

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

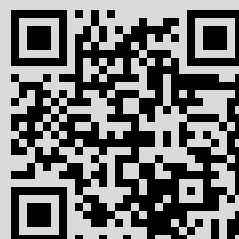
С. В. Курочкин, Метод выявления неустойчивости и поиска неустойчивых собственных значений в задаче Орра–Зоммерфельда, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001, том 41, номер 1, 86–94

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 193.233.212.50

24 марта 2015 г., 13:42:29



УДК 519.624.3

# МЕТОД ВЫЯВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ПОИСКА НЕУСТОЙЧИВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОРРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА<sup>1)</sup>

© 2001 г. С. В. Курочкин

(117967 Москва, ГСП-1, ул. Вавилова, 40 ВЦ РАН)

Поступила в редакцию 25.03.99 г.  
Переработанный вариант 05.05.2000 г.

Предложен метод, позволяющий обнаружить неустойчивость в задаче типа Орра–Зоммерфельда. Затем, если это требуется, можно найти неустойчивое собственное значение с помощью некоторого аналога метода продолжения по параметру, т.е. не решая задач двумерного поиска. Используются топологические методы локализации собственных значений и специальный вариант метода дифференциальной прогонки.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Орра–Зоммерфельда об устойчивости плоского течения Пуазейля [1] является классическим примером несамосопряженной краевой задачи на собственные значения, ей посвящено большое число работ. Поиск “первых” собственных значений (и даже только выяснение вопроса, содержатся ли таковые в заданной области комплексной плоскости) для задач этого типа представляет существенную трудность, особенно в тех случаях, когда из-за отсутствия хороших исходных приближений невозможно применить метод продолжения по параметру. В [2], [3] был предложен численный метод локализации собственных значений, основанный на вычислении некоторых топологических инвариантов отображений многообразий Грассмана, порожденных исходным уравнением. В данной работе этот метод (и некоторые другие средства) развивается применительно к конкретному классу задач. План работы следующий. Во введении дается постановка задачи и применительно к ней кратко повторяется основная конструкция из [2], [3]. В разд. 2 получено обобщение энергетической оценки [4], с помощью которого можно делать вывод о (не)устойчивости, отслеживания наличия так называемых “сопряженных точек” (см. далее) для значений спектрального параметра, лежащих на отрезке вещественной оси, длина которого оценивается явно по коэффициентам уравнения. В разд. 3 предложен вариант метода дифференциальной прогонки с простыми вычислительными формулами, который для задач типа Орра–Зоммерфельда обладает рядом преимуществ, по сравнению с известными методами. В разд. 4 излагается метод нахождения неустойчивого собственного значения путем его “трассировки” из сопряженной точки вдоль некоторых кривых на комплексной плоскости (эта возможность была указана, но не конкретизирована в [2]). В разд. 5 приведены результаты численных экспериментов.

Уравнение Орра–Зоммерфельда (см. [1]) возникает при изучении устойчивости в линейном приближении плоского течения вязкой несжимаемой жидкости (течения Пуазейля) в слое  $-\infty < x < \infty$ ,  $-1 < y < 1$ . В уравнениях Навье–Стокса возмущение функции тока берется в виде  $\varphi(y)\exp[i\alpha(x - ct)]$ . В результате возникает следующая краевая задача:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)^2 \varphi(y) = i\alpha R \left[ (U - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \varphi(y) - U'' \varphi(y) \right], \quad (1.1)$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0, \quad (1.2a)$$

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0. \quad (1.2б)$$

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00331).

Здесь  $R$  – число Рейнольдса,  $U(y)$  – профиль скорости невозмущенного потока,  $\alpha > 0$  – постоянная,  $c$  – спектральный параметр. Краевые условия в точке  $y = 0$  получены стандартным переходом от интервала  $[-1, 1]$  к интервалу  $[0, 1]$  с учетом того, что все собственные функции (с.ф.) либо четные, либо нечетные, причем с.ф., соответствующая собственным значениям (с.з.) с наибольшей мнимой частью четная (см. [5]). Течение неустойчиво в линейном приближении, если задача (1.1), (1.2) имеет собственные значения  $c$ , у которых  $\text{Im}(c) > 0$ . Требуется определить, есть ли у задачи такие неустойчивые с.з. и если да, то найти их.

