

УДК 519.624.2

ВЫЧИСЛЕНИЕ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ I РОДА ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АРГУМЕНТА И ПАРАМЕТРОВ

© 2015 г. А. А. Абрамов*, **, Е. Д. Калинин*, **, С. В. Курочкин*

(* 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН;

** 141700 Долгопрудный, М. о., Институтский пер., 9, МФТИ)

e-mail: alalabr@ccas.ru; e.kalinin@inbox.ru; kuroch@ccas.ru

Поступила в редакцию 06.11.2014 г.

Предложены методы: а) нахождения собственных значений волнового сфероидального уравнения с комплекснозначными параметрами, расположенных в заданной области комплексной плоскости; б) вычисления значений соответствующей функции для комплексных значений аргумента. Библ. 8. Фиг. 2. Табл. 2.

Ключевые слова: волновые сфероидальные функции, спектральная задача, рекуррентные формулы, численная устойчивость.

DOI: 10.7868/S0044466915050038

ВВЕДЕНИЕ

Сфероидальные функции играют большую роль в математической физике (см., например, [1]). В настоящее время существенной является задача вычисления этих функций для комплексных значений параметров и аргумента (см., например, [2]–[5]). Для этого случая в настоящей работе рассматриваются следующие вопросы: вычисление собственных значений возникающей спектральной задачи и вычисление сфероидальной функции I рода при значениях аргумента, не превосходящих или несущественно превосходящих по абсолютной величине единицу.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

В комплексной области рассматривается уравнение

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{du}{dz} \right) + \left(\lambda + 4\theta(1-z^2) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) u = 0, \quad (1.1)$$

где λ , θ , m – комплексные параметры уравнения, θ и m заданы. Это уравнение имеет три особые точки: $+1$ и -1 – регулярные точки с показателями $\pm m/2$, и ∞ – иррегулярную точку. В регулярных точках соответствующие два линейно независимых решения ведут себя следующим образом:

$$u_{1,2}(z) \sim (1-z^2)^{\pm m/2} \quad \text{при} \quad m \neq 0,$$

$$u_1(z) \sim \text{const}, \quad u_2(z) \sim \ln(1-z^2) \quad \text{при} \quad m = 0.$$

Так как в уравнение входит только m^2 , то без ограничения общности можно считать, что $\text{Re}(m) \geq 0$. Далее предполагаем, что $\text{Re}(m) > 0$ или $m = 0$. Случай $\text{Re}(m) = 0$, $m \neq 0$, не рассматривается, так как тогда каждое решение уравнения (1.1) ограничено в окрестности точек $+1$ и -1 и рассматриваемая далее спектральная задача не возникает.

Сфероидальная функция I рода определяется как нетривиальное решение уравнения (1.1), ограниченное в окрестности точек $+1$ и -1 . Эта функция может быть неоднозначной. При заданных θ и m тем самым возникает спектральная задача, в которой λ – спектральный параметр.

Переходя к новой искомой функции (см. [1])

$$v(z) = u(z)/(1-z^2)^{m/2}, \quad (1.2)$$

получаем уравнение

$$(1 - z^2)v'' - 2(m + 1)zv' + [\lambda - m^2 - m + 4\theta(1 - z^2)]v = 0. \tag{1.3}$$

Требование ограниченности функции $u(z)$ в окрестности точек $+1$ и -1 эквивалентно тому, что $v(z)$ — целая функция.

Далее будут использоваться функции $\tilde{P}_{m+r}^m(z)$, r — целое, связанные с присоединенными функциями Лежандра (см. [1], [6]) $P_{m+r}^m(z)$ следующим образом:

$$\tilde{P}_{m+r}^m(z) = \begin{cases} \frac{2^m \Gamma(m+1)}{\Gamma(2m+1)} P_{m+r}^m(z), & r = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & r = -1, -2, \dots \end{cases}$$

В частности,

$$\tilde{P}_m^m(z) = (1 - z^2)^{m/2}, \quad \tilde{P}_{m+1}^m(z) = (2m + 1)(1 - z^2)^{m/2}z.$$

