С. В. Курочкин, Некоторые оценки для собственных значений возмущённого оператора, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1987, том 27, номер 11, 1736–1739

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 27, 1987 № 11

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.6

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

КУРОЧКИН С. В.

(Москва)

Пусть λ_0 и $\mathbf{x}_0$ — простое изолированное собственное значение и соответствующий собственный вектор оператора A, λ и $\mathbf{x}$ — то же для возмущенного оператора $A+B$. Получены оценки и алгоритмы вычисления λ и $\mathbf{x}$, явно использующие расстояние от $B\mathbf{x}_0$ до прямой, натянутой на $\mathbf{x}_0$. Результаты частично перенесены на случай кратного λ_0.

Пусть λ_0 — изолированное простое собственное значение оператора A, $\mathbf{x}_0$ — соответствующий собственный вектор. Рассмотрим возмущенный оператор $A+B$ и его собственное значение λ, близкое к λ_0. Если $\mathbf{x}_0$ собственный также и для B, то, очевидно, λ совпадает с линейным приближением, получаемым по теории возмущений. Возникает вопрос об оценках для собственных значений и векторов, в которые явно входит расстояние от вектора $B\mathbf{x}_0$ до прямой, натянутой на $\mathbf{x}_0$. В настоящей работе получены оценки такого рода и использующие их численные алгоритмы нахождения собственных значений и собственных векторов возмущенного оператора.

1. Пусть A — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве X, λ_0 — изолированная точка его спектра, являющаяся простым собственным значением, Γ — контур, охватывающий λ_0 и не содержащий других точек спектра, E — единичный оператор в X, $R(\zeta)=(A-\zeta E)^{-1}$ — резольвента оператора A. Введем ограниченные операторы

$$P=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R(\zeta)\,d\zeta,\qquad S=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda_0}$$

со свойствами: $P^2=P$, $\operatorname{Im} P$ одномерно, $(A-\lambda_0E)P=0$, $PS=SP=0$, $(A-\lambda_0E)S=E-P$ (см. [1]). Обозначим через $\operatorname{Ker} P$ и $\operatorname{Im} P$ ядро и образ оператора P. Для оператора $T:X\to X$ запись $T|_{\operatorname{Ker} P}$ будет означать сужение T на $\operatorname{Ker} P$ (с областью значений X). Выберем нормированный вектор $\mathbf{x}_0$ в $\operatorname{Im} P$. Тогда $P\mathbf{x}\equiv(\mathbf{x},\psi)\mathbf{x}_0$ для некоторого функционала ψ.

Рассмотрим возмущенный оператор $A+B$, причем для B предположим, что $D(B)\supset D(A)$. Будем искать собственный вектор оператора $A+B$, соответствующий собственному значению λ, близкому к λ_0, в виде $\mathbf{x}_0+\mathbf{l}$, где $\mathbf{l}\in\operatorname{Ker} P$ — малая поправка. Имеем

(1) $$(A+B)(\mathbf{x}_0+\mathbf{l})=\lambda(\mathbf{x}_0+\mathbf{l}).$$

Обозначим $\lambda_1=(B\mathbf{x}_0,\psi)$. Тогда, проектируя (1) на $\operatorname{Im} P$, получаем

(2) $$\lambda_0+\lambda_1+(B\mathbf{l},\psi)=\lambda.$$

Подставляя λ в проекцию (1) на $\operatorname{Ker} P$, имеем

(3) $$(A-\lambda_0E)\mathbf{l}+(B-\lambda_1E)\mathbf{x}_0+(E-P)(B-\lambda_1E)\mathbf{l}=(B\mathbf{l},\psi)\mathbf{l},$$

причем в правой части вместо $B\mathbf{l}$ можно написать $(B-\mu E)\mathbf{l}$ с любой константой μ, в частности с $\mu=\lambda_1$.

Далее предположим ограниченность либо оператора B, либо BS.