В [3] было показано, что для выяснения вопроса о том, имеются ли (и сколько) с.з. задачи типа (1.1), (1.2) в заданной области  $\Omega \subset C$ , нет необходимости решать задачу двумерного поиска по  $c$  в  $\Omega$  (это может оказаться, и в реальных задачах часто оказывается неприемлемым по времени счета, поскольку вычисление значения минимизируемого функционала в одной точке  $c \in \Omega$  требует, в зависимости от используемой техники, решения сеточной краевой задачи либо решения двух задач Коши для нелинейных прогночных уравнений). Предложенный метод годен для линейной краевой задачи общего вида:

$$Y'(y) = A(y, c)Y(y), \quad y_0 \leq y \leq y_1, \quad (1.3)$$

$$\psi_0 Y(y_0) = 0, \quad (1.4a)$$

$$\psi_1 Y(y_1) = 0, \quad (1.4b)$$

к которой задача Орра–Зоммерфельда может быть сведена (стандартный способ  $Y = (\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''')^T$ ). Здесь комплексная  $(n \times n)$ - (в нашем случае  $(4 \times 4)$ -) матрица  $A$  непрерывно зависит от  $y$  и аналитически от комплексного спектрального параметра  $c$ ;  $\psi_0$  и  $\psi_1$  – комплексные  $[(n - k) \times n]$ - и  $(k \times n)$ -матрицы полного ранга (в данном случае  $k = 2$ ),  $Y$  – зависящий от  $y$  вектор-решение. Линейное условие вида (1.4a) выделяет линейное подпространство пространства  $C^n$ , которому должны принадлежать значения решений (1.3) в точке  $y_0$ . Множество всех таких подпространств имеет естественную структуру аналитического многообразия и называется многообразием Грассмана  $CG(n, k)$  (см. [6]). Уравнение (1.3) вместе с условием (1.4a) определяют отображение переноса линейного условия  $g: [y_0, y_1] \times C \rightarrow CG(n, k)$ , где для  $y \in [y_0, y_1]$ ,  $c \in C$  значением  $g(y, c)$  является множество значений в точке  $y$  решений (1.3), удовлетворяющих (1.4a) (далее для простоты предполагается, что областью задания спектрального параметра  $c$  является вся комплексная плоскость; в задаче Орра–Зоммерфельда это так). Значения отображения  $g$  можно устойчиво вычислять, используя методы дифференциальной прогонки (при том, что отдельные решения (1.3) могут сильно расти и “слипаться” друг с другом). Общая идея методов дифференциальной прогонки состоит в том, чтобы перенести условия типа (1.4), заданные в разных точках, в некоторую общую точку, где их можно проверить на совместность. Метод [3] следующим образом использует эту идею в применении к несамосопряженным задачам на собственные значения: пробегая параметром  $c$  по границе интересующей нас области  $\Omega$ , нужно находить точки  $y \in [y_0, y_1]$ , для которых условие  $g(y, c)$  совместимо с условием (1.4b), перенесенным в точку  $y$  (в [7] такие точки  $y$  называются сопряженными). Те значения  $c$ , для которых сопряженная точка  $y$  существует (в ситуации общего положения их будет конечное число), будем называть “заметающими”. Для каждой такой точки нужно вычислить знак некоторого конкретного выражения (якобиана, см. [3], [6]). Сумма полученных +1 или –1 равна числу с.з. в области  $\Omega$ . Далее, все с.з., находящиеся в  $\Omega$ , лежат на определенных кривых на комплексной плоскости, выходящих из заметающих точек с положительным знаком, и их можно найти специальной “трассировкой” вдоль этих кривых. Таким образом, задача на с.з. (1.3), (1.4) сводится к нескольким одномерным задачам.

## 2. ОЦЕНКИ

В задаче Орра–Зоммерфельда область поиска неустойчивого с.з.  $\Omega$  совпадает с верхней полуплоскостью, и поэтому описанная выше процедура в непосредственном виде неосуществима, так как границей  $\Omega$  является вся вещественная ось. Возникает вопрос: нельзя ли указать на вещественной оси такой конкретный (и не очень большой) отрезок, что для определения неустойчивости задачи (1.1), (1.2) было бы достаточно проверить наличие заметающих точек только для значений  $c$ , принадлежащих этому отрезку. Далее будет получен положительный ответ на этот вопрос. При этом используется предложенный в [4] метод, основанный на оценках типа энергии

тических. В [4] для случая  $U(y) = 1 - y^2$  было показано, что если у задачи (1.1), (1.2) имеются с.з.  $c$ , у которых  $\text{Im}(c) > 0$ , то

$$-1/\alpha^2 \leq \text{Re}(c) \leq 1, \quad 0 < \text{Im}(c) \leq 1/\alpha,$$

т.е. область поиска неустойчивого с.з. суживается до прямоугольника с размерами порядка единицы. Далее с помощью аналогичной техники будет доказано, что если у задачи имеется с.з.  $c$   $\text{Im}(c) \geq 0$ , то для некоторого значения  $c$ , лежащего на конкретном отрезке вещественной оси длины порядка единицы, задача имеет сопряженную точку.

