ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2005, том 41, № 3, с. 135–137

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ФУНКЦИИ ВЫПЛАТ, РЕАЛИЗУЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ОПЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ

© 2005 г. С. В. Курочкин

(Москва)

Для хеджирования сложноструктурированных рисков, связанных с изменчивостью цены финансовых активов, а также для осуществления спекулятивных стратегий при сложной (нелинейной) структуре прогноза цены широко используются так называемые опционные стратегии (ОС) – комбинации (портфели) опционов на один и тот же основной актив с разными ценами исполнения. Возможно, наиболее известной из таких стратегий является "игра на волатильность" (короткая или длинная).

Для некоторых типовых ситуаций разработаны и описаны ОС, более или менее адекватно отражающие структуру рисков и/или спекулятивных ожиданий. Наряду с простейшими (спрэд, стрэдл и др.) здесь используются и достаточно сложные стратегии, включающие большое число опционов. Так, в (Галиц, 1997) описан реальный пример короткой игры на волатильность. Основным активом был индекс CAC-40, а завышенные ожидания волатильности и, соответственно, переоценка опционов были связаны с большой неопределенностью в результатах референдума 20 сентября 1992 г. о присоединении Франции к Маастрихскому соглашению. В содержательном отношении выбранная спекулянтом (BEA Associates) стратегия исходила из (оправдавшегося) предположения, что ни тот, ни другой исход голосования не приведут к существенным изменениям на фондовом рынке. Помимо обычного в таких случаях пика на текущем значении индекса стратегия предусматривала защитные "полки" с обеих сторон и включала опционы с пятью различными ценами исполнения (рисунок). В связи с тем, что практиками применяются многоопционные стратегии, реализующие достаточно сложные по структуре спекулятивные ожидания, представляет интерес задача описания множества всех финансовых результатов, достижимых с помощью опционных стратегий. В данной работе получено полное описание соответствующего класса функций выплат. Описание дано в терминах аппроксимации функций, в доказательствах используются методы, аналогичные развитым в работе (Курочкин, 1996).

Ограничимся задачей так называемого однопериодного инвестирования, когда все позиции открываются в один момент времени $t = 0$ и закрываются (опционы исполняются) в один момент времени $t = T$.

Финансовый результат инвестиционной/спекулятивной стратегии описывается функцией выплат:

$$f(S_T),\ f\colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R},$$

где S_T – цена основного актива в конечный момент $t = T$; $f(S)$ – (чистая) выплата по портфелю.

Будем предполагать, что премии всех опционов оценены по стандартной модели Блэка–Шолса, которая в терминах функции выплат опционов может быть описана следующим образом. Для опциона op с функцией выплат $f_{op} = \max(S_T - K, 0)$ для колла и $f_{op} = \max(K - S_T, 0)$ для пута, где K – цена исполнения опциона; премия равна математическому ожиданию по явно выписываемой мартингальной мере (см., например (Ширяев, 1994, с. 803)) от случайной величины $f_{op}(S_T)$, продисконтированному назад к моменту $t = 0$ по безрисковой ставке. Пусть $\rho(S)$ – плотность мартингальной меры, r – безрисковая ставка, C – премия за опцион, тогда модель ценообразования можно эквивалентным образом записать:

$$\varphi(f_{op} - e^{rT}C) \overset{def}{=} \int_0^{\infty} (f_{op}(S) - e^{rT}C)\rho(S)dS = 0. \tag{1}$$

Под ОС понимается портфель (линейная комбинация) опционов на один и тот же актив, причем допускаются как длинные, так и короткие позиции.

Обозначим множество функций выплат, соответствующих всевозможным ОС, через F, причем для краткости записи будем включать чистую премию, уплаченную за ОС, в функцию выплат по этой стратегии (с приведением к одному моменту времени, как в (1)).

Предложение 1. Множество F совпадает с множеством всех кусочно-линейных непрерывных функций, лежащих в ядре φ.

Доказательство. То, что всякая $f \in F$ является кусочно-линейной и лежит в ядре φ, очевидно из соображений линейности. Обратно, пусть $\{x_0 = 0, x_1, \dots x_n\}$ и $\{y_0, y_1, \dots y_n\}$ – координаты x и y узлов функции $\tilde{f}$, соответственно, а на промежутке $[x_n, \infty)$ эта функция задана некоторым углом наклона. Тогда она реконструируется как функция выплат по ОС с помощью следующих шагов.