Рассмотрим первый случай. Умножая (3) слева на S, получаем

(4) $$\mathbf{l}=-S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0-S(B-\lambda_1 E)\mathbf{l}+((B-\lambda_1 E)\mathbf{l},\ \psi)S\mathbf{l}.$$

Имеем уравнение вида $\mathbf{l}=F(\mathbf{l})$ в $\operatorname{Ker} P$, где $F:\operatorname{Ker} P\to\operatorname{Ker} P$ — отображение класса $\mathbf{C}^1$, причем

$$\|F(0)\|=\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|,\quad \|F'(\mathbf{l})\|\leqslant\|S(B-\lambda_1 E)\,|_{\operatorname{Ker} P}\|+$$
$$+2\|P(B-\lambda_1 E)\,|_{\operatorname{Ker} P}\|\cdot\|S\|\cdot\|\mathbf{l}\|.$$

Введем обозначение $F^n(\mathbf{x})=F(F^{n-1}(\mathbf{x}))$, $F^1(\mathbf{x})=F(\mathbf{x})$. Из известных фактов о сжимающих отображениях (например, [2, гл. XVIII, § 1, теорема 1]) следует, что при выполнении условий

(5а) $$\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|\leqslant a_1,$$

(5б) $$\gamma=[\|P(B-\lambda_1 E)\,|_{\operatorname{Ker} P}\|+\|(E-P)(B-\lambda_1 E)\,|_{\operatorname{Ker} P}\|]\|S\|\leqslant a_2<1,$$
$$a_1/(1-a_2)\leqslant{}^1/_2,$$

уравнение (4) имеет вблизи нуля единственное решение $\mathbf{l}^*$, причем

(6а) $$\|\mathbf{l}^*\|\leqslant C\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|,$$

(6б) $$\|\mathbf{l}^*-F^n(0)\|\leqslant C\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|\gamma^n,$$

где $C=(1-a_2)^{-1}$.

Требования малости констант a_1, a_2 несколько жестче, чем требования, которые гарантируют отделенность возмущенного собственного значения от остального спектра.

Подстановка (6) в (2) дает оценку погрешности линейного приближения и алгоритм нахождения собственного значения.

Уравнение (4) можно преобразовать так:

(7) $$\mathbf{l}=G(\mathbf{l}),\quad G(\mathbf{l})=[E-S(B-\lambda_1 E)]\,|^{-1}_{\operatorname{Ker} P}[-S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0+((B-\lambda_1 E)\mathbf{l},\ \psi)S\mathbf{l}].$$

Аналогичные рассуждения при условиях

(8) $$\|S(B-\lambda_1 E)\,|_{\operatorname{Ker} P}\|\leqslant d_1<1,\quad \|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|\|PB\,|_{\operatorname{Ker} P}\|\|S\|\leqslant d_2,$$
$$d_2/(1-d_1)^2\leqslant{}^1/_8,$$

дают оценки для решения (7); для $\|\mathbf{l}^*\|$ — это оценка (6а) и

(9) $$\|\mathbf{l}^*-G^n(0)\|\leqslant C\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|^{n+1}(C'\|PB\,|_{\operatorname{Ker} P}\|\|S\|)^n,$$

где $C=2/(1-d_1)$, $C'=4/(1-d_1)^2$.

Из изложенного выше вытекает

Теорема 1. *Для собственного вектора задачи* (1) *с ограниченным оператором B при условиях* (5) *либо* (8) *справедлива оценка* (6а), *а для собственного значения λ — оценка погрешности линейного приближения*

$$|\lambda-\lambda_0-\lambda_1|\leqslant C\|PB\,|_{\operatorname{Ker} P}\|\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|.$$