Проведем все выкладки сразу для произвольного профиля  $U$ . Пусть при некотором значении спектрального параметра  $c$  функция  $\varphi$  не равна тождественно нулю и удовлетворяет уравнению (1.1), краевому условию (1.2б) и краевому условию (1.2а), поставленному в некоторой точке  $a \in [0, 1)$  (т.е.  $a$  является сопряженной точкой, см. выше). Интегрированием по частям с учетом краевых условий легко получить следующие тождества:

$$\begin{aligned} \int_a^1 (d^2/dy^2 - \alpha^2) \varphi(y) \bar{\varphi}(y) dy &= \int_a^1 |(d^2/dy^2 - \alpha^2) \varphi(y)|^2 dy, \\ \int_a^1 (d^2/dy^2 - \alpha^2) \varphi(y) \bar{\varphi}(y) dy &= - \int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy, \\ \int_a^1 U(y) ((d^2/dy^2 - \alpha^2) \varphi(y)) \bar{\varphi}(y) dy &= - \int_a^1 U(y) (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy - \int_a^1 U'(y) \varphi'(y) \bar{\varphi}(y) dy. \end{aligned}$$

Переносим правую часть (1.1) влево, домножая уравнение на  $\bar{\varphi}$  и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_a^1 |(d^2/dy^2 - \alpha^2) \varphi(y)|^2 dy + i\alpha R \int_a^1 U (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy + i\alpha R \int_a^1 U'(y) \varphi'(y) \bar{\varphi}(y) dy - \\ - i\alpha R c \int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy + i\alpha R \int_a^1 U''(y) |\varphi(y)|^2 dy = 0. \end{aligned}$$

Положим  $c = \lambda + i\mu$  и разделим действительную и мнимую части:

$$\int_a^1 |(d^2/dy^2 - \alpha^2) \varphi(y)|^2 dy - \alpha R \int_a^1 U'(y) \text{Im}(\varphi'(y) \bar{\varphi}(y)) dy + \alpha R \mu \int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy = 0, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha R \int_a^1 U(y) (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy + \alpha R \int_a^1 U'(y) \text{Re}(\varphi'(y) \bar{\varphi}(y)) dy - \\ - \alpha R \lambda \int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy + \alpha R \int_a^1 U''(y) |\varphi(y)|^2 dy = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обозначим  $u_0 = \max_{y \in [0, 1]} |U(y)|$ ,  $u_1 = \max_{y \in [0, 1]} |U'(y)|$ ,  $u_2 = \max_{y \in [0, 1]} |U''(y)|$ . В реальных задачах это величины порядка единицы. С учетом очевидного неравенства

$$\alpha |\varphi'(y) \bar{\varphi}(y)| \leq (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) / 2$$

из (2.1) получаем

$$\int_a^1 |(d^2/dy^2 - \alpha^2) \varphi(y)|^2 dy + \alpha R \mu \int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy \leq \frac{1}{2} R u_1 \int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2 |\varphi(y)|^2) dy,$$

откуда

$$\mu \leq u_1/2\alpha.$$

В частном случае  $U(y) = 1 - y^2$  это дает  $\mu \leq 1/\alpha$ .

Далее, с учетом тождества  $\text{Re}(\varphi'(y)\bar{\varphi}(y)) = (|\varphi(y)|^2)'/2$  получаем

$$\int_a^1 U'(y)\text{Re}(\varphi'(y)\bar{\varphi}(y))dy = -\frac{1}{2}\int_a^1 U''(y)|\varphi(y)|^2dy + \frac{1}{2}U'(a)|\varphi(a)|^2. \tag{2.3}$$

Ввиду очевидного неравенства

$$|\varphi(y)| \leq \int_a^1 |\varphi'(y)|dy \leq \sqrt{\int_a^1 |\varphi'(y)|^2dy},$$

для последнего слагаемого в (2.3) имеем

$$\left| \frac{1}{2}U'(a)|\varphi(a)|^2 \right| \leq \frac{u_1}{2}\int_a^1 |\varphi'(y)|^2dy. \tag{2.4}$$

Поделив теперь (2.2) на  $\alpha R$  и учитывая (2.3), получаем

$$\int_a^1 (U - \lambda)(|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2|\varphi(y)|^2)dy = -\frac{1}{2}\int_a^1 U''(y)|\varphi(y)|^2dy - \frac{1}{2}U'(a)|\varphi(a)|^2. \tag{2.5}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от знака  $\lambda$ .