Из известного рекуррентного соотношения для $P_{m+r}^m(z)$ и формул для $\tilde{P}_m^m(z)$ и $\tilde{P}_{m+r}^m(z)$ следует, что функции $\tilde{P}_{m+r}^m(z)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(r + 1)\tilde{P}_{m+r+1}^m(z) = (2m + 2r + 1)z\tilde{P}_{m+r}^m(z) - (2m + r)\tilde{P}_{m+r-1}^m(z)$$

для целых r , $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Далее, в соответствии с [1], функция $u(z)$ будет представляться разложением в ряд по функциям $\tilde{P}_{m+r}^m(z)$, а $v(z)$ — по соответствующим многочленам $p_{m+r}^m(z)$, где $\tilde{P}_{m+r}^m(z) = (1 - z)^2 p_{m+r}^m(z)$ (в частности, $p_m^m(z) = 1$, $p_{m+r}^m(z) = (2m + 1)z$), для которых рекуррентная формула, очевидно, та же:

$$(r + 1)p_{m+r+1}^m(z) = (2m + 2r + 1)zp_{m+r}^m(z) - (2m + r)p_{m+r-1}^m(z). \tag{1.4}$$

Такое разложение имеет место и в том случае, когда m, θ, λ, z комплексные.

Уравнения (1.1) и (1.3) не меняются при замене z на $-z$, поэтому достаточно рассматривать случаи:

$$u(z), v(z) \text{ — четные функции,} \tag{1.5}$$

$$u(z), v(z) \text{ — нечетные функции.} \tag{1.6}$$

Тогда получаем (см. [1])

$$v(z) = \sum d_r p_{m+r}^m(z), \tag{1.7}$$

где суммирование ведется по $r = 0, 2, 4, \dots$ для случая (1.5) и по $r = 1, 3, 5, \dots$ для случая (1.6). Коэффициенты разложения удовлетворяют следующей рекуррентной формуле (для обоих случаев):

$$A_r d_{r+2} + (B_r - \lambda) d_r + C_r d_{r-2} = 0, \tag{1.8}$$

где

$$A_r = \frac{4\theta(2m + r + 2)(2m + r + 1)}{(2m + 2r + 3)(2m + 2r + 5)}, \tag{1.9}$$

$$B_r = (m + r)(m + r + 1) - \frac{8\theta((r + m)(r + m + 1) + m^2 - 1)}{(2m + 2r + 3)(2m + 2r - 1)}, \quad r \geq 1,$$

$$B_0 = m(m + 1) - \frac{8\theta(m + 1)}{2m + 3}$$

(упрощение $(2m^2 + m - 1)/(2m - 1) = m + 1$ существенно при $m = 1/2$),

$$C_r = \frac{4\theta r(r-1)}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)}, \quad r \geq 2, \quad C_0 = C_1 = 0.$$

При $r = 0$ и $r = 1$ формула (1.8) принимает вид

$$A_r d_{r+2} + (B_r - \lambda) d_r = 0. \quad (1.10)$$

При $\theta \neq 0$, если не учитывать (1.10), то в двумерном пространстве возникающих для (1.5) и (1.6) последовательностей d_r некоторое одномерное пространство содержит последовательности, стремящиеся к нулю очень быстро: $r^2 d_{r+2}/d_r \rightarrow -\theta$; остальные последовательности очень быстро растут: $(d_{r+2}/d_r)/r^2 \rightarrow -\theta$. Собственные значения λ выделяются совокупностью условий: (1.10) и $\lim_{r \rightarrow \infty} d_{r+2}/d_r = 0$.

Если нужное собственное значение вычислено, то для вычисления $v(z)$ (и затем по формулам (1.2) $u(z)$) используется ряд (1.7). Его члены вычисляются с использованием рекуррентных формул (1.4), (1.8) (важные детали такого использования см. ниже в разд. 3), частичные суммы этого ряда — многочлены.

При больших r рекуррентная формула (1.4) имеет предельный вид

$$p_{m+r+1}^m(z) = 2z p_{m+r}^m(z) - p_{m+r-1}^m(z),$$

откуда следует, что для больших $|z|$ значения $p_{m+r}^m(z)$ растут не быстрее $|2z|^r$. Поэтому ряд (1.7) равномерно сходится в любой ограниченной области комплексной плоскости и тем самым действительно дает целую функцию.