В условиях (5) *имеется алгоритм $\mathbf{l}_n=F^n(0)$ (F — из* (4)) *с оценкой сходимости* (6б). *В условиях* (8) — *алгоритм $\mathbf{l}_n=G^n(0)$ (G — из* (7)) *с оценкой* (9). ***Использование*** (2) *дает алгоритмы вычисления собственного значения и оценки, соответственно,*

$$|\lambda-\lambda_0-\lambda_1-\lambda(\mathbf{l}_n)|\leqslant C\|PB\,|_{\operatorname{Ker} P}\|\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|\gamma^n,$$
$$|\lambda-\lambda_0-\lambda_1-\lambda(\mathbf{l}_n)|\leqslant C\|PB\,|_{\operatorname{Ker} P}\|^{n+1}\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|^{n+1}(C'\|S\|)^n.$$

Замечание. В случае, когда $\|(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|$ или $\|S(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|$ мало, алгоритм (9) сходится быстрее, чем (6б). В то же время (6б), в отличие от (9), при $n=1$ дает квадратичное приближение для λ. Необходимо отметить, что итерационный процесс $\mathbf{l}_n=F^n(0)$ (F — из (4)) уже рассматривался в литературе см. [3, с. 340].

Рассмотрим теперь случай неограниченного B и предположим ограниченность оператора BS (далее на него будут также наложены некоторые условия малости). Ищем решение (3) в виде $\mathbf{l}=S\mathbf{z}$, что дает

(10) $$\mathbf{z}=F(\mathbf{z}),$$
$$F(\mathbf{z})=-(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0-(E-P)(B-\lambda_1 E)S\mathbf{z}+((B-\lambda_1 E)S\mathbf{z},\ \psi)S\mathbf{z},$$

либо

(11) $\quad \mathbf{z}=G(\mathbf{z}),$

$$G(\mathbf{z})=[E+(E-P)(B-\lambda_1 E)S]\big|_{\operatorname{Ker}P}^{-1}[-(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0+((B-\lambda_1 E)S\mathbf{z},\psi)S\mathbf{z}],$$

и совершенно аналогично теореме 1 устанавливается

Теорема 2. *При условиях*

(12а) $\quad \|S\|\|(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|\leqslant a_1,\quad \gamma=[\|(E-P)(B-\lambda_1 E)S|_{\operatorname{Ker}P}\|+$
$+\|P(B-\lambda_1 E)S|_{\operatorname{Ker}P}\|]\leqslant a_2$

либо

(12б) $\quad \|(E-P)(B-\lambda_1 E)S|_{\operatorname{Ker}P}\|\leqslant d_1,\quad \|(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|\|PBS|_{\operatorname{Ker}P}\|\|S\|\leqslant d_2$

для собственного вектора задачи (1) *верна оценка*

$$\|\mathbf{l}^*\|\leqslant C\|S\|\|(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|,$$

а для собственного значения — оценка линейного приближения

$$|\lambda-\lambda_0-\lambda_1|\leqslant C\|(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|\|PBS|_{\operatorname{Ker}P}\|.$$

В условиях (12а) *имеется алгоритм* $\mathbf{z}_n=F^n(0)$ $(F$ *— из* (10)) *с оценкой*

$$\|\mathbf{l}^*-\mathbf{l}_n\|\leqslant C\|S\|\|(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|\gamma^n,$$

а в условиях (12б) *— алгоритм* $\mathbf{z}_n=G^n(0)$ $(G$ *— из* (11)) *с оценкой*

$$\|\mathbf{l}^*-\mathbf{l}_n\|\leqslant C\|(B-\lambda_1 E)\mathbf{x}_0\|^{n+1}\|S\|^{n+1}(C'\|PBS|_{\operatorname{Ker}P}\|)^n.$$

Зависимость C, C' *от* a_2, d_1 *та же, что в теореме* 1.

2. Полученные результаты частично переносятся на случай кратного собственного значения. Предположим, что вблизи точки λ_0 расположена изолированная часть спектра оператора A, отделенная от остального спектра контуром Γ. Операторы P и S определим так же, как в п. 1. Ниже предполагается, что $\delta=\|(A-\lambda_0 E)|_{\operatorname{Im}P}\|$ мало́. Сюда входит случай полупростого собственного значения (т. е. конечной кратности и без присоединенных векторов) и случай, когда A — самосопряженный и имеется группа собственных значений, близких к λ_0. Предположим, что B ограничен (аналогично п. 1 можно исследовать и общий случай, при этом ограниченность $B|_{\operatorname{Im}P}$, которая дальше используется, следует из того, что B замкнут и $D(B)\supset D(A)$).