1.  $\lambda < 0$ . Правая часть (2.5) (с учетом (2.4)) не превосходит величины

$$\frac{u_2}{2}\int_a^1 |\varphi(y)|^2dy + \frac{u_1}{2}\int_a^1 |\varphi'(y)|^2dy \leq \frac{1}{2}\left(\frac{u_2}{\alpha^2} + u_1\right)\int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2|\varphi(y)|^2)dy,$$

откуда

$$|\lambda| \leq u_0 + u_1/2 + u_2/(2\alpha^2).$$

В частном случае  $U(y) = 1 - y^2$  в результате некоторых упрощений аналогичное неравенство примет вид  $|\lambda| \leq 1 + 1/\alpha^2$ .

2.  $\lambda \geq 0$ . Перепишем (2.5) в виде

$$\int_a^1 U(|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2|\varphi(y)|^2)dy + \frac{1}{2}U'(a)|\varphi(a)|^2 + \frac{1}{2}\int_a^1 U''(y)|\varphi(y)|^2dy = \lambda \int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2|\varphi(y)|^2)dy.$$

Левая часть равенства не превосходит величины

$$(u_0 + u_1/2 + u_2/2\alpha^2)\int_a^1 (|\varphi'(y)|^2 + \alpha^2|\varphi(y)|^2)dy,$$

откуда

$$\lambda \leq u_0 + u_1/2 + u_2/(2\alpha^2).$$

Для  $U(y) = 1 - y^2$  вместо этого получим  $\lambda \leq 2$ .

Окончательно, если для некоторого  $c = \lambda + i\mu$ ,  $\mu \geq 0$  (для дальнейшего нужен только случай  $\mu = 0$ ) задача (1.1), (1.2) имеет сопряженную точку, то

$$|\lambda| \leq u_0 + u_1/2 + u_2/(2\alpha^2)$$

и  $\mu \leq u_1/(2\alpha)$ .

В случае же  $U(y) = 1 - y^2$  вместо этого имеем  $(1 + 1/\alpha^2) \leq \lambda \leq 2$  и  $\mu \leq 1/\alpha$ .

### 3. ВАРИАНТ МЕТОДА ПРОГОНКИ

Для устойчивого переноса краевого условия в нужную точку применяются различные варианты метода дифференциальной прогонки (см. [8]). Здесь будет предложен новый вариант этого метода, который для задач типа Орра–Зоммерфельда (а именно, комплексных задач размерности 4 с двумя условиями на каждом конце) обладает рядом преимуществ по сравнению с известными методами.

Положение  $k$ -мерного линейного подпространства  $L$  в  $n$ -мерном (вещественном или комплексном) линейном пространстве можно задавать с помощью координат Грассмана–Плюккера (см. [9]), определяемых следующим образом. Считаем, что во всем пространстве выбран и зафиксирован базис (т.е. дело происходит в  $R^n$  или  $C^n$ ). Возьмем  $z_1, \dots, z_k$  – произвольный базис в  $L$ . Рассмотрим  $(n \times k)$ -матрицу, составленную из столбцов координат векторов  $z_i$ . Пусть  $g_{i_1 \dots i_k}$  – минор этой матрицы, стоящий в строках  $i_1, \dots, i_k$ . Совокупность чисел  $g_{i_1 \dots i_k}$ ,  $1 \leq i_s \leq n$ ,  $s = 1, 2, \dots, k$  и есть координаты Грассмана–Плюккера подпространства  $L$ . Они являются проективными, т.е. определены с точностью до константы, и не зависят от выбора базиса в  $L$ . Те  $g_{i_1 \dots i_k}$ , у которых совпадают хотя бы два индекса  $i_s$ , равны нулю, и мы будем рассматривать их только для единства записи. Обратимся к задаче (1.3), (1.4) и выпишем прогоночные уравнения, которым подчиняются координаты Грассмана–Плюккера при переносе краевого условия вдоль отрезка  $[y_0, y_1]$ . Пусть  $a_{ij}$  – коэффициенты матрицы  $A$ . Прделаем сначала некоторое условное построение. Выберем какой-нибудь базис в подпространстве, определяемом условием (1.4а), и рассмотрим его векторы как начальные данные для  $k$  задач Коши для системы (1.3). Если представить себе, что эти задачи решаются параллельно (и притом не вносятся никаких вычислительных погрешностей), то тем самым осуществлялся бы перенос базиса в подпространстве, а значит, и краевого условия (1.4а) вдоль отрезка  $[y_0, y_1]$ . Непосредственно проверяется, что координаты Грассмана–Плюккера при этом менялись бы в соответствии с уравнениями

$$g'_{i_1 \dots i_k} = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^n a_{i_p j} g_{i_1 \dots i_{p-1} j i_{p+1} \dots i_k}. \quad (3.1)$$