Отметим, что если $\theta = 0$, то мы получаем ответ без всех описанных вычислений: для любого целого неотрицательного r получаем $\lambda = (m+r)(m+r+1)$, $v(z) = p_{m+r}^m(z)$.

Далее полагаем, что $\theta \neq 0$.

Для представления искомой функции $v(z)$ мы использовали ряд (1.7). В настоящее время используются более общие разложения (см., в частности, [3], [4], где разложение содержит свободный параметр ν), ряд (1.7) и остальные используемые нами формулы — частный случай, получаемый, если взять $\nu = m$ и положить $p_{m+r}^m(z) = 0$ при целом отрицательном r . При этом некоторые формулы упрощаются, в частности, не возникает рядов, в которых индекс суммирования меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Представим $d_r = \frac{1}{r!} \theta^{r/2} \tilde{d}_r$ для случая (1.5), $d_r = \frac{1}{r!} \theta^{(r-1)/2} \tilde{d}_r$ для случая (1.6). Мы получим

$$\tilde{A}_r \tilde{d}_{r+2} + \tilde{B}_r \tilde{d}_r + \tilde{C}_r \tilde{d}_{r-2} = 0, \quad (2.1)$$

где при $r \geq 2$ имеем

$$\tilde{A}_r = \frac{A_r \theta}{(r-1)r(r+1)(r+2)}, \quad \tilde{B}_r = \frac{B_r - \lambda}{r(r-1)}, \quad \tilde{C}_r = \frac{C_r}{\theta},$$

$$\tilde{A}_0 = \frac{A_0 \theta}{2}, \quad \tilde{B}_0 = B_0 - \lambda, \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1 \theta}{6}, \quad \tilde{B}_1 = B_1 - \lambda, \quad \tilde{C}_0 = \tilde{C}_1 = 0.$$

Здесь $\tilde{A}_r \rightarrow 0$, $\tilde{B}_r \rightarrow 1$, $\tilde{C}_r \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$. Нужно выделить последовательность, для которой

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{d}_{r+2}}{\tilde{d}_r} = -1.$$

Для каждого из случаев (1.5), (1.6) фиксируем r_∞ , одно и то же для всех исследуемых далее λ , четное для случая (1.5), нечетное для случая (1.6). Положим

$$\tilde{d}_{r_\infty} = 1, \quad \tilde{d}_{r_\infty-2} = -1.$$

По формуле (2.1) вычисляем $\tilde{d}_{r_\infty-4}, \tilde{d}_{r_\infty-6}, \dots$. Эти вычисления проводятся численно устойчиво, так как последовательности, не пропорциональные той, которую мы хотим вычислить, для больших r растут слева направо и, следовательно, справа налево убывают; численная погрешность в выборе \tilde{d}_{r_∞} и в выкладках убывает для больших r при счете справа налево. Вычисления реализуемы, так как $\tilde{C}_r \neq 0$ для всех $r \geq 2$.

Для взятого λ окончательно получим

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \tilde{A}_0 \tilde{d}_2 + \tilde{B}_0 \tilde{d}_0 \text{ для (1.5),} \\ W(\lambda) &= \tilde{A}_1 \tilde{d}_3 + \tilde{B}_1 \tilde{d}_1 \text{ для (1.6).} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Очевидно, $W(\lambda)$ в обоих случаях (2.2) — аналитическая функция. Соотношение $W(\lambda) = 0$ предельно при $r_\infty \rightarrow \infty$ эквивалентно тому, что λ — собственное значение.

В случае если θ вещественное и m целое, собственные значения задачи являются вещественными; они естественно нумеруются (см. [1]) и естественной является задача: найти собственное значение с заданным номером (метод решения этой задачи см., например, в [7]). В работе [5] предложен метод вычисления собственных значений $\lambda(\theta)$ в случае целых неотрицательных m и комплексного θ . В рассматриваемом сейчас общем случае нет способа как-либо “занумеровать” собственные значения. Поэтому задача вычисления собственного значения с заданным “номером” заменяется следующей задачей. Зафиксируем в комплексной плоскости ограниченную область Q с кусочно-гладкой границей Γ . Предположим, что Γ не содержит собственных значений (что будет иметь место в “общем положении”). Нужно найти все собственные значения, лежащие в Q .

