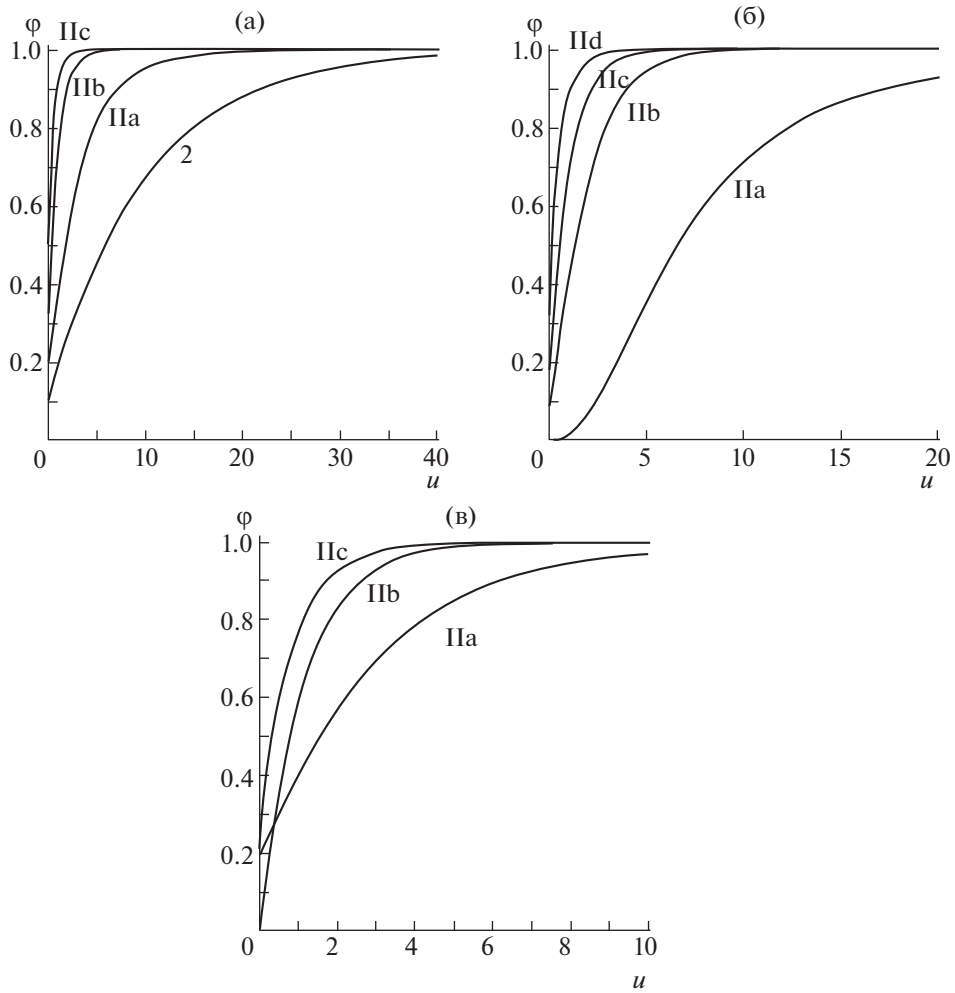
Как и в случае I модели, сравнение данных к графикам на фиг. 7б с данными к графикам на фиг. 8б и самих графиков показывает: при доходности акций, равной процентной ставке по банковскому счету, вложение ТК в безрисковые активы является более выгодным, чем в рисковые, особенно при больших значениях НК; в силу асимптотического поведения решений, такое вложение ТК при больших НК будет более выгодным и при любой меньшей процентной ставке по вкладам (ср. здесь с п. 3.2.5).

3.2.3. Модель типа благотворительного фонда с инвестициями в рисковые активы ($b \neq 0, 0 \leq \lambda_1 < \lambda$).

Графики на фиг. 9а, б, в иллюстрируют утверждения теоремы 4 (с учетом замечания 24): на фиг. 9а они относятся к случаю $\lambda_1 n > \lambda m$ и $n > m$, на фиг. 9б – к случаю $\lambda_1 n < \lambda m$ и $n < m$ (при положительных и отрицательных значениях ФР), на фиг. 9в – к обоим случаям при нулевых ФР. Для примеров с $\lambda_1 = 0$, когда II модель с отсутствием взносов совпадает с I моделью при $c = 0$, расчеты осуществляются по алгоритму п. 1.6.4.

Данные к графикам на фиг. 9а: $\lambda_1 = 5/9, n = 2.5 (\lambda_1 n - \lambda m = 7/18)$; 2: $a = b = 0; \varphi(0) = 0.1, \varphi'(0) = 0.09, \varphi''(0) = -0.009$; Па, б, в: $b = 1/3$; Па: $a = 2/9 (\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a, i_{r, II} = 1/18)$; $\varphi(0) \approx 0.185, \varphi'(0) \approx 0.194, \varphi''(0) \approx -0.0043$; Пб: $a = 10/9 (a < \lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a, i_{r, II} = -23/18)$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция (!); $\varphi(0) \approx 0.285, \varphi'(0) \approx 0.849, \varphi''(0) = -\infty$; Пс: $a = 10/3 (a > \lambda + \lambda_1, i_{r, II} = -83/18)$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция (!); $\varphi(0) \approx 0.324, \varphi'(0) = \infty, \varphi''(0) = -\infty$.

Данные к графикам на фиг. 9б: $b = 1/3$; Па: $\lambda_1 = 0; a = 2/9 (\lambda > b^2 + 2a, i_{r, I} = -7/9)$; $\varphi(u)$ имеет перегиб; $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0; \mu_1 = 2, P_1(\mu_1) \approx 0.0596$; Пб, в, д: $\lambda_1 = 5/9, n = 0.5 (\lambda_1 n - \lambda m = -13/18)$; Пб: $a = 5/9 (\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a, i_{r, II} = -4/9)$; $\varphi(u)$ имеет перегиб; $\varphi(0) \approx 0.0855, \varphi'(0) \approx 0.257, \varphi''(0) \approx 0.685$; Пс: $a = 10/9 (a < \lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a, i_{r, II} = -3/18)$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция (!); $\varphi(0) \approx 0.160, \varphi'(0) = 1.012, \varphi''(0) = -\infty$; Пд: $a = 23/9 (a > \lambda + \lambda_1, i_{r, II} = 5/9)$; $\varphi(0) \approx 0.239, \varphi'(0) = \infty, \varphi''(0) = -\infty$.