Запишем (3.1) в векторном виде:

$$\mathbf{g}' = \mathfrak{B} \mathbf{g}. \quad (3.2)$$

Несмотря на внешнее сходство уравнений (3.1), (3.2) с известным методом стрельбы (в частности, их линейность; см. [8]) они не обладают его недостатками, проявляющимися в экспоненциальном росте погрешности. Наоборот, при представлении подпространства с помощью таких координат расстояние между двумя подпространствами получает абсолютно адекватное выражение (именно ошибки в положении подпространств приводят затем к погрешностям при решении линейных систем для значений решения краевой задачи; таким образом, предлагаемый метод обладает в этом отношении всеми достоинствами, присущими ортогональным дифференциальным прогонкам). На качественном уровне этот вывод следует из компактности многообразия  $G(n, k)$  и единичной сферы в пространстве векторов  $\mathbf{g}$ . Более конкретно это можно показать следующим образом. Возьмем стандартный набор карт в  $G(n, k)$ :  $U_{i_1 \dots i_k} = \{L \in G(n, k) : L \text{ проектируется на } \text{span}(e_{i_1} \dots e_{i_k}) \text{ вдоль остальных векторов базиса без вырождения}\}$ .

Элемент  $L \in U_{i_1 \dots i_k}$  однозначно задается  $(n \times k)$ -матрицей, где в строках  $i_1, \dots, i_k$  стоит единичная  $(k \times k)$ -матрица, а в остальных строках – произвольная  $[(n - k) \times k]$ -матрица  $w$ . Инвариантная относительно ортогональных (соответственно, унитарных) преобразований пространства  $R^n(C^n)$  метрика задается так: например, в точке  $\text{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=1}^k w_{ij}^2.$$

С другой стороны, несложно проверить, что

$$w_{ij} = g_{1, \dots, i-1, j, i+1, \dots, k} / g_{1, \dots, k},$$

и соответственно в других картах  $U$ . Поэтому с точностью до констант порядка единицы риманова метрика в  $G(n, k)$  эквивалентна метрике единичной сферы в пространстве координат Грассмана–Плюккера.

Единственное, уже отмеченное неудобство уравнений (3.1) – возможность неконтролируемого роста или стремления к нулю нормы вектора  $\mathbf{g}$ . Это препятствие устраняется стандартным добавлением в (3.2) нелинейного члена, поддерживающего норму вектора постоянной:

$$\mathbf{g}' = \mathfrak{B}\mathbf{g} - \frac{(\mathfrak{B}\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}})}{(\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}})}\mathbf{g}. \tag{3.3}$$

Уравнения (3.1)–(3.3) и есть расчетные формулы прогонки. Предложенный метод обладает следующими положительными свойствами.

1. Он сохраняет все свойства устойчивости, характерные для ортогональных дифференциальных прогонок.
2. Его расчетные формулы чрезвычайно просты (хотя и основаны на не совсем тривиальных математических понятиях).
3. Эти формулы абсолютно одни и те же в вещественном и комплексном случаях и позволяют явным образом сохранить комплексно-аналитическую структуру задачи (это существенно для несамосопряженных задач с аналитическим вхождением спектрального параметра, в том числе для задачи Орра–Зоммерфельда).

Следующее свойство предлагаемого метода может быть его достоинством или недостатком в зависимости от размерности задачи и числа краевых условий. Речь идет о количестве прогоночных уравнений. Желательно, чтобы (при условии сохранения свойств устойчивости) их было как можно меньше. Размерность  $G(n, k)$  (или комплексная размерность  $CG(n, k)$ ) равна  $(n - k) \times k$ , и этот минимум недостижим для “безавстных” прогонок (за исключением  $G(2, 1)$  – преобразование Прюфера), поскольку из строения фундаментальных групп пространств  $G(n, k)$  ( $CG(n, k)$ ) следует несуществование накрытия  $R^{(n-k) \times k} \mapsto G(n, k)$  (соответственно  $C^{(n-k) \times k} \mapsto CG(n, k)$ ) (см. [9]). Особняком здесь стоят прогонки “с переключениями” (см., например, [10]) – число прогоночных уравнений на каждом отрезке там равно  $(n - k) \times k$ , однако при этом возникает ряд трудностей иного свойства (в частности, реализация на таких прогонках предлагаемого здесь метода значительно усложняется). При обычной ортогональной дифференциальной прогонке переносится базис в  $k$ -мерном подпространстве в  $R^n$  ( $C^n$ ), так что число прогоночных уравнений равно  $k \times n$  (для Орра–Зоммерфельда – 8 комплексных уравнений). Что же касается прогонки (3.1)–(3.3), то размерность вектора  $\mathbf{g}$  равна  $C_n^k$  без учета дубликатов от перестановок и тождественно нулевых компонент и  $n^k$  – с их учетом. При больших  $n$  и  $k$  такое число прогоночных уравнений значительно больше, чем, например, у ортогональных прогонок, (координаты Грассмана–Плюккера избыточны и связаны друг с другом большим числом тождеств см. [9]), однако, для небольших размерностей ситуация меняется. Например, для соответствующего задаче Орра–Зоммерфельда случая  $CG(4, 2)$  мы получаем (с учетом кососимметричности) всего 6 координат.