Предположим, что некоторому собственному значению λ оператора $A+B$, близкому к λ_0, соответствует собственный вектор вида $\mathbf{k}+\mathbf{l}$, $\mathbf{k}\in\operatorname{Im}P$, $\|k\|=1$, $\mathbf{l}\in\operatorname{Ker}P$, $\|\mathbf{l}\|$ мало́ (существование не доказывается, поскольку ничего в этом отношении не предполагалось про оператор A). В проекциях на $\operatorname{Im}P$ и $\operatorname{Ker}P$ получим, соответственно,

(13а) $\quad A\mathbf{k}+PB\mathbf{k}+PB\mathbf{l}=\lambda\mathbf{k},$

(13б) $\quad A\mathbf{l}+(E-P)B\mathbf{k}+(E-P)B\mathbf{l}=\lambda\mathbf{l}.$

Для произвольного ограниченного оператора T введем величину

$$\Omega(T)=\inf_{\lambda}\|T-\lambda E\|.$$

Обозначим $\Omega(PB|_{\operatorname{Im}P})$ через Ω, а число, реализующее этот минимум,— через λ_1 (нетрудно показать, что оно существует и единственно).

Теорема 3. *Предположим, что* $\delta+\Omega+\|PB|_{\operatorname{Ker}P}\|\|\mathbf{l}\|\leqslant c_1/\|S\|$, $\|S(B-\lambda_1 E)|_{\operatorname{Ker}P}\|\leqslant c_2$, $c_1+c_2<1$. *Тогда* $\|\mathbf{l}\|\leqslant C\|SB|_{\operatorname{Im}P}\|$, $|\lambda-\lambda_0-\lambda_1|\leqslant\delta+\Omega+C\|PB|_{\operatorname{Ker}P}\|\|SB|_{\operatorname{Im}P}\|$, *где* $C=(1-c_1-c_2)^{-1}$.

Доказательство. Из (13а) имеем

$$(A-\lambda_0 E)\mathbf{k}+P(B-\lambda_1 E)\mathbf{k}+PB\mathbf{l}=(\lambda-\lambda_0-\lambda_1)\mathbf{k},$$

откуда $|\lambda-\lambda_0-\lambda_1|\leqslant\delta+\Omega+\|PB|_{\operatorname{Ker}P}\|\|\mathbf{l}\|$. Из (13б) получаем

$$\mathbf{l}=-[E+S(B-\lambda_1 E)-(\lambda-\lambda_0-\lambda_1)S]\big|_{\operatorname{Ker}P}^{-1}S(B-\lambda_1 E)\mathbf{k},$$

откуда следуют нужные оценки.

Следующая теорема, представляющая и самостоятельный интерес, показывает, что теорему 3 нельзя усилить, используя вместо Ω аналогичные «локальные» характеристики оператора $PB|_{\mathrm{Im}\,P}$. Для произвольного ограниченного оператора T положим

$$\omega(T)=\sup_{\|\mathbf{x}\|=1}\inf_{\lambda}\|T\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}\|.$$

Теорема 4. *Пусть X — вещественное либо комплексное гильбертово пространство, T — ограниченный оператор в X. Тогда $\Omega(T)=\omega(T)$.*