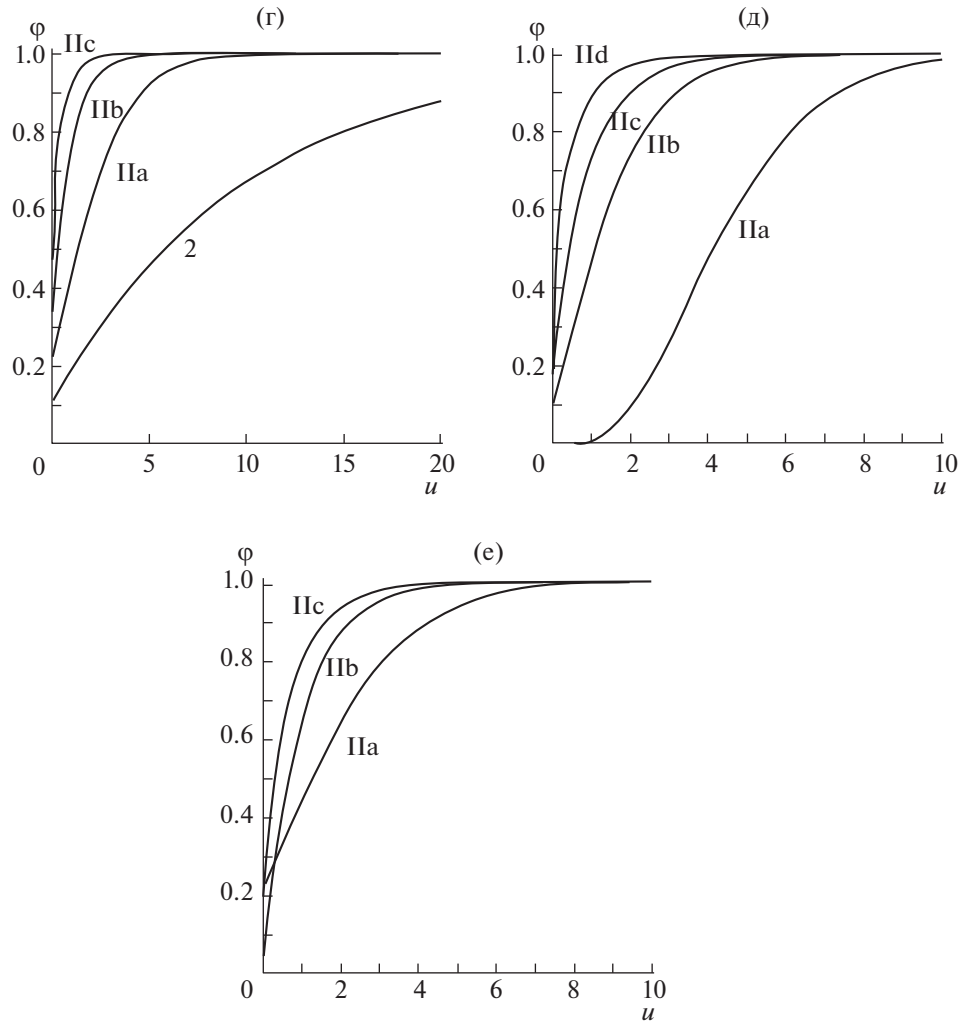
Фиг. 9.

Замечание 28. Неравенство $i_{r, II} < 0$ в теореме 4 есть необходимое, но не достаточное условие для неотрицательности $\varphi''(0)$ и существования у решения $\varphi(u)$ точки перегиба при некотором значении $u > 0$: должно выполняться дополнительное требование $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$. Здесь же для графиков IIb, c на фиг. 9а и графика IIc на фиг. 9б это требование не выполнено, и точка перегиба отсутствует. Это обстоятельство отличает II модель от I, для которой неравенство $i_{r, II} < 0$ есть необходимое и достаточное условие для существования у решения $\varphi(u)$ точки перегиба при некотором значении $u > 0$ (в том числе, при $c = 0$ и $b^2 > 0$, а также при $c = b = 0$, когда $\hat{u} = -i_{r, I}/a$).

Данные к графикам на фиг. 9в (с нулевыми ФР): IIa : $\lambda_1 = 5/9$, $n = 2.5$ ($\lambda_1 n - \lambda m = 7/18$), $a = 7/27$ ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$); $\varphi(0) \approx 0.196$, $\varphi'(0) \approx 0.211$, $\varphi''(0) = 0$; IIb : $\lambda_1 = 0$; $a = 1$ ($a = \lambda$); $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = P_1(0) \approx 0.895$, $\varphi''(0) \approx -0.8056$; IIc : $\lambda_1 = 5/9$, $n = 0.5$ ($\lambda_1 n - \lambda m = -13/18$); $a = 13/9$ ($a < \lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a$); $\varphi(0) \approx 0.188$, $\varphi'(0) \approx 1.87$, $\varphi''(0) = -\infty$.

3.2.4. Модель типа благотворительного (фонда с инвестициями в безрисковые активы ($b = 0$, $0 \leq \lambda_1 < \lambda$)). Графики на фиг. 9г, д иллюстрируют утверждения теоремы 5 (с учетом замечания 24): на фиг. 9г графики относятся к случаю $\lambda_1 n > \lambda m$ и $n > m$, на фиг. 9д – к случаю $\lambda_1 n < \lambda m$ и $n < m$ (при положительных и отрицательных значениях ФР), на фиг. 9е – к обоим случаям при нулевых ФР. Остаются справедливыми соотношения (3.3) для вычисления ФР и конечных значений $\varphi''(0)$ (при $\lambda + \lambda_1 > 2a$). Для примеров с $\lambda_1 = 0$, когда II модель совпадает с I при $b = c = 0$, расчеты осуществляются по формулам п. 1.7.

Данные к графикам на фиг. 9г: $\lambda_1 = 5/9$, $n = 2.5$ ($\lambda_1 n - \lambda m = 7/18$); 2 : $a = 0$; $\varphi(0) = 0.1$, $\varphi'(0) = 0.09$, $\varphi''(0) = -0.009$; IIa : $a = 2/9$ ($\lambda + \lambda_1 > 2a$, $i_{r, II} = 5/9$); $\varphi(0) \approx 0.209$, $\varphi'(0) \approx 0.219$, $\varphi''(0) \approx -0.0307$; IIb :



Фиг. 9. Окончание.

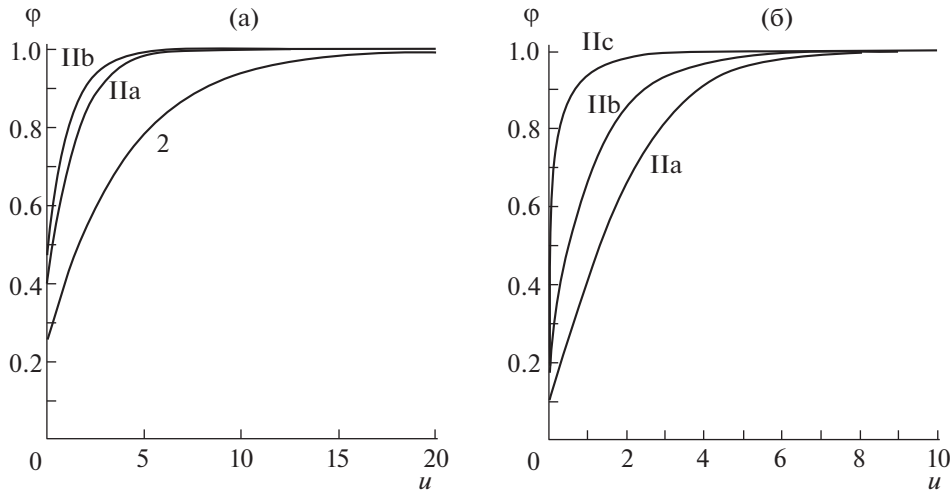
$a = 10/9$ ($a < \lambda + \lambda_1 < 2a$, $i_{r, II} = -23/18$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция (!)); $\varphi(0) \approx 0.289$, $\varphi'(0) \approx 0.875$, $\varphi''(0) = -\infty$; IIc : $a = 10/3$ ($a > \lambda + \lambda_1$, $i_{r, II} = -83/18$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция (!)); $\varphi(0) \approx 0.325$, $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Данные к графикам на фиг. 9д: IIa : $\lambda_1 = 0$; $a = 2/9$ ($\lambda > 2a$, $i_{r, I} = -7/9$; $\varphi(u)$ имеет перегиб в точке $u = \hat{u} = 3.5$); $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$; IIb, c, d : $\lambda_1 = 5/9$, $n = 0.5$ ($\lambda_1 n - \lambda m = -13/18$); IIb : $a = 5/9$ ($\lambda + \lambda_1 > 2a$, $i_{r, II} = -4/9$; $\varphi(u)$ имеет перегиб); $\varphi(0) \approx 0.0967$, $\varphi'(0) = 0.291$, $\varphi''(0) = 0.582$; IIc : $a = 10/9$ ($a < \lambda + \lambda_1 < 2a$, $i_{r, II} = -3/18$; $\varphi(u)$ – вогнутая функция (!)); $\varphi(0) \approx 0.167$, $\varphi'(0) = 1.07$, $\varphi''(0) = -\infty$; IIд : $a = 23/9$ ($a > \lambda + \lambda_1$; $i_{r, II} = 5/9$); $\varphi(0) \approx 0.241$, $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Замечание 29. Имеет место аналог замечания 28 с заменой: теоремы 4 на теорему 5, условия $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$ на условие $\lambda + \lambda_1 > 2a$ и фиг. 9а, б на фиг. 9г, д соответственно.