4. Для задачи Орра–Зоммерфельда (и всех несамосопряженных задач такой же размерности) предложенный метод требует решения меньшего числа прогоночных уравнений, чем известные методы прогонки.

Остается добавить, что краевые условия (1.2) в координатах Грассмана–Плюккера также записываются очень просто:

$$g_{24}(0) = 0, \quad g_{12}(1) = 0$$

(при нумерации  $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ ). Таким образом, при поиске сопряженной точки и ее трассировке нужно, прогоняя краевое условие из  $y = 1$  в  $y = 0$  (а не наоборот – из соображений устойчивости, см. [11]), следить всего за одним комплексным числом  $g_{24}(y)$ , что упрощает дело в техническом отношении.

## 4. ТРАССИРОВКА ЗАМЕТАЮЩЕЙ ТОЧКИ

Вместо координаты  $g_{24}(y)$  будем рассматривать ее же, поделенную на какую-то другую из координат Грассмана–Плюккера, которая в исследуемой области спектрального параметра (или хотя бы локально) отлична от нуля, например, возьмем величину  $g_{24}(y)/g_{34}(y)$  и будем искать ее нули. Смысл такой замены в том, что при фиксированном  $y$  эта величина, в отличие от  $g_{24}(y)$ , аналитически зависит от спектрального параметра. Фактически мы, в точности, как это было в [2], имеем дело с отображением трехмерного конуса в расширенную комплексную плоскость. Основанием конуса служит область спектрального параметра, исследуемая на наличие с.з., а продвижение от вершины к основанию вдоль образующей соответствует переносу граничного условия из точки  $y = 1$ . Обозначим это отображение через  $h$ , т.е.  $h(c, y) = g_{24}(y)/g_{34}(y)$  при заданном  $c$ .

Суммируя сказанное в разд. 2, 3 (см. также [3]), процедуру выявления неустойчивости можно представить следующим образом. Определяем отрезок вещественной оси в плоскости спектрального параметра, на котором только и нужно искать заматающие точки; разбиваем его на достаточно мелкие части точками  $c_i$  и для каждой из них решаем прогоночные уравнения от  $y = 1$  к  $y = 0$ , отмечая те  $c_i$ , вблизи которых решение заматает ноль; при этом вычисляем знак заматающей точки по следующему правилу: при продвижении по границе области, оставляющей область слева (в нашем случае областью является верхняя полуплоскость и точка  $c$  движется по отрезку вещественной оси в положительном направлении) векторы  $\partial h/\partial c$ ,  $\partial h/\partial y$  должны образовывать правый репер (здесь учтено, что движение по  $y$  происходит в отрицательном направлении). Таким образом, положительный знак соответствует тому, что при движении спектральным параметром вдоль границы области траектории переноса граничного условия заматают ноль справа налево.

Число с.з. в выделенной области равно числу заматающих точек на ее границе, взятых с учетом знака (реально, по крайней мере в рассматриваемой задаче, при наличии неустойчивости бывает всего одна заматающая точка с плюсом).