Предлагаемый метод решения этой задачи состоит в следующем. Имея возможность вычислить значения функции $W(\lambda)$ на Γ и пользуясь известными формулами теории функций комплексного переменного, составим систему уравнений для собственных значений, лежащих в Q .

Так как $W(\lambda)$ не обращается в 0 на Γ , то имеют место следующие формулы (см., например, [6]):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg W(\lambda) = n, \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^k d \ln W(\lambda) = \sum_{s=1}^n \lambda_s^k. \tag{2.4}$$

Здесь n — число собственных значений (т.е. нулей функции $W(\lambda)$), лежащих в Q ; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — эти собственные значения (кратные нули функции $W(\lambda)$ считаются нужное число раз), $k = 1, 2, \dots$; мы берем далее $k = 1, 2, \dots, n$ после вычисления n ; при интегрировании контур Γ проходит так, что Q остается слева.

Далее рассматриваем случай, когда Γ состоит из одной замкнутой кривой; обобщение на случай, когда Γ состоит из нескольких таких кривых, очевидно.

На Γ выбираем сетку $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_M = \mu_0$. Заменяв интеграл (2.3) соответствующей суммой, вычислим число S_0 :

$$S_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^M \arg \frac{W(\mu_s)}{W(\mu_{s-1})}. \tag{2.5}$$

Точки $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_M = \mu_0$ для однозначного вычисления $\arg W(\mu_s)/W(\mu_{s-1})$ должны для всех s удовлетворять условию $|\arg W(\mu')/W(\mu'')| < \pi$ при μ' и μ'' , лежащих на дуге $\widehat{\mu_{s-1}, \mu_s}$. Если нет собственных значений, близких к Γ , то сетку можно взять достаточно грубой. Мы получим $n = S_0$.

После этого для $k = 1, \dots, n$, аппроксимируя (2.4), вычисляем

$$S_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^M \frac{\mu_s^k + \mu_{s-1}^k}{2} \ln \frac{W(\mu_s)}{W(\mu_{s-1})}. \tag{2.6}$$

Здесь мелкость сетки определяется уже не только требованиями, которые указаны при вычислении S_0 , но и требованием получить необходимую малую погрешность в ответе. Отметим высокий порядок точности предлагаемой формулы (2.6), если Γ – окружность и точки $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_M = \mu_0$ расположены на Γ равномерно.

Мы получаем

$$\sum_{s=1}^n \lambda_s^k \approx S_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Вычислив с необходимой точностью числа S_0, \dots, S_n , находим числа

$$a_k = -\frac{S_k + a_1 S_{k-1} + \dots + a_{k-1} S_1}{k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда нужные нам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – это с некоторой погрешностью корни уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.7)$$

О численных аспектах решения уравнения (2.7) см. далее разд. 4.

Подчеркнем, что для случаев (1.5) и (1.6) все вычисления проводятся независимо. В частности, число n – число собственных значений задачи, лежащих в Q , или для случая (1.5), или для случая (1.6).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

После того, как нужные собственные значения вычислены, для каждого из них осуществляется вычисление соответствующей собственной функции.

Для найденного собственного значения λ способом, указанным в п. 2, вычисляем \tilde{d}_{r_∞} , $\tilde{d}_{r_\infty-2}, \dots, \tilde{d}_2, \tilde{d}_0$ для случая (1.5) или $\tilde{d}_{r_\infty}, \tilde{d}_{r_\infty-2}, \dots, \tilde{d}_3, \tilde{d}_1$ для случая (1.6). Контроль: должно быть $W(\lambda) = 0$ с нужной точностью. Подчеркнем, что вычисление \tilde{d}_k ведется от больших номеров к меньшим, так как эта последовательность “окружена” другими, сильно растущими последовательностями. Поэтому вычисление нужных нам \tilde{d}_k справа налево численно устойчиво, в то время как вычисление слева направо приведет к большим погрешностям.