1. Для любых $x_1, y_0, y_1 \in \mathbf{R}$ существует ОС, функция выплат которой имеет узлы $(0, y_0)$ и (x_1, y_1). Стратегия состоит

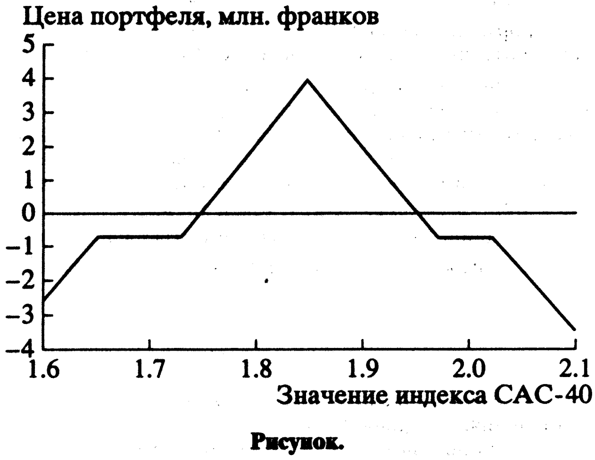

Рисунок.

из путов с ценой исполнения x_1, взятых в количестве, способном обеспечить нужный наклон на $[0, x_1]$, и коллов с той же ценой исполнения в количестве, обеспечивающем значение $f(x_1) = y_1$.

2. Для любых $x_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R}$ существует ОС с функцией выплат f, такая что $f \equiv 0$ на $[0, x_1]$ и $f(x) = y_2(x - x_1)/(x_2 - x_1)$ на $[x_1, x_2]$. Стратегия может быть составлена из коллов с ценой исполнения x_1, взятых в количестве, обеспечивающем нужный наклон на $[x_1, x_2]$, и коллов с ценой исполнения x_2, способных обнулить значение f на $[0, x_1]$.

3. В результате последовательного построения стратегии на отрезках $[0, x_1]$ по п. 1 и $[x_1, x_2]$, … ,$[x_{n-1}, x_n]$ по п. 2 полученная функция $f \in F$ в силу положительности функционала φ обязана будет иметь на $[x_n, \infty)$ такой же наклон, как и $\tilde{f}$, т.е. $f \equiv \tilde{f}$, что и требовалось доказать.

Формально этот результат дает ответ на поставленный вопрос, однако в содержательном смысле он является недостаточным, так как не дает информации участнику рынка (в понятных для него терминах) о том, какие "клиентские" профили выплат (не обязательно кусочно-линейные) приближенно достижимы с помощью ОС. Правильная постановка вопроса должна включать механизм аппроксимации. При этом теорема Стоуна–Вейерштрасса, к которой естественно обратиться, в непосредственном виде здесь неприменима, так как:

а) промежуток, на котором заданы функции, некомпактен;

б) аппроксимирующие функции подчинены дополнительному условию (1);

в) они не образуют множества, замкнутого относительно умножения.

Попытка преодолеть первую трудность с помощью перехода к компактно-открытой топологии (топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах области определения, см., например (Энгелькинг, 1986)) приводит к неожиданному и неестественному результату – теряется условие нормировки (1).

Предложение 2. Замыкание в пространстве $C(0, \infty)$ с компактно-открытой топологией множества F совпадает со всем пространством $C(0, \infty)$.

Таким образом, с помощью справедливо оцененных опционов можно сколь угодно точно (в этой топологии) реализовать любую, даже явно арбитражную, функцию выплат.

Практическое применение сформулированного факта означало бы пренебрежение не только величиной потерь при значительных отклонениях цены (подобно тому, как это делается в методе VAR), но даже самой такой возможностью.

Доказательство предложения 2 следует из очевидного наблюдения, что для значений цены основного актива в любом компактном промежутке $[a, b] \subset (0, \infty)$ посредством портфеля опционов может быть (точно) реализована любая кусочно-линейная непрерывная функция выплат.