Данные к графикам на фиг. 9е (при нулевых ФР): IIa : $\lambda_1 = 5/9$, $n = 2.5$ ($\lambda_1 n - \lambda m = 7/18$), $a = 7/27$ ($\lambda + \lambda_1 > 2a$); $\varphi(0) \approx 0.217$, $\varphi'(0) \approx 0.234$, $\varphi''(0) = 0$; IIb : $\lambda_1 = 0$; $a = 1$ ($a = \lambda$; $\varphi(u) = 1 - \exp(-u)$); $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, $\varphi''(0) = -1$; IIc : $\lambda_1 = 5/9$, $n = 0.5$ ($\lambda_1 n - \lambda m = -13/18$); $a = 13/9$ ($a < \lambda + \lambda_1 < 2a$); $\varphi(0) \approx 0.193$, $\varphi'(0) \approx 1.96$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Как и в случае I модели, сравнение данных к графикам на фиг. 9а, б с данными к графикам на фиг. 9г, д соответственно и самих графиков показывает: для моделей типа благотворительных фондов справедливы те же выводы, что и при аналогичном сравнении графиков на фиг. 7б и фиг. 8б и данных к ним для моделей страхования.



Фиг. 10.

На каждой из фиг. 7–9 самые верхние графики отвечают акциям с наибольшей доходностью.

3.2.5. Сравнение результатов расчетов для II модели с рисковыми и безрисковыми инвестициями с различной доходностью. Такое сравнение дано на фиг. 10 при положительной и отрицательной нагрузках безопасности соответственно. При этом, как и для I модели, при сравнении ВНР $\varphi(u)$ для рискованных активов ($b \neq 0$) берется значение a большее, чем для безрисковых ($b = 0$), так как естественно предполагать, что доходность акций выше процентной ставки по банковскому счету.

Графики на фиг. 10а отвечают случаю $\lambda_1 n > \lambda m$: $n = 0.8$, $\lambda_1 = 2$ ($\lambda_1 n - \lambda m = 0.6$); 2 : $a = b = 0$; $\varphi(0) = 0.250$, $\varphi'(0) = 0.1875$, $\varphi''(0) = -0.046875$; IIa : $b = 0$, $a = 0.4$ ($\lambda + \lambda_1 > 2a$, $i_{r, II} = 0.68$); $\varphi(0) \approx 0.399$, $\varphi'(0) \approx 0.345$, $\varphi''(0) \approx -0.133$; IIb : $b^2 = 0.2$, $a = 1$ ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{r, II} = 0.8$); $\varphi(0) \approx 0.456$, $\varphi'(0) \approx 0.513$, $\varphi''(0) \approx -0.641$.

Графики на фиг. 10б отвечают случаю $\lambda_1 n < \lambda m$: $n = 0.2$, $\lambda_1 = 2$ ($\lambda_1 n - \lambda m = -0.6$); 2 : IIa : $b = 0$, $a = 0.4$ ($\lambda + \lambda_1 > 2a$, $i_{r, II} = -0.28$; $\varphi(u)$ имеет перегиб); $\varphi(0) \approx 0.113$, $\varphi'(0) \approx 0.261$, $\varphi''(0) \approx 0.166$; IIb : $b^2 = 0.2$, $a = 1$ ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{r, II} = 0.2$); $\varphi(0) \approx 0.229$, $\varphi'(0) \approx 0.687$, $\varphi''(0) \approx -0.859$; IIc : $b^2 = 0.2$, $a = 5$ ($a > \lambda + \lambda_1$, $i_{r, II} = 3.4$); $\varphi(0) \approx 0.480$, $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Самые верхние графики на фиг. 10 отвечают акциям с наибольшей доходностью. В силу асимптотического поведения решений, при больших значениях u кривые 2 и IIa на фиг. 10а (кривая IIa на фиг. 10б) опережают кривую IIb (опережает кривые IIb, c).

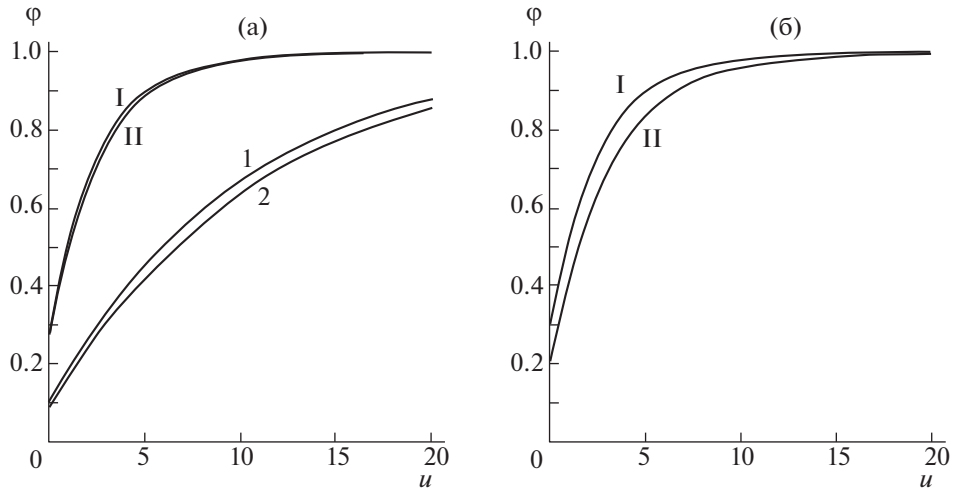
Вывод к фиг. 10: в некотором диапазоне изменения значений НК ($u \in [0, U]$) выгоднее вкладывать ТК в рискованные активы (ср. здесь с п. 3.2.3).