Вычислив $\tilde{d}_0, \dots, \tilde{d}_{r_\infty}$ (или $\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{r_\infty}$), найдем для нужного z сумму ряда

$$v(z) = \sum_{r=0}^{r_\infty} \frac{\theta^{r/2} \tilde{d}_r}{r!} d_r p_{m+r}^m(z), \quad (3.1)$$

для случая (1.5), суммирование ведется по четным r , или

$$v(z) = \sum_{r=1}^{r_\infty} \frac{\theta^{(r-1)/2} \tilde{d}_r}{r!} d_r p_{m+r}^m(z), \quad (3.2)$$

для случая (1.6), суммирование ведется по нечетным r . Значения $p_{m+r}^m(z)$ вычисляются по рекуррентной формуле (1.4).

Отметим, что \tilde{d}_r считаются по рекуррентной формуле справа налево, а $p_{m+r}^m(z)$ – слева направо. Поэтому следует сначала вычислить и запомнить нужные \tilde{d}_r , а затем вычислить $p_{m+r}^m(z)$ и сумму.

Отметим также, что так как $\tilde{d}_{r+2}/\tilde{d}_r \rightarrow -1$ при $r \rightarrow \infty$ и мы взяли $\tilde{d}_\infty = 1$, то можно немного продолжить вычисление суммы на $r > r_\infty$, беря $\tilde{d}_r = \mp 1$.

Отметим, что для больших значений $|z|$ описанные вычисления становятся затруднительными и, возможно, неэффективными.

Вычислив $v(z)$, найдем $u(z)$, используя формулу (1.2). Если m не является вещественным четным числом, то $+1$ и -1 будут точками ветвления функции. Для получения однозначного результата необходимо использовать разрез комплексной плоскости. Так как при нецелом m точка ∞ также будет точкой ветвления, то для выбора ветви естественно взять разрез по вещественной оси от $+1$ до $+\infty$ и от $-\infty$ до -1 ; полагаем $(1 - z^2)^{m/2} = 1$ при $z = 0$.

Важным является вопрос о нормировании сфероидальных функций. Иногда он решается в зависимости от области использования этой функции. Для единообразия и простоты мы будем использовать следующую нормировку:

$$u(0) = 1 \text{ для случая (1.5),}$$

$$u'(0) = 1 \text{ для случая (1.6);}$$

отметим, что, очевидно, невозможны ситуации: $u(0) = 0$ для случая (1.5), $u'(0) = 0$ для случая (1.6).

Это приводит к следующим дополнительным вычислениям.

Из формулы (1.4) получается рекуррентная формула для значений $p_{m+r}^m(0)$ и $q_{m+r}^m = \left. \frac{dp_{m+r}^m(z)}{dz} \right|_{z=0}$:

$$\begin{aligned} (r+1)p_{m+r+1}^m(0) &= -(2m+r)p_{m+r-1}^m(0), \\ (r+1)q_{m+r+1}^m &= -(2m+2r+1)p_{m+r}^m(0) - (2m+r)q_{m+r-1}^m. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Кроме того,

$$p_m^m(0) = 1, \quad p_{m+1}^m(0) = 0, \quad q_m^m = 0, \quad q_{m+1}^m = 2m+1. \tag{3.4}$$

Пользуясь формулами (3.3) и (3.4), мы на этапе вычисления сумм (3.1) и (3.2) одновременно вычисляем суммы

$$v(0) = \sum_{r=0}^{r_\infty} \frac{\theta^{r/2} \tilde{d}_r}{r!} p_{m+r}^m(0)$$

для случая (1.5),

$$v'(0) = \sum_{r=1}^{r_\infty} \frac{\theta^{(r-1)/2} \tilde{d}_r}{r!} q_{m+r}^m(0)$$

для случая (1.6). Затем нормируем вычисленные $v(z)$, взяв $v(z)/v(0)$ для случая (1.5), $v(z)/v'(0)$ для случая (1.6); очевидно, это приведет к нужной нормировке функций $u(z)$.