Доказательство. Очевидно, что $\omega(T)\leqslant\Omega(T)$. В вещественном случае для каждого $\mathbf{x}\in X$, $\|\mathbf{x}\|=1$ рассмотрим отрезок $I_\mathbf{x}=\{\lambda\in R:\|T\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}\|\leqslant\omega(T)\}$ с центром $\lambda_\mathbf{x}=(T\mathbf{x},\mathbf{x})$. Докажем, что $I_\mathbf{x}\cap I_\mathbf{y}$ непусто для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|=1$. Возьмем точку $\mu\in[\lambda_\mathbf{x},\lambda_\mathbf{y}]$ такую, что $\|T\mathbf{x}-\lambda_\mathbf{x}\mathbf{x}\|^2+|\lambda_\mathbf{x}-\mu|^2=\|T\mathbf{y}-\lambda_\mathbf{y}\mathbf{y}\|^2+|\lambda_\mathbf{y}-\mu|^2$ (если же, например, $\|T\mathbf{x}-\lambda_\mathbf{x}\mathbf{x}\|^2+|\lambda_\mathbf{x}-\lambda_\mathbf{y}|^2<\|T\mathbf{y}-\lambda_\mathbf{y}\mathbf{y}\|^2$, то $\lambda_\mathbf{y}\in I_\mathbf{x}$). Тогда $\|(T-\mu E)\mathbf{x}\|=\|(T-\mu E)\mathbf{y}\|$ и можно найти вектор $\mathbf{z}$ вида $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$, $\|\mathbf{z}\|=1$, так что $\|(T-\mu E)\mathbf{z}\|\geqslant\|(T-\mu E)\mathbf{x}\|$ и $(T\mathbf{z},\mathbf{z})=\mu$. Поэтому $\omega(T)\geqslant\|(T-\mu E)\mathbf{x}\|$ и $\mu\in I_\mathbf{x}\cap I_\mathbf{y}$. Применяя теорему Хелли о пересечении выпуклых тел для размерности 1, получаем некоторую точку γ, принадлежащую всем отрезкам $I_\mathbf{x}$, и, следовательно, $\|T-\gamma E\|\leqslant\omega(T)$.

В комплексном случае доказательство аналогично при следующих изменениях: делается стандартное овеществление, вместо отрезков строятся круги на плоскости, в доказательстве непустоты пересечения любых трех кругов используются те же геометрические соображения и выпуклость числового образа оператора, применяется теорема Хелли в размерности 2.

Автор благодарит А. А. Абрамова за постановку задачи и внимание к работе и В. Б. Лидского за ценные замечания.

Литература

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
3. *Baumgärtel H.* Analytic perturbation theory for matrixes and operators. Basel: Birkhäuser, 1985.

Поступила в редакцию 11.VI.1986
Переработанный вариант 27.X.1986

УДК 519.6:533.7

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА НА ОСНОВЕ ПОЛНЫХ И УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

ГОЛОВАЧЁВ Ю. П., ЛЕОНТЬЕВА Н. В.

(Ленинград)

На примере стационарного осесимметричного течения у лобовой поверхности сферы, расположенной в области сверхзвукового следа, исследуется применимость упрощенных математических моделей для описания течений газа с развитой рециркуляционной зоной. Представлено сравнение результатов численных решений полных и упрощенных уравнений Навье — Стокса при двух вариантах граничных условий на головной ударной волне.

Для моделирования течений вязкого газа в настоящее время широко применяются упрощенные («параболизованные») уравнения Навье — Стокса, которые включают все члены уравнений Эйлера и уравнений пограничного слоя и не содержат вторых производных от искомых функций по координате, совпадающей с основным направлением потока. Для задач сверхзвукового обтекания тел такие математические модели были сформулированы в [1]—[3] в результате оценок порядка величины членов уравнений Навье — Стокса, описывающих молекулярный перенос импульса и энергии. Эти оценки, основанные на представлениях классической теории пограничного слоя, справедливы в условиях безотрывного обтекания при больших числах Рейнольдса. Опыт практического использования рассматриваемых моделей свидетельствует о том, что область их применимости шире формальных пределов, следующих из указанных выше оценок. Упрощенные уравнения используются, в частности, для расчета течений с отрывом потока от обтекаемой поверхности и образованием замкнутых областей возвратно-циркуляционного течения (см., например, [4]—[6]). Представляет интерес исследование погрешности моделирования та-