3.3. Сравнение результатов расчетов для I и II моделей страхования

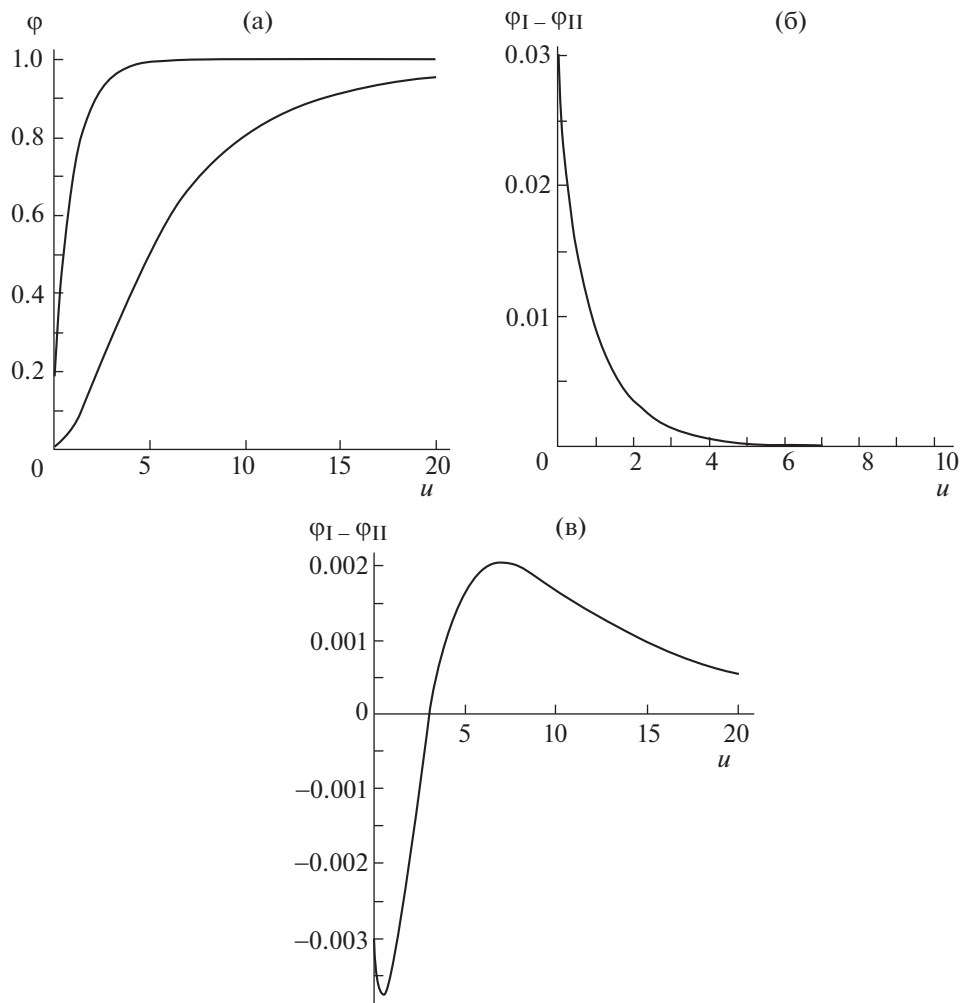
В этом подразделе не рассматриваются модели типа благотворительного фонда, т.е. случаи $c = \lambda_1 = 0$, когда обе модели совпадают, и случаи $0 < \lambda_1 < \lambda$, относящиеся только ко II модели.

При сравнении результатов расчетов выполняются естественные условия: значения параметров a , b^2 , λ , m задаются одинаковыми для I и II моделей, а значения c в I модели связаны со значениями λ_1 и n во II модели соотношением $\lambda_1 n = c$, т.е. ожидаемые размеры премий в единицу времени задаются равными для I и II моделей.

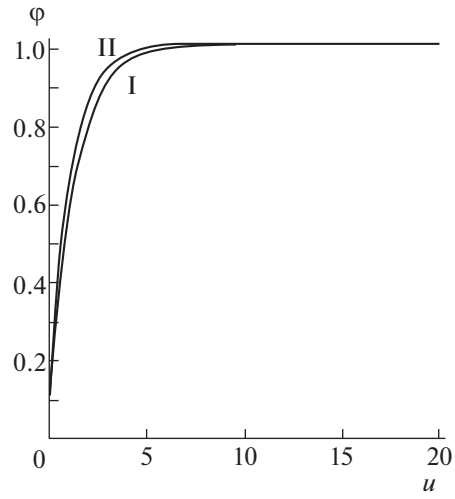
3.3.1. Страховые модели с инвестициями в рискованные активы ($b \neq 0$). Графики данного п. 3.3.1 иллюстрируют утверждения теорем 1 и 4. В условиях этих теорем, в частности, решения соответствующих задач для I и II моделей имеют при больших u одинаковое асимптотическое поведение в главном (с точностью до неизвестной положительной постоянной в представлениях (1.35) и (2.66) соответственно). При расчетах используются соотношения (3.1) для I модели и (3.2) для II модели.



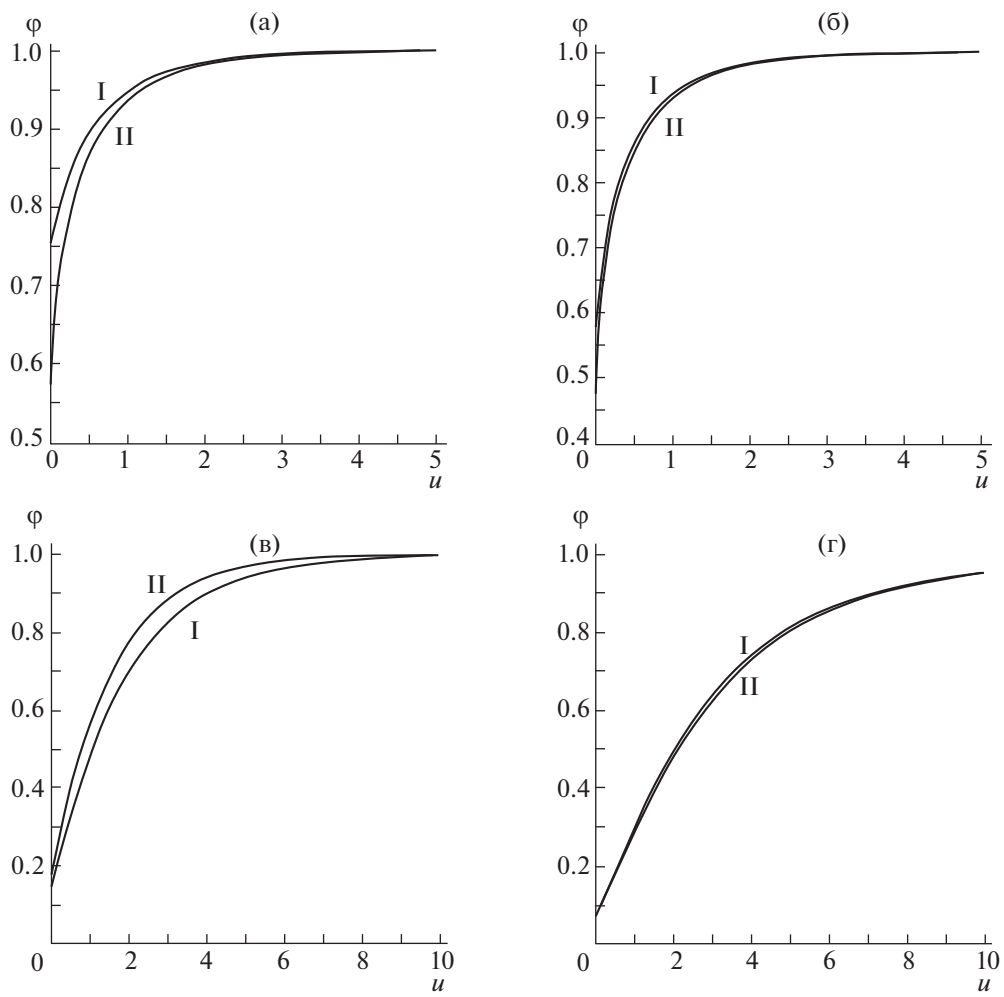
Фиг. 11.