Замечание. Обычно для вычисления нужных значений λ и коэффициентов d_r , дающих представление $v(z)$ (см. (1.7)), используют цепные дроби (см., например, [2], [4]). В настоящей работе, вместо вычисления значений d_r , быстро стремящихся к нулю при $r \rightarrow \infty$, вычисляются связанные с ними простыми формулами величины \tilde{d}_r , для которых отношение $\tilde{d}_{r+2}/\tilde{d}_r$ быстро стремится к -1 . Это дает возможность использовать трехчленные линейные рекуррентные формулы (см. (2.1)). Доказано, что счет по этим формулам справа налево численно устойчив. Одновременно отпадают сложности, которые могут возникнуть при использовании двухчленных нелинейных рекуррентных формул, связанных с цепными дробями. Такие сложности возникают, как известно, если значение какого-либо из d_r/d_{r+2} окажется близким к нулю.

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ, ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Описанные методы были реализованы в системе вычислений с произвольной точностью в среде пакета Maple. Ряд сложностей вычислительного свойства – проблема выбора r_∞ , учет потери значащих цифр при суммировании рядов и др. – были преодолены способами, аналогичными способам из [7]. Для проверки методов использовались как способы “внутреннего” контроля, так и сравнение с результатами, представленными в других, весьма немногочисленных, источниках.

Таблица 1. Значения $\lambda_m(\theta)$ для комплексных m, θ

| m | θ | λ , [3] | λ (расчеты авторов) | Примечания |
|--------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---|--------------------------------|
| 0 | $-3.19872474980 + 4.09449259020i$ | $2.911544 + 6.133045i$ | $2.9115438530 + 6.1330454494i$ | [3], табл. 5.4 |
| 0 | $-3.19872474980 + 4.09449259020i$ | $2.919098 + 6.134851i$ | $2.9190955215 + 6.1348516033i$ | ссылка на [2] в [3], табл. 5.4 |
| $1 + i$ | $i/2$ | $1.1461735587 + 3.3318258435i$ | $1.1461735587362542505 + 3.3318258434945676707i$ | [3], табл. 5.6 |
| $10 + 10i$ | $50i$ | $13.7754466537 + 214.1334443105i$ | $13.775446653742879554 + 214.133444310519156646i$ | [3], табл. 5.6 |
| $1.3 + 2.7i$ | $-0.7175 + 2.04i$ | — | $-3.82866666280490275 + 10.6239331300738968i$ | |
| $0.7 - 1.2i$ | $-0.3675 - 0.49i$ | — | $-0.29092793596041891 - 3.36280225393329578i$ | |

Собственные значения, найденные из уравнения (2.7), уточнялись с помощью метода секущих. Таким образом, предложенный метод обладает большей универсальностью, чем другие известные методы, в смысле возможности первоначальной локализации собственных значений и их последующего уточнения.

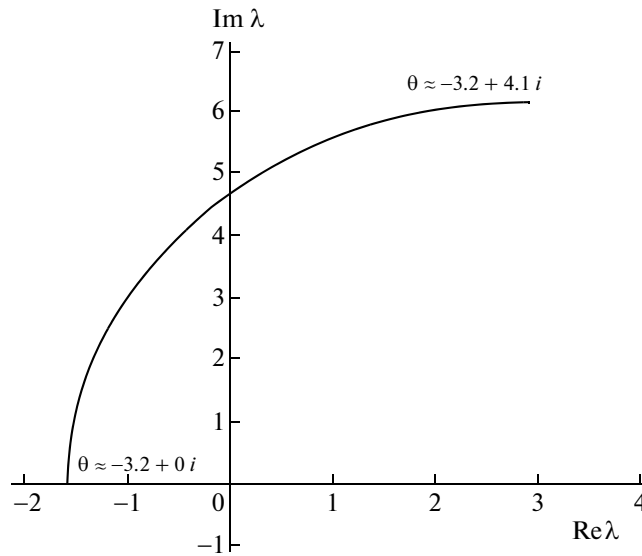
Проверка осуществлялась несколькими способами. Прежде всего, были проведены расчеты одних и тех же значений с различной задаваемой точностью вычислений (переменная Digits). Все десятичные знаки, полученные при меньших значениях Digits, подтверждались при ее больших значениях. Затем сравнение производилось с результатами, полученными для случая вещественного θ и целого m методом, изложенным в [7] и с результатами, полученными для вещественного либо чисто мнимого θ и целого m (см. [4, табл. 1], [3, табл. 5.2, 5.3]). В обоих случаях наблюдалось полное совпадение результатов при значениях Digits, соответствующих числу значащих цифр в таблицах.