Предположим, что мы обнаружили наличие неустойчивости и поставим теперь цель найти само неустойчивое с.з. В терминах отображения  $h$  мы должны решить следующую задачу (см. [3]): исходя из положительной заматающей точки (точнее, из той точки на боковой поверхности конуса, которую заматающая точка определяет вместе с соответствующей сопряженной точкой), нужно пройти по соответствующей ей компоненте (попросту, отрезку кривой) множества  $h^{-1}(0)$  в ее противоположный конец, лежащий на основании конуса – это и будет искомое с.з. Практически это осуществляется так. В момент, когда обнаружена заматающая точка (обозначим ее через  $c^0$ ), мы автоматически знаем частные производные  $h$  по  $c$  вдоль вещественной оси (так как мы двигаемся по  $c_i$ ) и по  $y$  (так как мы переносим краевое условие). Но поскольку  $h$  аналитично по  $c$  (см. выше), этой информации достаточно, чтобы знать всю матрицу Якоби для  $h$  в данной точке (в вещественном виде это матрица размера  $2 \times 3$ ). Поэтому можно найти малый вектор смещения  $\Delta c$ ,  $\Delta y$ , касательный к  $h^{-1}(0)$  (т.е. “удерживающий” краевое условие) и направленный внутрь конуса (т.е. продвигающий  $y$  в сторону того конца отрезка интегрирования, где поставлено краевое условие (1.2а)). Дадим  $c$  малое приращение в этом направлении (пусть это будет точка  $c^1$ ) и снова прогоним краевое условие. Из-за внесенной ошибки траектория прогонки уже не пройдет через ноль, однако она пройдет очень близко к нему, и в ближайшей к нулю точке мы снова автоматически будем знать частные производные  $h$  по  $y$  (прогонка) и по  $c$  (в направлении от  $c^0$  к  $c^1$ , а значит, в силу аналитичности по  $c$ , в любом). Поэтому можно сделать очередной шаг продвижения по  $c$ , и т.д., пока  $y$  не станет равным нулю – соответствующее  $c^m$  и будет искомым с.з. Конкретные расчетные формулы трассировки таковы:

$$c^{j+1} = c^j - \varepsilon \left( \frac{\partial h/\partial y}{\partial h/\partial c} \right) - \frac{h(c^j, y^j)}{\partial h/\partial c}. \quad (4.1)$$

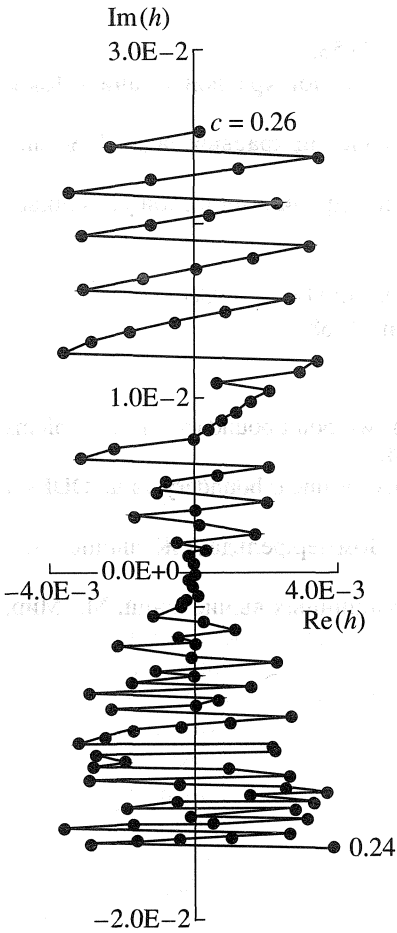
Здесь  $\varepsilon$  – задаваемый малый параметр. На каждой итерации производные берутся в точке  $(c^j, y^j)$ , где  $y^j$  – точка на траектории прогонки (соответствующей значению спектрального параметра  $c$ ), где эта траектория проходит ближе всего к нулю. Частная производная по  $y$  бывает известна автоматически из интегрирования прогоночных уравнений, а частные производные по  $c$  вычисляются при помощи первых разностей от предыдущей итерации с поправкой на изменение  $y^j$ . Ньютоновская поправка (второе слагаемое в правой части (4.1)) необходима для того, чтобы  $h(c^j, y^j)$  не уходило от нуля вследствие ошибок аппроксимации.



5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Расчеты проводились на РС-486 с двойной (64 бит) точностью представления вещественных чисел по изложенной выше схеме с использованием метода прогонки, описанного в разд. 3. Для численного решения задач Коши для прогоночных уравнений применялся метод Рунге–Кутты–Фельберга 5-го (4-го) порядка (использовалась процедура, функционально эквивалентная известной программе RKF-45 [13]). Сведение уравнения (2.1) к общему виду (1.1) осуществлялось с помощью замены (см. [11])  $y = (\varphi, \varphi', \varphi'' - \alpha^2\varphi, \varphi''' - \alpha^2\varphi')^T$ . Рассматривался устойчивый профиль основного потока  $U(y) = 1 - y^2$ . Были рассмотрены два набора параметров.