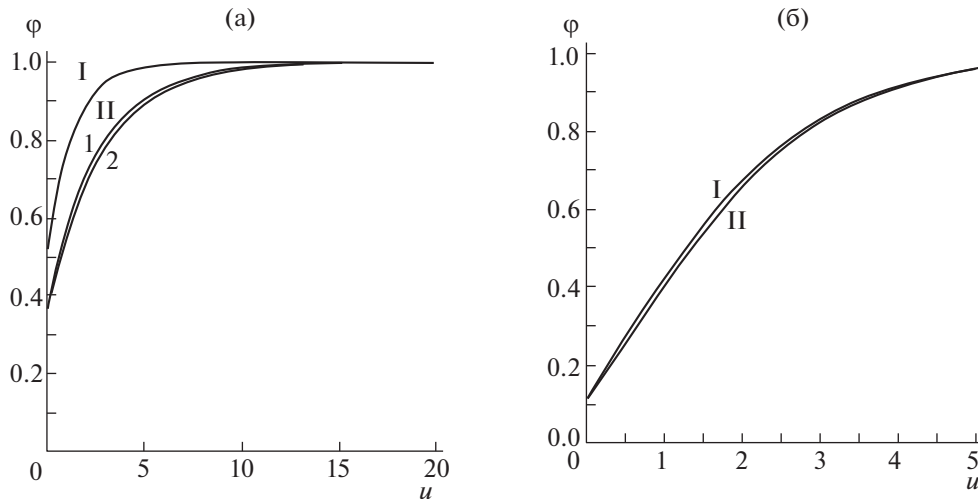
Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Графики на фиг. 11 отвечают случаю $c = \lambda_1 n > \lambda m$: 1, I: $c = 10/9$ ($c - \lambda m = 1/9$); 2, II (фиг. 11а): $n = 0.1, \lambda_1 = 100/9$; II (фиг. 11б): $n = 0.9, \lambda_1 = 100/81$ ($\lambda_1 n - \lambda m = 1/9$). Данные к графикам 1,2: $a = b = 0$; 1 : $\varphi(0) = 0.1, \varphi'(0) = 0.09, \varphi''(0) = -0.009$; 2 : $\varphi(0) \approx 0.0917, \varphi'(0) \approx 0.0833, \varphi''(0) \approx -0.00764$.

Данные к графикам I, II: $a = 2/9, b = 1/3$ ($\lambda > a, \lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$); I : $\varphi(0) \approx 0.2944, \varphi'(0) \approx 0.2650, \varphi''(0) \approx -0.07949$; II (фиг. 11а): $\varphi(0) \approx 0.2798, \varphi'(0) \approx 0.2586, \varphi''(0) \approx -0.0696$; II (фиг. 11б): $\varphi(0) \approx 0.2054, \varphi'(0) \approx 0.2153, \varphi''(0) \approx -0.0190$. При этом максимум разности $\varphi_I(u) - \varphi_{II}(u)$ для фиг. 11а (фиг.11б) достигается при $u \approx 1.0$ ($u \approx 1.2$) и примерно равен 0.017 (0.115).

Графики на фиг. 12, 13 отвечают случаю $c = \lambda_1 n < \lambda m$ при различных знаках ФР; зафиксированы значения: $b = 1/3$; I : $c = 2/9$; II : $n = 0.2, \lambda_1 = 10/9$ ($c - \lambda m = \lambda_1 n - \lambda m = -7/9$).

На фиг. 12а расчетные данные для I и II моделей совпадают с графической точностью; различие в другом масштабе см. на фиг. 12б, в, где приведены графики разностей $\varphi_I(u) - \varphi_{II}(u)$: график на фиг. 12б (на фиг. 12в) отвечает верхнему (нижнему) графику на фиг. 12а.

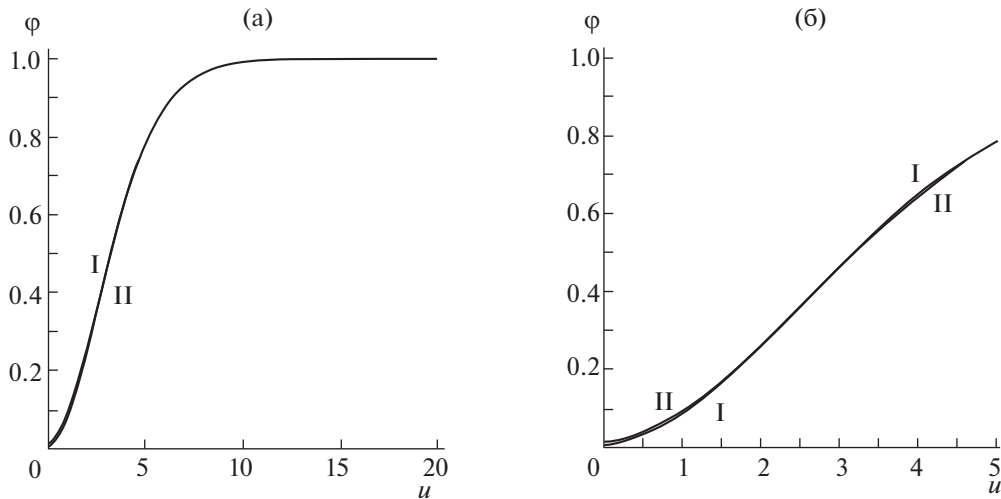
Для верхнего графика на фиг. 12а ФР положительны: $a = 10/9$; I : ($a > \lambda, i_{r, I} = 1/3$); $\varphi(0) \approx 0.1937, \varphi'(0) \approx 0.8716, \varphi''(0) \approx -1.30745$; II: ($a < \lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a, i_{r, II} = 1/9$); $\varphi(0) \approx 0.1631, \varphi'(0) \approx 0.9654, \varphi''(0) = -\infty$.

Для нижнего графика на фиг. 12а ФР отрицательны: $a = 2/9$; I: ($a < \lambda, i_{r, I} = -5/9$); $\varphi(0) \approx 0.00527, \varphi'(0) \approx 0.0237, \varphi''(0) \approx 0.05927$; II : ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a, i_{r, II} = -0.6$); $\varphi(0) \approx 0.00838, \varphi'(0) \approx 0.02662, \varphi''(0) \approx 0.05134$.

Для графиков на фиг. 13 ФР нулевые: I : $a = 7/9$ ($\lambda > a$); $\varphi(0) \approx 0.120, \varphi'(0) \approx 0.542, \varphi''(0) = 0$; II : $a = 35/36$ ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$); $\varphi(0) \approx 0.143, \varphi'(0) \approx 0.752, \varphi''(0) = 0$.