Было проведено сравнение с результатами, полученными в [5] для случая комплексного θ и целого неотрицательного m . Результаты подтверждаются с некоторыми уточнениями положения точек ветвления собственных значений. В табл. 1 настоящей статьи в сравнении с табл. 1–3 из [5] представлены некоторые собственные значения $\lambda(\theta)$: согласно нашим расчетам, указанным значениям θ соответствуют не точки ветвления, а близко расположенные пары собственных значений.

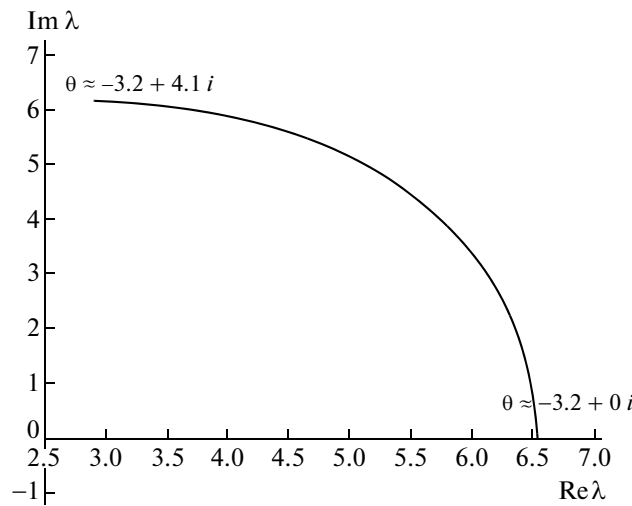
Также сравнение проводилось с результатами, полученными для комплексного θ и целого неотрицательного m в [4, табл. 2], [3, табл. 5.4]. Снова получено полное совпадение результатов. При этом следует дополнительно отметить, что в табл. 5.4 в [3] были уточнены результаты предшествующих работ (см. [2]). Расчеты по методу, изложенному в настоящей статье, подтвердили, что значения $\lambda = 23.91033 + 18.74184i$ и $\lambda = 10.13705 + 11.12218i$ действительно были посчитаны с погрешностью в [2]. Однако наши расчеты показывают, что для $\lambda \approx 2.91 + 6.13i$ (третья строка табл. 5.4 в [3]) речь идет о разных собственных значениях. Таким образом, собственное значение, полученное в [3], не является уточнением значения из [2] — это два разных, близко расположенных собственных значения, что немедленно диагностируется расчетом величины (2.5). На фиг. 1 и фиг. 2 изображены траектории движения этих собственных значений при движении по θ от значения $3.19872474980 + 4.09449259020i$ к вещественной оси при зафиксированном $\text{Re}(\theta)$ и $m = 1$. В результате $\lambda = 2.911544 + 6.133045i$ переходит в первое собственное значение соответствующей задачи с вещественными значениями параметров, а $\lambda = 2.919098 + 6.134851i$ — в третье.

Для проверки метода вычисления собственных функций снова использовались вычисления с различными значениями переменной Digits. Стоит отметить, что при помощи этих вычислений было установлено, что благодаря хорошей сходимости рядов (3.1), (3.2) метод оказывается применимым и при $|z| > 1$. Например, при $|z| = 5$ потребовалось порядка 50 членов в рядах (3.1), (3.2) для получения 10 верных знаков после запятой.

Второй способ проверки был основан на том обстоятельстве, что в обоих случаях (1.5), (1.6) функция $v(z)$ является целой и, следовательно, может быть представлена рядом Тейлора по сте-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

пеням z , сходящимся во всей плоскости. Используя принятую нами нормировку $u(z)$, получаем $v(0) = 1, v'(0) = 0$ для случая (1.5), $v(0) = 0, v'(0) = 1$ для случая (1.6).