Итак, выясняется, что равномерная аппроксимация требуемой функции выплат невозможна ввиду некомпактности интервала изменения цены, а аппроксимация на компактах неадекватна содержательной стороне задачи. В такой ситуации естественно рассмотреть возможность аппроксимации в интегральной метрике. Из содержательных соображений, а также (формально) потому, что функции выплат опционов неинтегрируемы по обычной мере Лебега на $(0, \infty)$, здесь естественно использовать весовое пространство $L_2((0, \infty); \rho)$.

Теорема. *Пусть в распоряжении хеджера/спекулянта имеются колл и пут опционы на основной актив со всевозможными ценами исполнения, причем все опционы оценены в соответствии с моделью Блэка–Шолса. Тогда замыкание в $L_2((0, \infty); \rho)$ множества F функций выплат ОС совпадает с ядром функционала φ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\hat{f} \in L_2((0, \infty); \rho)$, $\hat{f} \in \mathrm{Ker}\varphi$. Выбрав достаточно малое ε, последовательно приближаем с точностью меньшей или равной ε:

1) функцию $\hat{f}$ финитной функцией f_0;

2) функцию f_0 непрерывной финитной функцией f_c;

3) функцию f_c кусочно-линейной непрерывной финитной функцией f_l.

Пользуясь предложением 1, реализуем f_l на ее носителе $[0, x^*]$ как функцию выплат $f_{os} \in F$. При этом на $[x^*, \infty)$ f_{os} будет иметь наклон, обеспечивающий выполнение условия $f_{os} \in \mathrm{Ker}\varphi$. Осталось заметить, что поскольку $\hat{f} \in \mathrm{Ker}\varphi$, $\|\hat{f} - f_l\| \le 3\varepsilon$ и $(f_l - f_{os})$ знакопостоянная, то будет выполнено неравенство $\|f_l - f_{os}\| \le 3\varepsilon$, и тогда $\|\hat{f} - f_{os}\| \le 6\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Сформулируем основной результат в неформальных терминах, явным образом разделив: а) выплаты от реализации стратегии; б) уплаченную за нее (чистую) премию; в) конструктивную сторону построения ОС.

Предположим, что в результате прогнозирования ситуации на фондовом рынке и анализа собственных целей инвестор/спекулянт пришел к некоторой, желательной для него функции выплат f (здесь, в отличие от предыдущего изложения, премия не учитывается; инвестору она неизвестна). Имея в виду реальную ситуацию, можно считать, что f заведомо будет кусочно-непрерывной на $[0, \infty)$, а при $x \longrightarrow \infty$ будет иметь (самое большее) полиномиальный рост (поведение f при $x \longrightarrow 0$ и $x \longrightarrow \infty$ мало интересует участников рынка ввиду ничтожной вероятности соответствующих событий). Таким образом, $f \in L_2((0, \infty); \rho)$.

Доказанный результат позволяет утверждать следующее.

1. Стоимость (чистая премия) ОС, реализующей данную функцию выплат, может быть определена сразу и равна

$$e^{-rT}\int_0^\infty f(S)\rho(S)dS.$$

2. В (теоретическом) предположении, что в распоряжении инвестора имеются опционы с произвольными ценами исполнения, заданная функция выплат может быть реализована со сколь угодно малой погрешностью с помощью портфеля опционов. Погрешность может пониматься в смысле меры ρ или в смысле эквивалентной ей исходной ви-

неровской меры, или в смысле любой другой разумной меры, используемой конкретным участником рынка при прогнозировании цены основного актива.

3. При наличии (как это реально бывает) лишь конечного набора различных цен исполнения задача возможно более адекватной реализации заданной функции выплат посредством ОС сводится к задаче приближения функции из L_2 посредством функций из конечномерного подпространства, заданного базисом, принадлежащих гиперплоскости, заданной как ядро функционала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Галиц А. (1997): Финансовая инженерия. М.: ТВП.

Курочкин С.В. (1996): Определение непрерывной ставки кредита по временному ряду срочных ставок // *Экономика и мат. методы*. Т. 32. Вып. 4.

Ширяев А.Н. (1994): Стохастические проблемы финансовой математики // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. Т. 1. Вып. 5.

Энгелькинг Р. (1986): Общая топология. М.: Мир.

Поступила в редакцию
01.09.2004 г.