Видно, что при отрицательных нагрузках безопасности выделяются 3 случая:

- 1) при положительных значениях ФР график по I модели выше графика по II модели (см. фиг. 12б);
- 2) при отрицательных значениях ФР картина более сложная (см. фиг. 12в): при малых НК (в области наибольшего риска) график по I модели ниже графика по II модели; существует точка $u = u_{ins} > 0$, в которой значения функций для I и II моделей совпадают; при всех $u > u_{ins}$ график по I модели снова выше графика по II модели; в некоторой точке отрезка $[0, u_{ins}]$ разность $\varphi_I(u) - \varphi_{II}(u)$ достигает отрицательного минимума, а при $u > u_{ins}$ существует точка, где разность $\varphi_I(u) - \varphi_{II}(u)$ достигает своего положительного максимума. Таким образом, в области наиболее высокого риска, т.е. при малых значениях НК, в рассматриваемом случае ВНР оказывается больше во II модели, чем в I модели. Это означает, что дополнительный независимый риск, возникающий при введении случайности в процесс поступления премий (при сохранении их ожидаемых значений в единицу времени), позволяет более эффективно компенсировать риск, связанный с выплатами по требованиям, при малых значениях НК. При умеренных и больших значениях НК, т.е. в более стабильной ситуации, модель с детерминированными премиями дает более высокие значения



Фиг. 16.

ВНР. Заметим здесь также, что, как известно, значения ВНР могут быть малы, а потери от принимаемых решений на основании данных о ВНР – велики.

3) При нулевых ФР график по II модели выше графика по I модели (см. фиг. 13): доходность акций для II модели больше, чем для I; максимум разности для графиков на фиг. 13 достигается при $u \approx 0.8$ и примерно равен 0.0825.

Для всех примеров расчетов на фиг. 14 зафиксировано значение $b^2 = 0.2$.

Графики на фиг. 14а отвечают случаю $c = \lambda_1 n > \lambda m$; зафиксированы значения $a = 4$; I : $c = 1.6$ ($c - \lambda m = 0.6$); II : $n = 0.8$, $\lambda_1 = 2$ ($\lambda_1 n - \lambda m = 0.6$; $i_{r, II} = 1.4$). Данные к графикам: I : ($a > \lambda$; $i_{r, I} = 3.6$) $\varphi(0) \approx 0.7566$, $\varphi'(0) \approx 0.4729$, $\varphi''(0) \approx -1.3595$ II: ($a > \lambda + \lambda_1$, $i_{r, II} = 1.4$); $\varphi(0) \approx 0.5705$, $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Графики на фиг. 14б, в, г отвечают случаю $c = \lambda_1 n < \lambda m$ при разных знаках ФР; зафиксированы значения: I : $c = 0.4$ ($c - \lambda m = -0.6$); II : $n = 0.2$, $\lambda_1 = 2$ ($\lambda_1 n - \lambda m = -0.6$).

Для графиков на фиг. 14б ФР положительны: $a = 4$; I : ($i_{r, I} = 3.4$); $\varphi(0) \approx 0.5830$, $\varphi'(0) \approx 1.4575$, $\varphi''(0) \approx -12.3888$; II : ($a > \lambda + \lambda_1$, $i_{r, II} = 2.6$); $\varphi(0) \approx 0.4559$, $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Для графиков на фиг. 14в ФР нулевые: I : $a = 0.6$ ($\lambda > a$); $\varphi(0) \approx 0.151$, $\varphi'(0) \approx 0.377$, $\varphi''(0) = 0$; II : $a = 0.75$ ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$); $\varphi(0) \approx 0.178$, $\varphi'(0) \approx 0.474$, $\varphi''(0) = 0$.

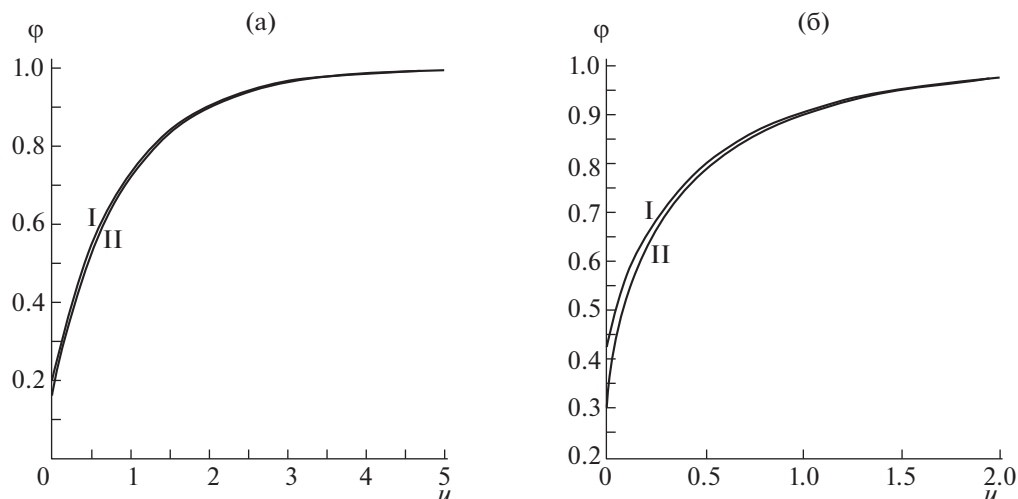
Для графиков на фиг. 14г ФР отрицательные: $a = 0.4$; I : ($i_{r, I} = -0.2$); $\varphi(0) \approx 0.0811$, $\varphi'(0) \approx 0.203$, $\varphi''(0) \approx 0.1015$; II : ($\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{r, II} = -0.28$); $\varphi(0) \approx 0.0804$, $\varphi'(0) \approx 0.185$, $\varphi''(0) \approx 0.1295$.

На фиг. 14а, б, г графики по I модели выше графиков по II модели, а на фиг. 14в – наоборот: доходность акций здесь для II модели больше, чем для I (максимум разности для графиков на фиг. 14в достигается при $u \approx 1.3$ и примерно равен 0.0803).

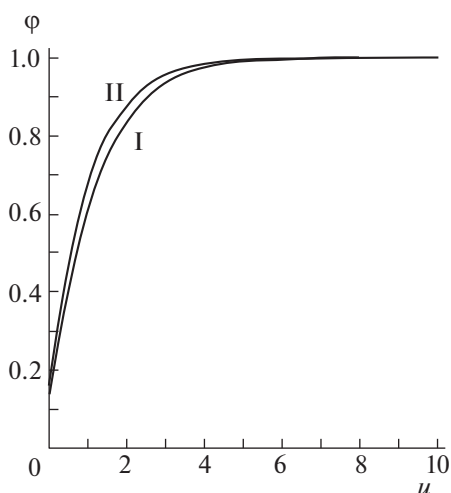
3.3.2. Страховые модели с инвестициями в безрисковые активы ($b = 0$). Графики данного п. 3.3.2 иллюстрируют утверждения подраздела 1.5 и теоремы 5. Для обеих моделей в условиях этих утверждений решения соответствующих задач имеют при больших u одинаковое асимптотическое поведение в главном (с точностью до положительной постоянной в представлениях (2.111) и (1.61), причем постоянный множитель $D(m, a, c, \lambda)$ в (1.61) известен точно и вычисляется по формулам (1.54), (1.55)). При расчетах используются соотношения (3.1) для I модели (с точным вычислением точки перегиба $\hat{u} = -i_{r, I}/a$) и соотношения (3.3) для II модели.

Графики на фиг. 15а отвечают случаю $c = \lambda_1 n > \lambda m$: 1, I : $c = 1.6$ ($c - \lambda m = 0.6$); 2, II : $n = 0.08$, $\lambda_1 = 20$ ($\lambda_1 n - \lambda m = 0.6$); 1, 2: $a = 0$; 1: $\varphi(0) = 0.375$, $\varphi'(0) = 0.234$, $\varphi''(0) = -0.08775$; 2: $\varphi(0) \approx 0.357$, $\varphi'(0) \approx 0.230$, $\varphi''(0) \approx -0.0821$; 1, II: $a = 0.4$ ($\lambda > a$, $\lambda + \lambda_1 > 2a$, $i_{r, I} = 1$, $i_{r, II} = 124/125$); I: $\varphi(0) \approx 0.530$, $\varphi'(0) \approx 0.331$, $\varphi''(0) \approx -0.207$; II: $\varphi(0) \approx 0.513$, $\varphi'(0) \approx 0.336$, $\varphi''(0) \approx -0.206$.