Поэтому при малых $|z|$ имеем $v(z) = 1 + g_1 z^2 + g_2 z^4 + O(z^6)$ для случая (1.5), $v(z) = z + h_1 z^3 + h_2 z^5 + O(z^7)$ для случая (1.6).

Подставив эти выражения в уравнение (1.3), найдем g_1, g_2, h_1, h_2 и получим

$$v(z) = 1 + (1/2)(m^2 + m - 4\theta - \lambda)z^2 + (1/24)(8\theta + (m^2 + 5m + 6 - 4\theta - \lambda)(m^2 + m - 4\theta - \lambda))z^4 + \dots, \tag{4.1}$$

$$v(z) = z + (1/6)(m^2 + 3m + 2 - 4\theta - \lambda)z^3 + (1/120)(24\theta + (m^2 + 7m + 12 - 4\theta - \lambda)(m^2 + 3m + 2 - 4\theta - \lambda))z^5 + \dots \tag{4.2}$$

Формула (4.1) соответствует четной функции $v(z)$, (4.2) – нечетной. Было установлено, что для малых $|z|$ результаты, полученные с помощью метода, изложенного в данной статье, и с по-

Таблица 2. Значения $u_{m, \theta, \lambda}(z)$ для комплексных значений параметров и аргумента

| m | θ | λ | z | $u_{m, \theta, \lambda}(z)$ |
|--------------|-------------------|---|--------------|------------------------------------|
| $1.3 + 2.7i$ | $-0.7175 + 2.04i$ | $-3.82866666280490275 + 10.6239331300738968i$ | $0.1 + 0.2i$ | $1.09963528437 + 0.0161174416344i$ |
| $1.3 + 2.7i$ | $-0.7175 + 2.04i$ | $-3.82866666280490275 + 10.6239331300738968i$ | $3 + 4i$ | $-109071.581830 - 53201.4064549i$ |
| $0.7 - 1.2i$ | $-0.3675 - 0.49i$ | $-0.29092793596041891 - 3.36280225393329578i$ | $0.1 + 0.2i$ | $0.97659731817 - 0.037341697328i$ |
| $0.7 - 1.2i$ | $-0.3675 - 0.49i$ | $-0.29092793596041891 - 3.36280225393329578i$ | $3 + 4i$ | $0.043099372153 - 0.011440092486i$ |

мощью формул (4.1), (4.2), совпадают с той точностью, которую дает отрезок ряда Тейлора; при этом в формулах (3.1), (3.2) было взято около 40 членов.

Некоторые рассчитанные значения сфероидальных функций представлены в табл. 2.

Таким образом, предложенный метод позволяет локализовывать и затем достаточно точно вычислять собственные значения и, для вычисленного собственного значения, сфероидальную функцию I рода для не очень больших по модулю значений аргумента. Вопрос о вычислении сфероидальных функций для больших по модулю аргументов в общем случае (все параметры и аргумент комплексные) требует дополнительных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
2. L.-W. Li, M.-S. Leong, T.-S. Yeo, P.-S. Kooi, K.-Y. Tan. Computations of spheroidal harmonics with complex arguments: A review with an algorithm // Physical Review E. 1998. V. 58. № 5. P. 6792–6806.
3. Falloon P. Theory and computation of the spheroidal wave functions with general arguments. Ph.D. Thesis, University of Western Australia, 2001.
4. Falloon P.E., Abbott P.C., Wang J.B. Theory and computation of the spheroidal wave functions. School of Physics. The University of Western Australia, 2002. <http://arxiv.org/ftp/math-ph/papers/0212/0212051.pdf>
5. Скороходов С.Л., Христофоров Д.В. Вычисление точек ветвления собственных значений, соответствующих волновым сфероидальным функциям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 7. С. 1195–1210.
6. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1–3. М.: Наука, 1967.
7. Абрамов А.А., Курочкин С.В. Высокоточное вычисление угловых сфероидальных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 1. С. 12–17.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.