1. (см. [11], [12]):  $R = 10^4, \alpha = 1$ . Здесь на вещественной оси в плоскости  $c$  имеется одна сопряженная точка  $c = 0.25102332$ , при этом траектория прогонки проходит через ноль при  $y = 0.0635676$ . Технически достаточно просто находить заметающие точки так: для каждого  $c$  определять на траектории прогонки точку, ближайшую к нулю, подсчитывать в ней значение отображения  $h$  и его производной по  $y$  и искать те точки  $c$ , где  $\text{Im}(h/(\partial h \partial y))$  меняет знак. На фиг. 1 показан один из шагов поиска точного положения заметающей точки – кривая значений  $h/(\partial h \partial y)$  при  $c$ , пробегающем отрезок (0.24, 0.26). Хорошо видно, что при  $h$  далеких от нуля вещественная часть ведет себя случайным образом из-за ошибок вычислений (для простоты расчетов в качестве траектории прогонки бралась ее кусочно-линейная интерполяция), однако при прохождении мнимой части через ноль вещественная часть также обращается в ноль, причем более высоким порядком, именно так должно быть при заметании точки с помощью кривой, зависящей от параметра. На фиг. 2 показан следующий этап расчетов – результат трассировки в плоскости спектрального параметра из заметающей точки в неустойчивое с.з. Против точек графика указаны значения  $y$ , соответствующие сопряженным точкам. Затем положение полученной точки  $c$  для  $y = 0$  уточнялось по методу Ньютона (т.е. по формуле (4.1) при  $y = 0$  и без первого слагаемого в правой части). В результате было вычислено неустойчивое с.з.:  $c = 0.2375264888 + 0.00373967062i$ ;



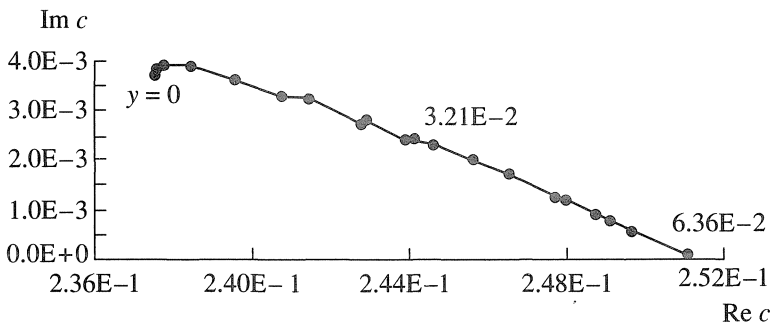
Фиг. 1.

тона (т.е. по формуле (4.1) при  $y = 0$  и без первого слагаемого в правой части). В результате было вычислено неустойчивое с.з.:  $c = 0.2375264888 + 0.00373967062i$ ;

2. (см. [7, с. 278]):  $R = 6000, \alpha = 1.02$ . По той же схеме здесь было найдено неустойчивое с.з.  $c = 0.2621652250 + 0.0003589185941i$ , или, в обозначениях [7],  $\lambda = -i\alpha c = 0.0003660969659 - 0.2674085295i$ .

Найденные с.з. затем проверялись с помощью принципа аргумента – производился просчет значений  $h(c, 0)$  по  $c$ , пробегающим окружность малого радиуса с центром в вычисленном с.з.

Автор выражает искреннюю признательность рецензенту статьи за ценные замечания и предложения, позволившие улучшить текст.



Фиг. 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линь Цзя-Цзяо*. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Наука, 1958.
2. *Курочкин С.В.* Метод нахождения собственных значений несамосопряженной краевой задачи // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 442–443.
3. *Курочкин С.В.* Топологические методы локализации собственных значений краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 8. С. 1165–1174.
4. *Бабенко К.И., Васильев М.М.* О доказательных вычислениях в теории гидродинамической устойчивости: Препринт № 47. М.: ИПМатем. АН СССР, 1983.
5. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
6. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
7. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
8. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
9. *Рохлин В.А., Фукс Д.Б.* Начальный курс топологии. М.: Наука, 1977.
10. *Babuska I., Majer V.* The factorization method for the numerical solution of two point boundary value problems for linear ODEs // SIAM J. Numer. Analys. 1987. V. 24. № 6. P. 1301–1334.
11. *Bramley S., Dieci L., Russel R.D.* Numerical solution of eigenvalue problems for linear boundary value ODEs // J. Comput. Phys. 1991. V. 94. № 2. P. 382–402.
12. *Альварес Л.М., Диткин В.В.* О численном решении уравнения Орра–Зоммерфельда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 4. С. 611–615.
13. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Математические методы машинных вычислений. М.: Мир, 1980.