Графики на фиг. 15б отвечают случаю $c = \lambda_1 n < \lambda m$ при отрицательных значениях ФР: $a = 0.4$; I: $c = 0.4$ ($c - \lambda m = -0.6$; $\lambda > a$, $i_{r, I} = -0.2$); $\varphi(u)$ имеет перегиб в точке $u = \hat{u} = 0.5$); $\varphi(0) \approx 0.115$,



Фиг. 17.



Фиг. 18.

$\varphi'(0) \approx 0.288$, $\varphi''(0) \approx 0.144$; II: $n = 0.2$, $\lambda_1 = 2$ ($\lambda_1 n - \lambda m = -0.6$; $\lambda + \lambda_1 > 2a$, $i_{r, II} = -0.28$; $\varphi(u)$ имеет перегиб); $\varphi(0) \approx 0.113$, $\varphi'(0) \approx 0.26$, $\varphi''(0) \approx 0.165$.

Графики на фиг. 16–18 отвечают случаю $c = \lambda_1 n < \lambda m$ при ФР с отрицательными (фиг. 16), положительными (фиг. 17) и нулевыми (фиг. 18) значениями. Для всех примеров расчетов зафиксированы значения: I: $c = 2/9$; II: $n = 0.2$, $\lambda_1 = 10/9$ ($c - \lambda m = \lambda_1 n - \lambda m = -7/9$).

Данные к графикам на фиг. 16а (на фиг. 16б – те же графики в другом масштабе): $a = 2/9$; I: ($i_{r, I} = -5/9$; $\varphi(u)$ имеет перегиб в точке $u = \hat{u} = 2.5$); $\varphi(0) \approx 0.007$, $\varphi'(0) \approx 0.031$, $\varphi''(0) \approx 0.0775$; II: ($\lambda + \lambda_1 > 2a$, $i_{r, II} = -0.6$; $\varphi(u)$ имеет перегиб); $\varphi(0) \approx 0.012$, $\varphi'(0) \approx 0.038$, $\varphi''(0) \approx 0.0684$. Кривые I и II пересекаются в точке $u = \tilde{u} \approx 2.03$, где $\varphi_I(\tilde{u}) = \varphi_{II}(\tilde{u}) \approx 0.265$.

Данные к графикам на фиг. 17а: $a = 10/9$; I: ($a > \lambda$, $i_{r, I} = 1/9$); $\varphi(0) \approx 0.205$, $\varphi'(0) = 0.921$, $\varphi''(0) \approx -0.46050$; II: ($a < \lambda + \lambda_1 < 2a$, $i_{r, II} = 1/9$), $\varphi(0) \approx 0.172$, $\varphi'(0) \approx 1.02$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Данные к графикам на фиг. 17б: $a = 25/9$; I: ($a > \lambda$, $i_{r, I} = 16/9$); $\varphi(0) \approx 0.429$, $\varphi'(0) = 1.93$, $\varphi''(0) \approx -15.44$; II: ($a > \lambda + \lambda_1$, $i_{r, II} = 13/9$); $\varphi(0) \approx 0.303$, $\varphi'(0) = \infty$, $\varphi''(0) = -\infty$.

Данные к графикам на фиг. 18 (с нулевыми ФР): I: $a = 7/9$; ($\lambda > a$); $\varphi(0) \approx 0.132$, $\varphi'(0) = 0.594$, $\varphi''(0) = 0$; II: $a = 35/36$; ($\lambda + \lambda_1 > 2a$); $\varphi(0) \approx 0.152$, $\varphi'(0) \approx 0.802$, $\varphi''(0) = 0$.

Видно, что при $b = 0$, т.е. вложения ТК в безрисковые активы, I и II модели довольно близки (по крайней мере при данных наборах значений параметров).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из центральных вопросов в динамических моделях страхования является определение или оценка вероятности неразорения (ВНР), являющейся традиционной детерминированной характеристикой платежеспособности страховой компании. Классическими результатами теории риска являются неравенство Лундберга и аппроксимация Крамера (см., например, [1]), из которых, в частности, следует, что при положительности нагрузки безопасности и при отсутствии тяжелых хвостов распределений страховых требований функция вероятности разорения (ВР) с ростом начального капитала (НК) экспоненциально убывает. Аналогичное утверждение остается верным и для многих других моделей коллективного риска в страховании, в частности для модели со стохастическими премиями, модели, описываемой винеровским процессом со сносом, и др. В то же время при погружении в финансовый рынок с акциями, моделируемыми геометрическим броуновским движением, использование простых стратегий инвестирования может существенно ослабить платежеспособность, приводя к асимптотически степенному убыванию ВР взамен экспоненциального (такие результаты, в частности, были ранее получены для различных моделей страхового риска в [13]–[15], [44], [45]).

В рассматриваемых в данной работе моделях страховых компаний, участвующих на финансовом рынке, динамика капитала описывается некоторым марковским процессом, удовлетворяющим соответствующему стохастическому дифференциальному уравнению. Исследование асимптотического поведения ВНР (неотрицательности на бесконечном интервале времени) такого процесса может осуществляться различными методами (см., например, применение для этих целей методов теории восстановления в [14], получение верхних и нижних асимптотических оценок для ВР в [44] и их использование в [13]). Однако исчерпывающая информация о поведении ВНР на всей неотрицательной полуоси (при всех возможных значениях НК) содержится в решении корректно поставленной задачи для ИДУ, порожденного инфинитезимальным оператором соответствующего процесса, при условии существования ее гладкого решения. Используя результаты из [10], [11] для рассматриваемых в данной работе моделей, мы полностью сводим проблему исследования ВНР и ее вычисления, изучения ее асимптотического поведения не только при больших, но и при малых значениях НК к задаче исследования сингулярных задач с ограничениями для ИДУ.

Предложенный подход позволил с единых позиций рассмотреть сразу несколько задач: помимо тех, что непосредственно соответствуют I и II моделям с положительными параметрами, изучить также задачи, отвечающие вырожденным случаям, когда некоторые из параметров (один или сразу несколько) приобретают нулевые значения, проследив при этом предельные сингулярные переходы по параметрам от исходных задач к вырожденным. Среди таких “вырожденных” моделей рассматриваются как уже встречавшаяся в литературе модель с вложением всего текущего капитала (ТК) в безрисковый актив в модели КЛ, так и не исследованная ранее аналогичная модель, построенная на базе КЛ со стохастическими премиями. Две другие полностью изученные в данной работе модели — это модели типа благотворительного фонда (при отсутствии страховых премий) с инвестициями как в рисковые, так и полностью в безрисковые активы.

Результатом исследования всех этих задач явился, в частности, вывод о противоположных эффектах влияния инвестиций в рисковые активы для малых и больших значений НК: в то время как при больших значениях НК использование рискованных активов при постоянной структуре инвестиционного портфеля не является благоприятным с точки зрения неразорения, при малых значениях НК (как особенно показывают случаи нарушения положительности нагрузки безопасности) рискованные активы являются эффективным инструментом минимизации совокупного риска, а следовательно, повышению платежеспособности страховщика: даже если при отсутствии инвестиций разорение неминуемо, при их наличии величина ВНР быстро нарастает с ростом НК, причем опережая (на некотором интервале значений НК) рост ВНР, соответствующей стратегии вложения всего ТК в безрисковые активы. (Точнее об этом говорят результаты исследования оптимального управления инвестициями в модели КЛ при наличии ограничений с целью минимизации ВР, опирающиеся, в частности, на результаты исследования I модели (см. [26] и цитируемую там литературу).)

Многочисленные расчеты, проведенные для всех рассмотренных моделей и подтверждающие адекватность полученных решений, проиллюстрированы графиками и пояснениями к ним, со-

держателями экономическую интерпретацию и качественные выводы о влиянии параметров модели на поведение ВНР (см., в частности, комментарии о влиянии такого показателя, как фактор риска).

Данная работа является завершающей в серии работ, посвященных исследованию ВНР в модели КЛ и ее модификации со стохастическими премиями в случае экспоненциальных распределений размеров страховых выплат и премий (если они случайны) и с инвестированием капитала на финансовом рынке при сохранении постоянной доли рискованных активов в портфеле. Дальнейшее развитие данной тематики видится авторам в следующих направлениях: распространение результатов на другие модели страхового риска — например, включающие диффузионную составляющую или предполагающие распределения размеров исков, отличные от экспоненциальных; использование более общих моделей динамики цены рискованных активов (модели Леви); изучение проблемы оптимального управления инвестициями в еще не исследованных на этот предмет моделях, в частности, в модели КЛ со стохастическими премиями.

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное отношение к работе и полезные замечания, способствующие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grandell J.* Aspects of Risk Theory. Berlin-NewYork: Springer, 1991.
2. *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. М: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
3. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джанс Д., Несбитт С., Хикман Дж.* Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001.
4. *Astussen S., Albrecher H.* Ruin probabilities. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability. V. 14. Singapore: World Scientific, 2010.
5. *Белкина Т.А., Колюхова Н.Б., Куркина А.О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: II. Модель Крамера–Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований // Обозрение прикладной и промышленной математики (секция: “Финансовая и страховая математика”). 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 3–24.
6. *Белкина Т.А., Колюхова Н.Б., Курочкин С.В.* Сингулярная начальная задача для линейного интегродифференциального уравнения, возникающего в моделях страховой математики // Intern. Scientific Journal Spectral and Evolution Problems. 2011. V. 21. № 1. P. 40–54 (Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University).
7. *Белкина Т.А., Колюхова Н.Б., Курочкин С.В.* Сингулярная краевая задача для интегродифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 10. С. 1812–1846.
8. *Belkina T., Konyukhova N., Kurochkin S.* Singular problems for integro-differential equations in dynamic insurance models // Differential and Difference Equations with Applications / Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2013. V. 47. P. 27–44.
9. *Белкина Т.А., Колюхова Н.Б., Курочкин С.В.* Сингулярные начальные и краевые задачи для интегродифференциальных уравнений в динамических моделях страхования с учетом инвестиций // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 53. С. 5–29.
10. *Белкина Т.А.* Теоремы достаточности для вероятности неразорения в динамических моделях страхования с учетом инвестиций // В сб.: “Анализ и моделирование экономических процессов” (под ред. В.З. Беленького). Вып. 8. М.: ЦЭМИ РАН, 2011. С. 61–74 (e-print: <http://www.cemi.rssi.ru/publication/books/>).
11. *Belkina T.A.* Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability // Markov Processes and Related Fields. 2014. V. 20. P. 505–525.
12. *Paulsen J., Gjessing H.K.* Ruin theory with stochastic return on investments // Advances in Applied Probability. 1997. V. 29. № 4. P. 965–985.
13. *Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous // Finance Stochast. 2002. V. 6. № 2. P. 227–235.
14. *Pergamenshchikov S., Zeitouny O.* Ruin probability in the presence of risky investments // Stochastic Process. Appl. 2006. V. 116. № 2. P. 267–278.
15. *Бойков А.В.* Стохастические модели капитала страховой компании и оценивание вероятности неразорения. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МИ им. В.А. Стеклова РАН, 2003.
16. *Ramos A.* Controlled Markov Models. An Application to the Ruin Problem (PhD. Thesis). Madrid: Universidad Carlos III de Madrid, 2009 (<http://e-archivo.uc3m.es/handle/10016/5631>).
17. *Bachelier L.* Theorie de la speculation // Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Superieure. 1900. V. 17. P. 21–86.

18. Белкина Т.А., Конохова Н.Б., Куркина А.О. Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения // Обзорение прикладной и промышленной математики (секция: “Финансовая и страховая математика”). 2009. Т. 16. Вып. 6. С. 961–981.
19. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
20. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
21. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
22. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
23. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
24. Биргер Е.С., Ляликова (Конохова) Н.Б. О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности // I: Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 6. С. 979–990; II: Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 3. С. 446–453.
25. Конохова Н.Б. Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 3. С. 629–645.
26. Belkina T., Hipp C., Luo S., Taksar M. Optimal constrained investment in the Cramer-Lundberg model // Scandinavian Actuarial Journal. 2014. Iss. 5. P. 383–404.
27. Конохова Н.Б. Сингулярные задачи Коши для сингулярно возмущенных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // I: Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 1. С. 52–61; II: Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 4. С. 491–500.
28. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965.
29. Gingold H., Rosenblat S. Differential equations with moving singularities // SIAM J. Math. Anal. 1976. V. 7. № 6. P. 942–957.
30. Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 47. Вып. 3. С. 549–553.
31. Zinchenko N., Andrusiv A. Risk processes with stochastic premiums // Theory of Stoch. Proc. 2008. V. 14(30). № 3–4. P. 189–208.
32. Tetnov G. Risk models with stochastic premium and ruin probability estimation // J. Math. Sci. 2014. V. 196. № 1. P. 84–96.
33. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
34. Конохова Н.Б. Сингулярные задачи Коши для некоторых систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. № 8. С. 1340–1347.
35. Konyukhova N.B. Singular problems for systems of nonlinear functional-differential equations // Intern. Scientific Journal Spectral and Evolution Problems. 2010. V. 20. P. 199–214 (Simferopol: Taurida National V. Ver-nadsky University).
36. Абрамов А.А. О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 4. С. 733–737.
37. Абрамов А.А., Балла К., Конохова Н.Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.
38. Абрамов А.А., Конохова Н.Б., Балла К. Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Comput. Math. Banach Center Publ. (Warsaw: PWN – Polish Scient. Pubis.). 1984. V. 13. P. 319–351.
39. Абрамов А.А., Конохова Н.Б. Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
40. Abramov A.A., Konyukhova N.B. Transfer of admissible boundary conditions from a singular point for systems of linear ordinary differential equations // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1986. V. 1. № 4. P. 245–265 (VNU Science Press, Utrecht, The Netherlands).
41. Абрамов А.А., Диткин В.В., Конохова Н.Б., Парийский Б.С., Ульянова В.И. Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 5. С. 1155–1173.
42. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.
43. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
44. Kalashnikov V., Norberg R. Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments // Stoch. Proc. Appl. 2002. V. 98. P. 211–228.
45. Laubis B., Lin J.-E. Optimal investment allocation in a jump diffusion risk model with investment: a numerical analysis of several examples // Proc. 43rd Actuarial Research Conf. 2008 (e-print: <http://www.soa.org/news-and-publications/publications/proceedings/arch/arch-2009-issl.aspx>).